

MODELADO DE LA MAQUINA SINCRONA PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD

Ecuaciones de estado de la máquina

Transformada de Park-Ecuaciones en coordenadas de Park

Aplicación al régimen estacionario balanceado

Aplicación al régimen transitorio y subtransitorio balanceado

Métodos fasoriales y circuitos equivalentes

Parámetros operacionales

Tratamiento de la saturación

Ecuación de "swing"

Límites operativos de la máquina síncrona

Introducción

A diferencia de los elementos pasivos de la red (líneas, transformadores), cuyo modelado para estudios de estabilidad no difiere del que se usa habitualmente en los estudios de régimen estacionario, la máquina síncrona debe ser modelada en una forma mucho más compleja y sofisticada.

Los modelos sencillos de líneas y transformadores que se usan al formular las ecuaciones del flujo de cargas son sustentables en estudios de estabilidad debido a que los transitorios de red son tan rápidos (a lo sumo unos pocos ciclos) que se puede asumir que la red va describiendo una sucesión de estados de equilibrio (calculables a través de las ecuaciones algebraicas del flujo de cargas) a medida que va transcurriendo la perturbación en estudio (método “cuasiestático” de análisis)

Esta simplificación no es razonable para la máquina síncrona, cuyos transitorios (mecánicos, de los devanados del rotor, y de los sistemas de regulación de velocidad y tensión) muestran constantes de tiempo del orden de varios segundos. Se hace necesario, por lo tanto, modelar la máquina síncrona a través de un conjunto de ecuaciones no sólo algebraicas, sino también diferenciales. Estas ecuaciones deben incluir no sólo una descripción del comportamiento de la máquina en relación a las variables eléctricas (corrientes, tensiones) intercambiadas con la red, sino también una descripción del comportamiento mecánico de la máquina al producirse la perturbación. Se recuerda al respecto que el objeto clásico de estudio del análisis de estabilidad transitoria es la eventual pérdida de sincronismo del sistema, lo cuál está directamente relacionado con las variaciones de posición de los rotores de las máquinas.

No obstante, las dificultades y complejidad inherentes a un modelado excesivamente preciso justifican asumir diversas simplificaciones en los modelos usados, de forma que se pueda abordar el análisis sin complicar innecesariamente la teoría y las rutinas de cálculo.

El nivel de estas simplificaciones depende del tipo de estudio a realizar (y, en particular, del período de tiempo de análisis a partir de la perturbación en la red que motiva el estudio: régimen subtransitorio, transitorio o estacionario) y ha variado históricamente a lo largo del tiempo, a medida que se han ido haciendo cada vez más potentes y sofisticadas las herramientas de cálculo.

De esta forma, es posible encontrar en la literatura a la máquina síncrona modelada en forma tan simple como una fuente de tensión atrás de una reactancia (estudios de régimen y de estabilidad transitoria en la década del 70) o tan compleja como un conjunto de 7 o más bobinados acoplados electromagnéticamente a través de coeficientes de inducción propia y mutua que dependen del tiempo (estudios de estabilidad transitoria modernos).

Si bien a lo largo del curso se utilizarán principalmente métodos de análisis simplificados de la estabilidad transitoria de los sistemas de potencia, que sólo requieren de modelos relativamente sencillos de la máquina síncrona, es importante, por un lado, entender cómo se deducen y cuáles son las limitaciones de estos modelos simplificados y, por otro lado, tener una idea de cuáles son los modelos más completos que se usan en los programas de cálculo modernos.

