

# Introducción a los Procesos Estocásticos

Germán Capdehourat, Sergio Martínez, Pablo Musé  
{gcapde, sematag, pmuse}@fing.edu.uy

Instituto de Ingeniería Eléctrica  
Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

17 de agosto de 2021

Densidad espectral de potencia de procesos WSS

Ruido blanco y proceso de Wiener

Ergodicidad

Autocorrelación de señales determinísticas

Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

$i(t)$  corriente a través de una resistencia  $R$ , voltaje  $v(t) = Ri(t)$

- ▶ Potencia instantánea:  $v(t)i(t) = R i^2(t) = v^2(t)/R$
- ▶ Energía disipada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R i^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2(t)/R) dt.$$

⇒ Definimos la **energía de una señal**  $x(t)$  como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.$$

**Interpretación:** energía disipada por una resistencia de  $R = 1$  ohm.

- ▶ Las **señales periódicas no tienen energía finita, pero tienen potencia promedio finita:**

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

# Potencia de un proceso estocástico

Para un **proceso estocástico**  $X(t)$ , **las cantidades análogas**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt, \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \text{ son VAs.}$$

⇒ Definimos la **potencia promedio esperada** como

$$P_X := \mathbb{E} \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right].$$

Si el proceso es WSS, entonces

$$\begin{aligned} P_X &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbb{E} [ |X(t)|^2 ] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbb{E} [ X^2(t) ] dt = \mathbb{E} [ X^2(t) ]. \end{aligned}$$

# Potencia de un proceso estocástico WSS

Como la cantidad  $\mathbb{E} [X^2(t)]$  es una **potencia instantánea esperada**,

- ▶ para procesos WSS, la potencias media esperada y la potencia instantánea esperada **son iguales**.
- ▶ Le llamamos simplemente **potencia esperada** o **potencia**.

Para procesos WSS tenemos tres formas de expresar la potencia:

$$\mathbb{E} [X^2(t)] = R_X(0) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{i2\pi f\tau} df \right]_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

⇒ Veremos que **esto nos permite dar una interpretación a  $S_X(f)$** , que ahora llamaremos **densidad espectral de potencia (PSD)**.

# PSD de un proceso estocástico WSS

La PSD es no negativa

Para verlo, sea  $Y(t) = h * X(t)$  WSS, con  $\hat{h}(f) = \mathbb{I}\{W_1 \leq |f| \leq W_2\}$ .

$$S_Y(f) = |\mathbb{I}\{W_1 \leq |f| \leq W_2\}|^2 S_X(f) = \mathbb{I}\{W_1 \leq |f| \leq W_2\} S_X(f).$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\{W_1 \leq |f| \leq W_2\} S_X(f) df = \int_{W_1}^{W_2} S_X(f) df.$$

Si llamamos  $f_0$  a la frecuencia central y  $\Delta W = W_2 - W_1$ , tenemos

$$P_Y = \int_{f_0 - \Delta W/2}^{f_0 + \Delta W/2} S_X(f) df \underset{\Delta W \rightarrow 0}{\sim} S_X(f_0) \Delta W$$

Luego, como  $P_Y \geq 0$  y  $\Delta W > 0$ , entonces  $\forall f_0, S_X(f_0) \geq 0$ .

⇒ Entonces:

- ▶ Como  $S_X(f) \geq 0$  y  $P_X = \int S_X(f) df$ ,  $S_X(f)$  es una **densidad de  $P_X$** .
- ▶ Como  $S_X(f)$  está definida en frecuencia, es una densidad **espectral**.

Densidad espectral de potencia de procesos WSS

Ruido blanco y proceso de Wiener

Ergodicidad

Autocorrelación de señales determinísticas

Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

**Def:** llamamos **ruido blanco** a un proceso  $X(t)$  con **PSD constante sobre todo el dominio frecuencial**:

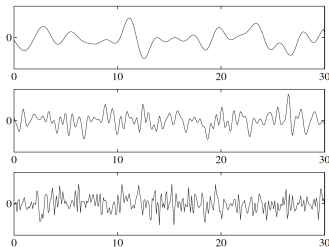
$$S_X(f) = \sigma^2 \forall f \in \mathbb{R} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad R_X(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

- ▶ **Analogía con la luz:** todos los colores presentes con igual intensidad.
- ▶ **Idealización de lo que se observa en las fuentes de ruido físico.** En las fuentes de ruido reales,  $S_X(f)$  es a lo sumo aproximadamente constante hasta los 1000 GHz, y luego decae a 0.
- ▶ **Nunca observamos el ruido blanco directamente, sino a través de sistemas o captos reales,** que tienen anchos de banda finitos, muy inferiores a 1000 GHz.



