Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

PRÁCTICO 1

Semana 1

Curvas, vector y recta tangente, longitud de arco.

EN CLASE:

1. ¿Cuándo es horizontal el vector velocidad $\alpha'(t)$ de un punto en el borde de un disco que rueda? ¿Cuál es la velocidad $\|\alpha'(t)\|$ en ese instante? *Sugerencia:* leer la parametrización de la cicloide en el plano

2. Una partícula que sigue la trayectoria $\alpha(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ se sale por la tangente en el instante $t_0 = 2$. Calcular la posición de la partícula en el instante $t_1 = 3$. *Sugerencia:* calcular la recta tangente en $t_0 = 2$. Graficar en OCTAVE, usando `plot3`. Graficar la posición en t_1 usando el comando `plot3(x,y,z,'o')`.

3. Dada una curva paramétrica $\alpha(t)$, con $a \leq t \leq b$, que sea C^1 y verifique $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, consideremos una nueva variable $s = s(t)$, con $s(t) \in C^1$ y estrictamente creciente ($s'(t) > 0$). Para cada $s \in [s(a), s(b)]$ existe un único t tal que $s(t) = s$.

   Definimos $\beta : [s(a), s(b)] \to \mathbb{R}^3$ una nueva curva paramétrica

   $$\beta(s) := \alpha(t)$$

   donde t es el único t tal que $s(t) = s$.

   a) Mostrar que $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ son dos parametrizaciones de la misma curva.

   b) Mostrar que $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ tienen la misma longitud de arco.

   c) Sea $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$. Verificar que $s(t)$ es C^1 y estrictamente creciente. Definir como antes $\beta(s) = \alpha(t)$, donde t es el único tal que $s(t) = s$. Demostrar que;

   $$\left\| \frac{d\beta}{ds}(s) \right\| = 1$$

   La curva $\beta(s)$ se llama en este caso **reparametrización de** $\alpha(t)$ **por longitud de arco**.

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

Para graficar con OCTAVE o a mano.

1. Usando `plot3`, dibujar las curvas imágenes de las siguientes curvas paramétricas

   a) $x = \sin t$, $y = 4\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$

   b) $x = 2\sin t$, $t = 4\cos t$, con $t \in [0, 2\pi]$

c) $\alpha(t) = (2t-1, t+2, t)$, con $t \in \mathbb{R}$

d) $\alpha(t) = (-t, 2t, \frac{1}{t})$, con $t \in [1,3]$.

2. Determinar el vector velocidad $\alpha'(t)$ de las siguientes curvas paramétricas:

   a) $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

   b) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos t, 2t^{\frac{3}{2}})$

   c) $\alpha(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$

   d) $\alpha(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$

   Usando `plot3` dibujar las curvas $\alpha(t)$, y usando `quiver3` dibujar los vectores velocidad.

3. Encontrar el versor tangente de las siguientes curvas planas:

   a) $\alpha(t) = (e^t, \cos t)$

   b) $\alpha(t) = (3t^2, t^3)$

   c) $\alpha(t) = (t \sin t, 4t)$

   d) $\alpha(t) = (t^2, e^2)$

   Graficar las curvas planas usando `plot`. Graficar los versores tangentes usando `quiver`.

4. Si la posición de una partícula en el espacio es $(6t, 3t^2, t^3)$, ¿cuál es el vector velocidad en el instante $t = 0$? Graficar la curva y el vector velocidad.

5. Determinar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria dada para el valor de t especificado

   a) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{5}{2}})$ en $t = 1$

   b) $\alpha(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$ en $t = 0$

   Graficar la trayectoria y la recta tangente usando `plot3`.

6. Una partícula que sigue la trayectoria $\alpha(t)$ se sale por la tangente en el instante t_0. Calcular la posición de la partícula en el instante t_1, donde:

   a) $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

   b) $\alpha(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

   c) $\alpha(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^3)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

   Graficar la curva $\alpha(t)$ y la recta tangente pasando por $\alpha(t_0)$. Para graficar la posición de la partícula en el instante t_1, usar el comando `plot3(x,y,z,'o')`.

7. Hallar la longitud de arco de la curva paramétrica en el intervalo especificado:

   a) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$.

   b) $\alpha(t) = (1, 3t^2, t^3)$, para $t \in [0,1]$

   c) $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$ con $t \in [0,1]$.

d) $\alpha(t) = (t+1, \frac{2\sqrt{2}}{3}+7, \frac{1}{2}t^2)$ para $t \in [1,2]$

e) $\alpha(t) = (t, t, t^2)$ con $t \in [1,2]$

f) $\alpha(t) = (t, \sin t, t\cos t)$ para $t \in [0,\pi]$

g) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ para $t \in [0, 2\pi]$

h) $\alpha(t) = (t, t\sin t, t\cos t)$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$

8. Dada una curva paramétrica $\alpha(t)$, la función **longitud de arco**:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

representa la distancia recorrida desde el instante a hasta el instante t por una partícual que viaja a lo largo de la trayectoria $\alpha(t)$; es decir la longitud de arco desde $\alpha(a)$ a $\alpha(t)$.

Hallar las funciones longitud de arco para las curvas, suponiendo $a = 0$

a) $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

b) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$

9. Sea $\alpha(t)$ una curva paramétrica C^∞. Supongamos que $\alpha'(t) \neq 0$. El vector

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

es tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$. Como $\|T(t)\| = 1$, $T(t)$ se denomina **versor tangente**

a) Demostrar que $T'(t).T(t) = 0$. *Sugerencia:* Derivar $T(t).T(t) = 1$.

b) Escribir una fórmula para $T'(t)$ en términos de $\alpha(t)$.

10. Una curva $\alpha(s)$ está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in [a,b]$. Demostrar que si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco, entonces, la longitud de arco es $\ell(\alpha) = b - a$.

11. La **curvatura** en un punto $\alpha(s)$ de una curva paramétrica cuando está parametrizada por la longitud de arco, se define como

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

Demostrar que $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.

12. Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada por un parámetro cualquiera, no necesariamente longitud de arco, y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, demostrar que

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

(ver ejercicio anterior).

13. Calcular la curvatura de la hélice $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$