De esta forma, la metodología adoptada en nuestro caso es ir de lo más general a lo más particular, mediante el siguiente plan de trabajo:

- Plantear las ecuaciones generales eléctricas de la máquina síncrona en la forma que se usan habitualmente en los programas modernos de cálculo, pero sin tener en cuenta inicialmente los efectos de saturación.
- Introducir las hipótesis simplificatorias que llevan a los modelos clásicos simplificados de la máquina en régimen estacionario y transitorio balanceado.
- Describir las correcciones que hay que introducir a la teoría anterior para tener en cuenta la saturación.
- Plantear la ecuación que describe el comportamiento mecánico de la máquina al producirse perturbaciones en la red (ecuación de “swing”)

En forma complementaria, se describirán también las ecuaciones de la máquina en régimen subtransitorio balanceado, las cuáles (dado el período muy corto a partir de la perturbación en que son válidas) no son de aplicación estricta en la teoría clásica de la estabilidad transitoria, pero son de uso habitual en otros estudios clásicos (análisis de cortocircuitos) que involucran perturbaciones en sistemas de potencia.

El resultado final de esta presentación de la teoría de la máquina síncrona debe permitir, al menos, interpretar adecuadamente el conjunto de parámetros característicos de la máquina que definen su comportamiento en régimen y durante perturbaciones, y que son los datos de entrada para cualquier estudio de estabilidad.

En la Tabla que sigue se muestra un ejemplo típico de estos datos de entrada

DATOS DE GENERADORES		
ALSTHOM-UEMONT VG40-125	UNIDADES	
Estación		TERRA
Nro. de unidades		2
Voltaje Nominal	KV	13.8
Velocidad nominal	rpm	125
Grupo		3, 4
Tipo		HIDRAULICA
S Nominal	MVA	40
P Nominal	MW	38
Q maxima (para P= minima técnica)	MVAR	-38, +28
Ra (resistencia de armadura)	ohm	
Xd (reactancia síncrona directa)	pu	0.915
Xq (reactancia síncrona en cuadratura)	pu	0.567
X'd (reactancia transitoria directa)	pu	0.3
X'q (reactancia transitoria en cuadratura)	pu	
Xp (reactancia de Potier)	pu	
T'd (cte. de tiempo transitoria en el eje d)	seg.	1.48
T'q (cte. de tiempo transitoria en el eje q)	seg.	
T''d (cte. de tiempo subtransitoria en el eje d)	seg.	
T''q (cte. de tiempo subtransitoria en el eje q)	seg.	
T'do (cte. de tiempo transitoria en el eje d / circuito abierto)	seg.	4.5
T'qo (cte. de tiempo transitoria en el eje q / circuito abierto)	seg.	
X2 (reactancia de secuencia inversa)	pu	0.258
Xo (reactancia homopolar)	pu	0.108
X''d (reactancia subtransitoria directa)	pu	0.212
X''q (reactancia subtransitoria en cuadratura)	pu	0.313
T''qo (cte. de tiempo subtransitoria en el eje q / circuito abierto)	seg.	0.042
T''do (cte. de tiempo subtransitoria en el eje d / circuito abierto)	seg.	0.038
RCC (relación de corte-circuito)		1.3
Momento de inercia del ac generador	ton.m2	1510
Mínimo momento de inercia de la combinación turbina-ac generador	ton.m2	1567
H (cte. de inercia del ac generador)	KW.s/KVA	3.234
Constante de inercia de la combinación turbina-ac generador	KW.s/KVA	3.358
Zn (impedancia de puesta a tierra)	ohm	1150
Rf (resistencia del bobinado inductor)	ohm	0.333
Tipo de sistema de excitación		Estática
Arrollamiento amortiguador (si, no)		si
Potencia Mínima Técnica	MW	15
Potencia Máxima Técnica	MW	38
Fecha de información		8/95

Potencia Base (MVA) = 40

Ecuaciones básicas de circuitos magnéticos

Se usará la notación:

Φ : flujo magnético generado por una bobina

ψ : Número de enlaces de flujo de una bobina (flujo magnético enlazado por cada espira, multiplicado por el número de vueltas)

Bobina simple (Ver figura)

$$e_1 = d\psi/dt + r.i \quad \psi = L.i$$

L =coeficiente de autoinducción=número de enlaces de flujo por unidad de corriente= $N.(N.i.P) / i = N^2.P$

N =número de vueltas P =permeancia magnética= $\mu.S/l$ (inversa de la reluctancia)