## Ruido blanco (cont.)

- ▶ Así como la  $\delta$  de Dirac no es una función ordinaria (es una distribución) **el ruido blanco no es un proceso ordinario**.
- ▶ Por ejemplo, como  $\delta(t)$  no está definida en 0,  $\mathbb{E} [X^2(t)] = R_X(0)$  **no está definida y no es un proceso de orden 2**.
- ▶ Supongamos que observamos un ruido blanco a través de un pasabajos ideal  $H(f) = \mathbb{I} \{|f| \leq W\}$ :  $S_Y(f) = \mathbb{I} \{|f| \leq W\} \sigma^2$



Realizaciones de  $Y(t)$ :  $W = 1/2$ ,  $W = 2$ ,  $W = 4$

A medida que  $W$  crece  $\Rightarrow$  incorpora frecuencias mayores  $\Rightarrow$  es más irregular

# Proceso de Wiener (movimiento Browniano)

Para entender mejor el ruido blanco, estudiaremos el proceso de Wiener

**Def. (axiomática):**  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener si cumple:

(i)  $W(0) = 0$ .

(ii) Incrementos gaussianos:

$$\forall 0 \leq s \leq t < \infty, \quad W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)).$$

(iii) Incrementos independientes: Para cualquier conjunto

$$(t_1, t_2], (t_2, t_3], \dots, (t_n, t_{n+1}],$$

de intervalos disjuntos, los incrementos

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_{n+1}) - W(t_n)$$

son independientes.

(iv) Caminos continuos:  $\forall \omega \in \Omega, W(t, \omega) = W(t)$  es continua  $\forall t$ .

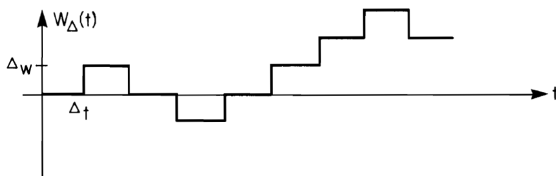
# Construcción de $W(t)$ como límite de un *random walk*

Comenzamos por la versión continua del proceso discreto  $Z_n$  de Bernoulli  $\pm 1$  de parámetro  $p = 1/2$ :

$$Z_{\Delta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \Delta_w \delta(t - n\Delta_t), \quad t \geq 0. \quad (\Delta_t > 0, \Delta_w > 0)$$

Definimos el *random walk* continuo

$$\begin{aligned} W_{\Delta}(t) &= \int_0^t Z_{\Delta}(v) dv \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \Delta_w u(t - n\Delta_t), \quad t \geq 0. \quad (u \text{ escalón unitario}) \end{aligned}$$



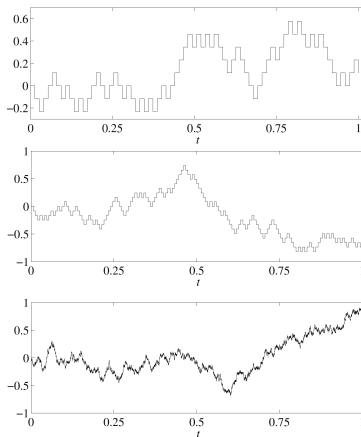
# Wiener como límite de un *random walk* (cont.)

Obtendremos el proceso de Wiener  $W(t)$  de **forma constructiva** como  $\lim_{\Delta_t, \Delta_w \rightarrow 0} W_{\Delta}(t)$ , imponiendo  $\Delta_w = \sigma\sqrt{\Delta_t}$ , para algún  $\sigma > 0$ .