μ =permeabilidad magnética del medio l, S =longitud, sección de la bobina

Circuitos acoplados (Ver figura)

$$e_1 = d\psi_1 /dt + r_1 .i_1 \quad e_2 = d\psi_2 /dt + r_2 .i_2$$

$$\psi_1 = N_1 (\Phi_{m1} + \Phi_{11}) + N_1 \Phi_{m2}$$

$$\psi_2 = N_2 (\Phi_{m2} + \Phi_{12}) + N_2 \Phi_{m1}$$

Φ_{mk} = flujo mutuo generado por la corriente i_k

Φ_{lk} = flujo de dispersión generado por la corriente i_k que enlaza sólo el devanado "k"

$$\psi_k = L_{kk}.i_k + L_{kj} .i_j$$

$L_{kk} = N_k (\Phi_{mk} + \Phi_{lk}) / i_k = L_{mk}+L_{lk}$ (inductancia de dispersión + inductancia magnetizante) = $N_k^2.(P+P_a)$

La identificación de la inductancia de dispersión facilita introducir coeficientes de saturación, que sólo son aplicables a las inductancias asociadas a los flujos que circulan por caminos de material ferromagnético.

$$L_{kj} = N_k. \Phi_{mj} / i_j = \text{coeficiente de inducción mutua} = N_1.N_2.P$$

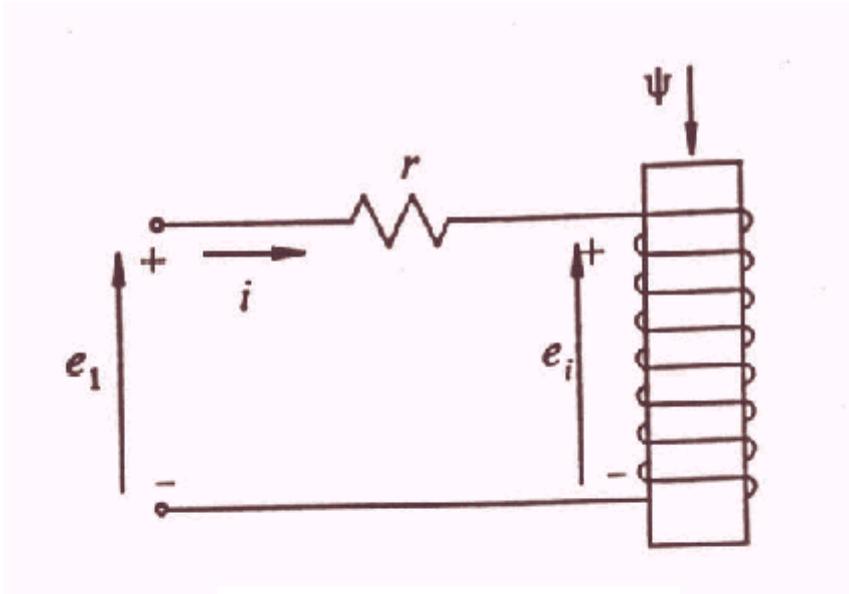
P = permeancia del camino del flujo mutuo

P_a = permeancia del aire

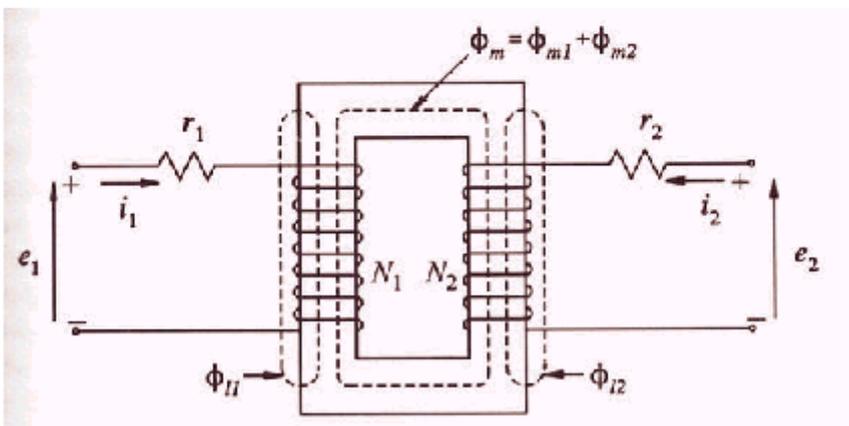
Los coeficientes de inducción mutua se asumen positivos cuando corrientes positivas en los devanados involucrados generan flujos propios y mutuos que se suman en cada bobina (depende de la orientación adoptada para las corrientes y del sentido físico de bobinado)

Comentarios:

A los efectos de la aplicación de estos conceptos al cálculo de los coeficientes de inducción de la máquina síncrona se desea resaltar, en particular, que los coeficientes de inducción son proporcionales a las permeancias del camino magnético. En particular (y dado que las reluctancias de caminos magnéticos compuestos por materiales diversos se agrupan como las resistencias de un circuito eléctrico): si el flujo magnético circula por un camino ferromagnético con “gaps” de aire en serie, la permeancia del circuito completo queda definida casi exclusivamente por la geometría de esos “gaps”



Circuito magnético con excitación eléctrica



Circuitos magnéticos acoplados

Esquema básico de la máquina síncrona

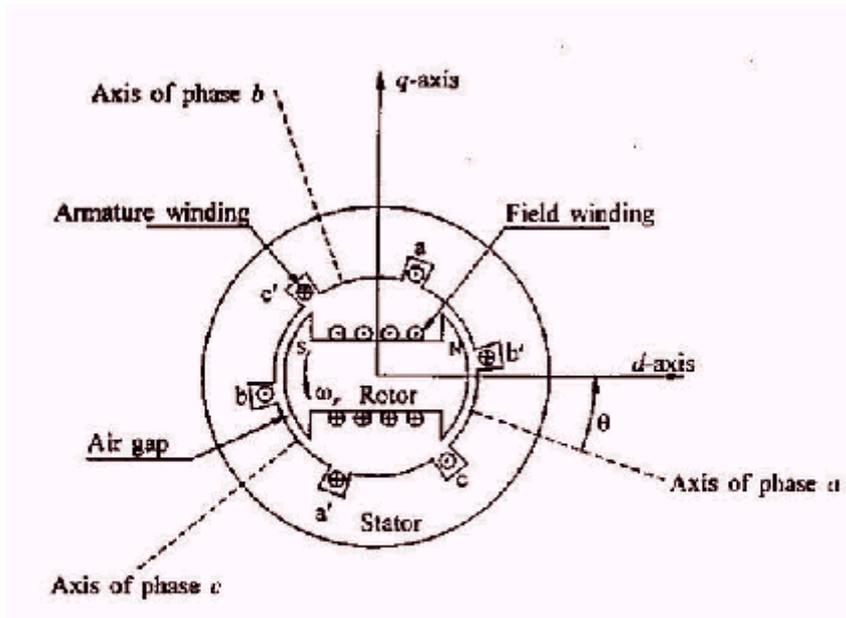


Diagrama esquemático de una máquina síncrona trifásica

El diagrama muestra un corte simplificado de una máquina síncrona de dos polos salientes (generador hidráulico), en que habitualmente el núcleo del rotor es de hierro laminado.

Los generadores térmicos suelen tener (por motivos de diseño mecánico asociados a la alta velocidad de giro) un rotor de forma cilíndrica (máquina de polos lisos) de hierro macizo.