Definimos el proceso de Wiener:

$$\begin{aligned} W(t) &:= \lim_{\substack{\Delta_w = \sigma\sqrt{\Delta_t} \\ \Delta_t \rightarrow 0}} W_{\Delta}(t) \\ &= \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma Z_n \sqrt{\Delta_t} u(t - n\Delta_t) \end{aligned}$$

(Tren infinitamente denso de incrementos infinitesimales)



$$\Delta_t = 1/75, 1/150, 1/10^5$$

# Wiener como límite de un *random walk* (cont.)

Para calcular este límite, observemos que:

- ▶ La cantidad de VAs de Bernoulli  $Z_i$  en el intervalo  $[0, t_i]$  es  $n_i = \frac{[t_i]}{\Delta_t}$ , con  $[t_i] = \text{máx}\{n \text{ t.q. } n\Delta_t \leq t_i\} \times \Delta_t$
- ▶ Recordemos: proceso de incrementos no correlacionados  $\{Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 0\}$ , con  $X_i = \pm\Delta$ ,  $P(X_i=1) = P(X_i=-1) = 1/2$

Tomando  $\Delta = \sigma\sqrt{\Delta_t}$ , tenemos

$$m_{W_\Delta}(t) = 0$$

$$R_{W_\Delta}(t_1, t_2) = \sigma^2 \Delta_t \text{mín}\{n_1, n_2\} = \sigma^2 \text{mín}\{[t_1], [t_2]\}$$

- ▶ Pasando al límite, y notando que  $\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} [t_i] = t_i$ , obtenemos

$$m_W(t) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} m_{W_\Delta}(t) = 0$$

$$R(t_1, t_2) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} R_{W_\Delta}(t_1, t_2) = \sigma^2 \text{mín}\{t_1, t_2\}.$$

# Wiener como límite de un *random walk* (cont.)

Resta ver que la definición constructiva coincide con la axiomática

- (i) Por definición,  $W(0) = 0$ .
- (ii) Para ver que los incrementos son gaussianos calculamos

$$\begin{aligned}W_{\Delta}(t_2) - W_{\Delta}(t_1) &= \sum_{n=[t_1]/\Delta_t}^{[t_2]/\Delta_t} \sigma\sqrt{\Delta_t} Z_n(u(t_2 - n\Delta_t) - u(t_1 - n\Delta_t)). \\ &= \sigma\sqrt{\Delta_t} \sum_{n=[t_1]/\Delta_t}^{[t_2]/\Delta_t} Z_n \mathbb{I}\{t_1 \leq t \leq t_2\}\end{aligned}$$

Es suma de  $([t_2] - [t_1])/ \Delta_t$  VAs. i.i.d, media nula, varianza  $\sigma^2 \Delta_t$

$\Rightarrow$  Para  $\Delta_t$  chico, por el teorema central de límite tenemos

$$W_{\Delta}(t_2) - W_{\Delta}(t_1) \sim \mathcal{N}(0, ([t_2] - [t_1])\sigma^2)$$

$\Rightarrow$  Para  $\Delta_t \rightarrow 0$ ,  $W(t_2) - W(t_1) \sim \mathcal{N}(0, (t_2 - t_1)\sigma^2)$

## Wiener como límite de un *random walk* (cont.)

- (iii) Veamos que para intervalos disjuntos  $[t_1, t_2)$  y  $[t_3, t_4)$  cualesquiera, los incrementos son independientes.

Como el proceso es gaussiano, basta con no estar correlacionados:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W_\Delta(t_2) - W_\Delta(t_1))(W_\Delta(t_4) - W_\Delta(t_3))] &= \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=\lceil t_1 \rceil / \Delta_t}^{\lceil t_2 \rceil / \Delta_t} \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_n \mathbb{I}\{t_1 \leq t \leq t_2\} \sum_{m=\lceil t_3 \rceil / \Delta_t}^{\lceil t_4 \rceil / \Delta_t} \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_m \mathbb{I}\{t_3 \leq t \leq t_4\} \right] \\ &= \sigma^2 \Delta_t \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{m=n_3}^{n_4} \mathbb{E}[Z_n Z_m] \mathbb{I}\{t_1 \leq t \leq t_2\} \mathbb{I}\{t_3 \leq t \leq t_4\} = 0\end{aligned}$$

ya que  $Z_n, Z_m$  son no correlacionados para  $m \neq n$  ( $n_2 < n_3$ ).

# Wiener como límite de un *random walk* (cont.)

(iv) Queda ver que los caminos son continuos.