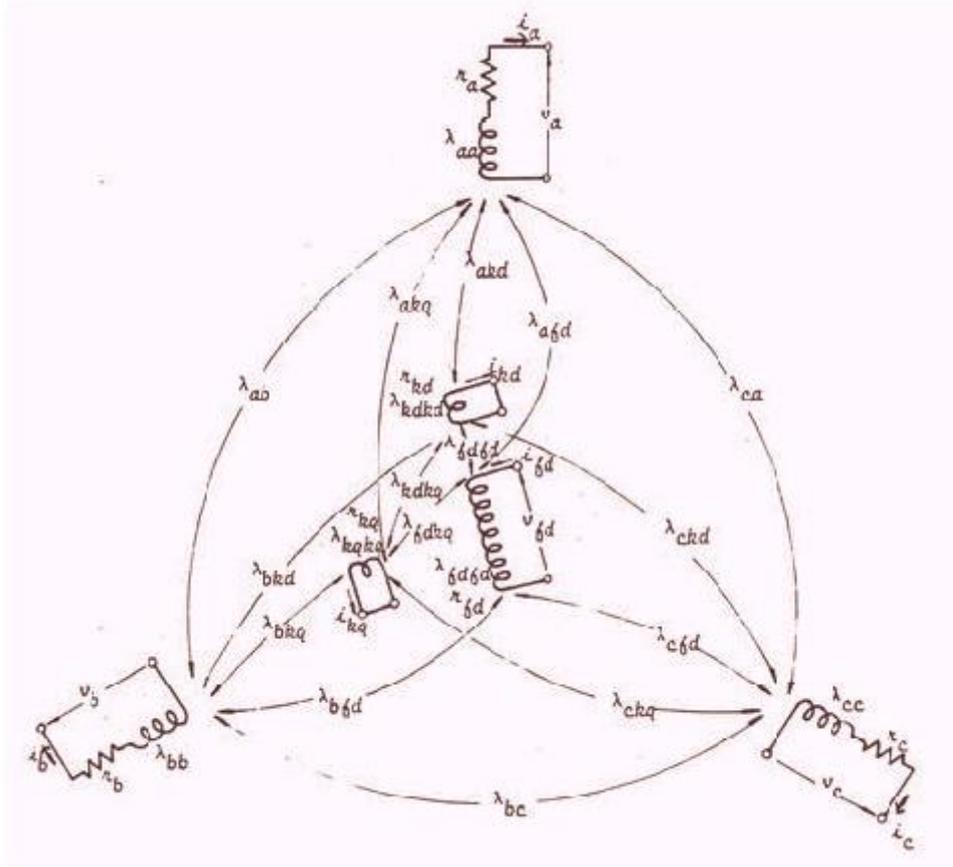
En el rotor se suelen incorporar devanados adicionales en cortocircuito (devanados amortiguadores) cuya función es amortiguar las oscilaciones del rotor durante perturbaciones o desequilibrios de carga. Estos devanados suelen ser del tipo “jaula de ardilla” (barras de cobre alojadas en las expansiones polares, cortocircuitadas por medio de anillos en sus extremos) en las máquinas de polos salientes. En las máquinas de polos lisos, estos devanados pueden existir (barras de cobre alojadas en las mismas ranuras que el devanado de campo) o no. Aun en los casos que no existen, la circulación de corrientes inducidas en los rotores macizos de polos lisos genera efectos equivalentes a los de los devanados de amortiguación (se habla de devanados amortiguadores “ficticios”).

El eje del devanado de campo es el denominado “eje directo” de la máquina, en tanto que el eje ortogonal al eje directo (orientado convencionalmente en la forma indicada en la figura) es el “eje en cuadratura” de la máquina.

Se hace notar que, incluso en las máquinas de rotor liso, la geometría de permeancias entre estator y rotor no es exactamente cilíndrica, debido al efecto de las ranuras en dónde se aloja el devanado de campo.

Modelo abstracto de la máquina síncrona

La máquina síncrona se puede modelar en forma abstracta como un conjunto de devanados (devanados del estator, devanado de campo, devanados amortiguadores) acoplados electromagnéticamente a través de caminos magnéticos parcialmente en aire y parcialmente por materiales ferromagnéticos (rotor, carcasa del estator).



Se observa que los devanados amortiguadores se representan convencionalmente por 2 devanados concentrados (uno en el eje directo, otro en el eje en cuadratura).