Calculemos la probabilidad que los saltos sean mayores a  $\varepsilon > 0$ .

Por la desigualdad de Markov,

$$\begin{aligned} P(|W_{\Delta}([t]) - W_{\Delta}([t+h])| > \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[|W_{\Delta}([t]) - W_{\Delta}([t+h])|] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{n=[t]}^{[t+h]} \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_n \mathbb{I}\{t \leq t \leq t+h\} \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=[t]}^{[t+h]} \mathbb{E} \left[ \left| \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_n \mathbb{I}\{t \leq t \leq t+h\} \right| \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=[t]}^{[t+h]} \sigma \sqrt{\Delta_t} = \frac{([t+h] - [t])}{\varepsilon} \sigma \sqrt{\Delta_t} \\ &\underset{\Delta_t \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{\varepsilon} \sigma \sqrt{\Delta_t} \xrightarrow{h=\varepsilon, \Delta_t \rightarrow 0} 0 \implies \text{caminos continuos c.s.} \end{aligned}$$



# Relación entre ruido blanco y proceso de Wiener

Veremos que el ruido blanco es la derivada del proceso de Wiener.

Por definición, la derivada de  $W_\Delta(t)$  es el peine de Dirac

$$Z_\Delta(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_n u(t - n\Delta_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma \sqrt{\Delta_t} Z_n \delta(t - n\Delta_t)$$

- ▶ El **proceso simbólico**  $Z(t) := \frac{dW(t)}{dt}$  es una **idealización** que llamamos **ruido blanco**. ( $W(t)$  no diferenciable en sentido clásico.)
- ▶ Si pensamos en  $Z(t)$  como el límite para  $\Delta_t \rightarrow 0$  de  $Z_\Delta(t)$ :
  - ▶ Podemos interpretar al ruido blanco como un tren infinitamente denso de impulsos.
  - ▶ Es solo una **interpretación**: existen dificultades matemáticas asociadas a la existencia de este límite.

Mediante cálculo estocástico, se puede ver que  $m_Z(t)$  y  $R_Z(t_1, t_2)$  pueden calcularse formalmente intercambiando esperanzas y derivadas:

$$\forall t > 0, \forall 0 \leq t_1 \leq t_2,$$

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}\left[\frac{dW(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathbb{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[\frac{dW(t_1)}{dt_1} \frac{dW(t_2)}{dt_2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \mathbb{E}[W(t_1)W(t_2)] \\ &= \frac{\partial^2 R_W(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 \min(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

# Ruido blanco gaussiano (WGN)

Caracterización del ruido blanco derivado del proceso de Wiener:

$$\mathbb{E}[Z(t)] = 0, \quad t > 0$$

$$R_Z(t_1, t_2) = \sigma^2 \delta(\tau), \quad \tau > 0$$

- ▶ En la práctica asumiremos que el comienzo fue hace muchísimo tiempo, y **lo asumiremos definido sobre todo  $\mathbb{R}$** .
- ▶ Como la derivada es un funcional lineal, y funcionales lineales de gaussianas son gaussianas, **el ruido blanco derivado del proceso de Wiener es gaussiano**.
- ▶ Al ser gaussiano está **totalmente determinado por su media y su autocorrelación**.
- ▶ **El WGN es SSS, pero no WSS** porque no es de segundo orden:

$$\mathbb{E}[Z^2(t)] = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 dt = +\infty. \quad (\text{potencia infinita})$$

# Ejemplo: ruido térmico

La PSD del ruido térmico en resistencias modela precisamente como [Nyquist, 1928]

$$S_Z(f) = N_0 \frac{|f|/f_0}{\exp(|f|/f_0) - 1},$$

- ▶ *Ancho de banda*  $f_0 := \frac{k}{\hbar} T \simeq 2,1 \cdot 10^{10} T$  Hz, donde  $k$  es la constante de Boltzman y  $\hbar$  la constante de Planck  
 $\Rightarrow \tau_0 = 1/f_0 \simeq 1,7 \cdot 10^{-13}$  sec: tiempo de relajación de los electrones en la resistencia
- ▶ *Intensidad espectral*  $N_0 := 2KTR \simeq 2,76 \cdot 10^{-23} TR$  [W $\Omega$ /Hz], donde  $T$  [K] y  $R$  [ $\Omega$ ].
- ▶ @  $T = 290$  K:  $f_0 \simeq 6,0 \cdot 10^{12}$  Hz,  $N_0 \simeq 8,0 \cdot 10^{-21} R$  W $\Omega$ /Hz
- ▶ Si  $f \ll f_0$ ,  $\exp(|f|/f_0) \simeq f/f_0$   
 $\Rightarrow S_Z(f) = N_0$  para  $|f| \leq 10^{12}$  (WGN)

- ▶ Por analogía al caso continuo, el proceso discreto  $X(n)$  es un ruido blanco si tiene media nula y espectro plano

$$S_X(e^{j\theta}) = \sigma^2 \longleftrightarrow R_X(n) = \sigma^2 \delta[n],$$

con  $\delta[n]$  la delta de Kronecker

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

- ▶ A diferencia del caso continuo, su potencia es finita (por lo tanto además de SSS es WSS):

$$\mathbb{E}[X^2] = R_X(0) = \sigma^2.$$

Densidad espectral de potencia de procesos WSS

Ruido blanco y proceso de Wiener

Ergodicidad

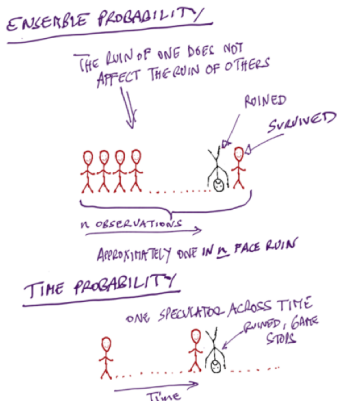
Autocorrelación de señales determinísticas

Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

- ▶ Para calcular estadísticas sobre el espacio muestral necesitamos de un modelo del proceso, o de un número suficientemente grande de realizaciones o trazas.
- ▶ En muchas situaciones sólo disponemos de unas pocas trazas o incluso una sola, i.e.  $\{X(\omega_0, t), t \in T\}$  para  $\omega_0$  fijo.
- ▶ En esas situaciones sólo nos podemos contentar con tomar estadísticas o promedios temporales.

# Ergodicidad: introducción (cont.)

- ▶ En general los promedios sobre ensambles y en el tiempo difieren.  
“ $n$  amigos van al casino” vs. “Juan va  $n$  veces al casino”



[Nassim Taleb, *Skin in the Game*, Random House, 2018]



# Ergodicidad: introducción (cont.)

- ▶ Es importante saber **cuándo promedios sobre ensambles y en el tiempo coinciden**
  - ⇒ **implicancias prácticas** (se hace un solo registro o experimento)
- ▶ La igualdad entre promedios sobre ensambles y en el tiempo se conoce como **propiedad ergódica**
- ▶ **Muchos procesos de interés exhiben propiedades ergódicas**, sin embargo **muchos procesos importantes no**.
- ▶ Estudiaremos bajo qué condiciones un **proceso es ergódico**.

# Teorema de Wiener-Khinchin

Recordemos que la **potencia promedio esperada** viene dada por

$$P_X := \mathbb{E} \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)^2 dt \right],$$

Definimos

$$X^T(t) := X(t) \mathbb{I} \{|t| \leq T\}.$$

La FT de  $X^T(t)$  es

$$\widehat{X^T}(f) := \mathcal{F}\{X^T\}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^T(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Por el teorema de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X^T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X^T}(f)|^2 df.$$

# Teorema de Wiener-Khinchin (cont.)

Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned} P_X &= \mathbb{E} \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |X^T(t)|^2 dt \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{X^T}(f)|^2 df \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(f)|^2 \right]}{2T} \right) df. \end{aligned}$$

(Podemos intercambiar  $\mathbb{E}$  y  $\lim$  porque

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{X^T}(f)|^2 df \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(f)|^2 df \text{ uniformemente})$$

Veremos que si  $X(t)$  es WSS,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(f)|^2 \right]}{2T} = S_X(f)$ .

# Teorema de Wiener-Khinchin (cont.)

Teorema (Wiener-Khinchin)

Si el proceso  $X(t)$  es WSS, entonces  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ \left| \widehat{X}^T(f) \right|^2 \right]}{2T} = S_X(f)$ .

**Prueba:**

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \widehat{X}^T(f) \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_{-T}^T X(t) e^{-i2\pi ft} dt \right) \left( \int_{-T}^T X(u) e^{-i2\pi fu} du \right)^* \right] \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \mathbb{E} [X(t)X(u)] e^{-i2\pi f(t-u)} dt du \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t-u) e^{-i2\pi f(t-u)} dt du \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) e^{i2\pi\nu(t-u)} e^{-i2\pi f(t-u)} d\nu dt du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ \int_{-T}^T e^{i2\pi u(f-\nu)} \left( \int_{-T}^T e^{i2\pi t(\nu-f)} dt \right) du \right] d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ \int_{-T}^T e^{i2\pi u(f-\nu)} du \right] \left( \int_{-T}^T e^{i2\pi t(\nu-f)} dt \right) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ 2T \frac{\sin(2\pi T(f-\nu))}{2\pi T(f-\nu)} \right]^2 d\nu. \end{aligned}$$

## Teorema de Wiener-Khinchin (cont.)

$$\text{Como } \mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(f)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ 2T \frac{\sin(2\pi T(f - \nu))}{2\pi T(f - \nu)} \right]^2 d\nu,$$

$$\text{tenemos } \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(f)|^2 \right]}{2T} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) 2T \left[ \frac{\sin(2\pi T(f - \nu))}{2\pi T(f - \nu)} \right]^2 d\nu.$$

Luego, tomando el límite a ambos lados para  $T \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(f)|^2 \right]}{2T} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \delta(f - \nu) d\nu = S_X(f)$$

□

**Obs:** Otra forma de ver que la PSD es no negativa

En la demostración anterior, también mostramos que

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t-u) e^{-i2\pi f(t-u)} dt du \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T e^{-i2\pi ft} R_X(t-u) e^{i2\pi fu} dt du. \end{aligned}$$

Como  $R_X$  es semi-definida positiva, esto muestra que la PSD es no negativa.

El siguiente teorema asegura que bajo ciertas condiciones, la media muestral (promedios temporales sobre una realización) converge a la media sobre ensambles.

Teorema (Ergodicidad en m.c.)

Sea  $Y(t)$  un proceso WSS de media  $m_Y = \mathbb{E}[Y(t)]$  y covarianza  $C_Y(\tau)$ .  
Si  $\mathcal{F}\{C_Y(\tau)\}(f)$  es continua en  $f = 0$ , entonces la media muestral

$$\langle Y(t) \rangle_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{m.c.} m_Y,$$

esto es  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ |\langle Y(t) \rangle_T - m_Y|^2 \right] = 0$ .

## Demostración.

Definimos  $X(t) = Y(t) - m_Y$ ,  $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ ,  $R_X(\tau) = C_Y(\tau)$ .

Tenemos

$$\langle Y(t) \rangle_T - m_Y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \frac{\widehat{X^T}(0)}{2T}.$$

Por teorema de Wiener-Khinchin, tomando  $f = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |\langle Y(t) \rangle_T - m_Y|^2 \right] &= \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(0)|^2 \right]}{4T^2} = \frac{1}{2T} \frac{\mathbb{E} \left[ |\widehat{X^T}(0)|^2 \right]}{2T} \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ 2T \frac{\sin(2\pi T\nu)}{2\pi T\nu} \right]^2 d\nu. \end{aligned}$$

Si  $S_X(\nu)$  es continua en  $\nu = 0$ , tenemos

$$\mathbb{E} \left[ |\langle Y(t) \rangle_T - m_Y|^2 \right] = \frac{S_X(0)}{2T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$



El teorema anterior requiere conocer la FT de  $C_Y(\tau)$ . En caso de no poder calcularla, tenemos el siguiente teorema.

Teorema (Condición necesaria y suficiente de ergodicidad en m.c.)

$\langle Y(t) \rangle_T$  converge en m.c. a  $m_Y = \mathbb{E}[Y(t)]$  si y solo si

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau = 0.$$



## Demostración.

Veamos primero que si  $R_X(\tau) = C_Y(\tau)$  es absolutamente integrable,  $S_X(f)$  es continua en  $f = 0$ :

$$\begin{aligned} |S_X(f) - S_X(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| |e^{-j2\pi f\tau} - 1| d\tau \xrightarrow{f \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |\langle Y(t) \rangle_T - m_Y|^2 \right] &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \left[ 2T \frac{\sin(2\pi T\nu)}{2\pi T\nu} \right]^2 d\nu \\ \xrightarrow{\text{Plancherel}} \mathbb{E} \left[ |\langle Y(t) \rangle_T - m_Y|^2 \right] &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} R_X(\tau) \left( 1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) \left( 1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Luego,  $\langle Y(t) \rangle_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{m.c.}} m_Y$  ssi el lado derecho converge a 0. □

Teorema (Condiciones necesarias y suficientes de ergodicidad en m.c.)

Sea  $Y(t)$  WSS. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$(i) \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(\langle Y(\tau) \rangle_T - m_Y)^2] = 0$$

$$(ii) \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau = 0.$$

$$(iii) \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) d\tau = 0.$$

Por el teorema anterior, sabemos que  $[(ii)] \Rightarrow [(i)]$ .

Demostraremos que  $[(i)] \Rightarrow [(iii)]$  y luego que  $[(iii)] \Rightarrow [(ii)]$ .

Demostración.

► [(i)]  $\Rightarrow$  [(iii)]

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) d\tau \right|^2 &= \left| \mathbb{E} \left[ (Y(0) - m_Y) \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (Y(\tau) - m_Y) d\tau \right] \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} [(Y(0) - m_Y)^2] \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (Y(\tau) - m_Y) d\tau \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} [(Y(0) - m_Y)^2] \mathbb{E} \left[ \left( 2(\langle Y(\tau) \rangle_{2T} - m_Y) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Por lo que si el lado derecho tiende a cero, el lado izquierdo también.

► [(iii)]  $\Rightarrow$  [(ii)]: Para  $T > \frac{\tau}{2}$ , tenemos  $0 \leq 1 - \tau/(2T) \leq 1$  por lo que

$$\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau) \left( 1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) d\tau \leq \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |C_Y(\tau)| d\tau,$$

lo que prueba que [(iii)]  $\Rightarrow$  [(ii)]. □

Los teoremas anteriores nos dan condiciones necesarias y suficientes de ergodicidad en m.c. para la media de un proceso  $X(t)$  WSS, esto es

$$\langle X(t) \rangle_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{m.c.}} \mathbb{E}[X(t)].$$

## Ejemplo (Onda binaria aleatoria)

Teníamos  $R_X(\tau) = C_X(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{T_p}\right) \mathbb{I}\{|\tau| \leq T_p\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_X(\tau) d\tau &= \frac{2}{2T} \int_0^{2T} C_X(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T_p} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_p}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left(T_p - \frac{T_p^2}{2T_p}\right) = \frac{T_p}{2T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

⇒ La onda binaria aleatoria es **ergódica en la media en sentido m.c.**

## Ejemplo

$Z \sim \text{Bernoulli}(p)$  con  $0 < p < 1$ . Consideramos el proceso  $X(t) = Z \forall t$ .

Este proceso es SSS, su media es  $\mathbb{E}[Z] = p$ , pero  $\langle X(t) \rangle_T$  vale 0 o 1, por lo que **no es ergódico**.

Además es fácil ver que no verifica las condiciones necesarias y suficientes:

$$\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_X(\tau) d\tau = \frac{4T \text{var}[Z]}{2T} = 2p(1-p) \neq 0.$$

Podemos aplicar los teoremas ergódicos a la **autocorrelación** de  $X(t)$ , considerando  $Z(t) = X(t + \tau)X(t)$ .

$\Rightarrow X(t)$  ergódico en la autocorrelación si  $Z(t)$  es ergódico en la media.

$$m_Z = \mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X(t)] = R_X(\tau)$$

$$\begin{aligned} C_Z(v) &= \mathbb{E}[Z(t + v)Z(t)] - \mathbb{E}[Z(t + \tau)]\mathbb{E}[Z(t)] \\ &= \mathbb{E}[X(t + \tau + v)X(t + \tau)X(t + v)X(t)] - R_X^2(\tau), \end{aligned}$$

suponiendo que  $X(t)$  tiene momentos de cuarto orden estacionarios.

## Corolario

Sea  $Z(v) = X(t + v)X(t)$ . Entonces  $\langle R_X(\tau) \rangle_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{m.c.}} R_X(\tau)$  si y solo si

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (\mathbb{E}[Z(t + v)Z(t)] - R_X^2(\tau)) dv = 0.$$

## Ejemplo (Señal portadora en receptor)

Consideremos la señal aleatoria

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta), \theta \in \mathcal{U}[-\pi, \pi].$$

►  $X(t)$  es WSS:

$$m_X = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t + \tau, t) &= \mathbb{E} [A^2 \cos(\omega(t + \tau) + \theta) \cos(\omega t + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \mathbb{E} [\cos(\omega(2t + \tau) + 2\theta) + \cos(\omega\tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau). \end{aligned}$$

- Promedios temporales:

$$\begin{aligned}\langle X(t) \rangle_T &= \frac{A}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega t + \theta) dt \\ &= \frac{A}{2T\omega} \sin(\omega t + \theta) \Big|_{t=-T}^T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 = m_X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle R_X(\tau) \rangle_T &= \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega(t + \tau) + \theta) \cos(\omega t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T (\cos(\omega(2t + \tau) + 2\theta) + \cos(\omega\tau)) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) + \left[ \frac{A^2}{4T} \frac{\sin(\omega(2t + \tau) + 2\theta)}{2\omega} \right]_{t=-T}^T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} R_X(\tau).\end{aligned}$$

$\Rightarrow X(t)$  es ergódico en la media y ergódico en la autocorrelación.



Densidad espectral de potencia de procesos WSS

Ruido blanco y proceso de Wiener

Ergodicidad

Autocorrelación de señales determinísticas

Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

# Autocorrelación de señales determinísticas

Los promedios temporales para obtener la autocorrelación a partir de una traza inspiran su uso para **señales determinísticas** siempre que el límite exista:

$$\bar{R}_x(\tau) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t)dt.$$

De igual forma, se define la PSD de una señal determinística como

$$S_x(f) := \mathcal{F}\{\bar{R}_x(\tau)\}(f).$$

**Obs:** Sigue valiendo el resultado para la salida  $y(t)$  de un filtro de transferencia  $\hat{h}(f)$  ante una entrada  $x(t)$  determinística:

$$S_y(f) = |\hat{h}(f)|^2 S_x(f).$$

Densidad espectral de potencia de procesos WSS

Ruido blanco y proceso de Wiener

Ergodicidad

Autocorrelación de señales determinísticas

Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

# Densidad espectral de potencia de procesos no WSS

En la demostración del teorema de Wiener-Khinchin vimos que

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ \left| \widehat{X^T}(f) \right|^2 \right]}{2T} \right) df.$$

Llegamos a este resultado sin asumir que  $X(t)$  es WSS.

Retomando la prueba del teorema de Wiener-Khinchin es fácil demostrar que, sea o no sea  $X(t)$  WSS:

(i)

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left\{ \left| \widehat{X^T}(f) \right|^2 \right\}}{2T} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

$$\text{con} \quad \bar{R}_X(\tau) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t + \tau, t) dt.$$

(ii)

$$S_X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad \text{define la PSD del proceso.}$$

Es importante notar que esta definición es válida para proceso WSS.  
En efecto, para **procesos WSS**,

$$\begin{aligned}\bar{R}_X(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t + \tau, t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(\tau) dt = \frac{2T}{2T} R_X(\tau) = R_X(\tau).\end{aligned}$$

## Ejemplo (Procesos cicloestacionarios)

Una aplicación importante de lo anterior son los procesos (WSS)-cicloestacionarios, que cumplen:

- ▶  $\mathbb{E}[X(t)]$  es  $T_0$ -periódica en  $t$
- ▶  $R_X(t + \tau, t)$  es  $T_0$ -periódica en  $t$ .

**Ejercicio:** Sea  $Y(t)$  WSS y  $X(t) := Y(t) \cos(2\pi f_0 t)$ . Probar que  $X(t)$  es cicloestacionario.



**J. A. Gubner**

Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers

*Cambridge University Press, 2006 (Chap. 10, 11).*



**W. A. Gardner**

Introduction to Random Processes, with Applications to Signals and Systems

*McGraw-Hill Publishing Company, 1989 (Chap. 6, 10).*