Se observa asimismo que las corrientes en los devanados del rotor se orientan convencionalmente “hacia adentro” y en los devanados del estator “hacia afuera” (de la máquina hacia la red).

La máquina se supondrá por ahora totalmente lineal, y es de esperar (dado que varias de las bobinas “ven” una geometría de entrehierros que va variando a medida que el rotor gira) que algunos de los coeficientes de inducción varíen en función del tiempo.

Coefficientes de inducción de la máquina síncrona

Se indica a continuación la forma general de los coeficientes de inducción propios y mutuos en juego:

a) Estator

$$\lambda_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos 2\theta$$

$$\lambda_{bb} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos 2(\theta - 120^\circ)$$

$$\lambda_{cc} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos 2(\theta + 120^\circ)$$

$$\lambda_{ab} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta + 30^\circ))$$

$$\lambda_{ac} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta + 150^\circ))$$

$$\lambda_{bc} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta - 90^\circ))$$

Comentarios:

-Es intuitivo que estos coeficientes tengan una variación periódica con el tiempo, y de período 180° , dado que la geometría de entrehierros (y, por lo tanto, la permeancia de los caminos de flujo) se repite con este período. Es razonable también imponer que los coeficientes nunca se anulen (independientemente de la posición del rotor, siempre hay flujos enlazados). Las expresiones explícitas indicadas pueden verse como los 2 primeros términos de los desarrollos de Fourier de estas funciones periódicas.

-Si se hace un desarrollo riguroso a partir de la geometría de la máquina, se puede ver que algunos de los coeficientes "L" están relacionados entre sí [Alvarez].

b) Rotor

$$\lambda_{fdfd} = L_{fdfd} \quad \lambda_{kdkd} = L_{kdkd} \quad \lambda_{kqkq} = L_{kqkq} \quad \lambda_{fdkq} = \lambda_{kdkq} = 0 \quad \lambda_{fdkd} = L_{fdkd}$$

Comentarios: Si consideramos los flujos creados por una de las bobinas del rotor y enlazados por otra, las permeancias involucradas no cambian con el tiempo (debido a la geometría cilíndrica del estator), de ahí que los coeficientes de inducción resulten constantes. Los coeficientes de inducción mutua entre devanados de eje directo y de eje en cuadratura son obviamente nulos (por ser bobinas a 90°)

c) Rotor-estator

$$\lambda_{afd} = L_{afd} \cdot \cos \theta$$

$$\lambda_{bfd} = L_{afd} \cdot \cos(\theta - 120^\circ)$$

$$\lambda_{cfd} = L_{afd} \cdot \cos(\theta + 120^\circ)$$

$$\lambda_{akd} = L_{akd} \cdot \cos \theta$$

$$\lambda_{bkd} = L_{akd} \cdot \cos(\theta - 120^\circ)$$

$$\lambda_{ckd} = L_{akd} \cdot \cos(\theta + 120^\circ)$$

$$\lambda_{akq} = -L_{akq} \cdot \sin\theta$$

$$\lambda_{bkq} = -L_{akq} \cdot \sin(\theta - 120^\circ)$$

$$\lambda_{ckq} = -L_{akq} \cdot \sin(\theta + 120^\circ)$$

Comentarios: Las expresiones obtenidas obedecen en este caso al clásico ejemplo de un imán girando en el centro de una bobina fija (la geometría de entrehierros “vista” por los flujos es constante, pero el campo magnético va cambiando su ángulo respecto a la bobina fija del estator; de ahí que se obtengan funciones periódicas de período 360°).

Caso de máquina con “p” pares de polos

Si la máquina tiene “p” pares de polos, las situaciones descritas se repiten toda vez que un nuevo par de polos ocupa en el espacio la posición del par de polos anterior (por ejemplo: si hay 2 pares de polos las geometrías de entrehierro que definen los caminos magnéticos estator-estator se repiten cada 90° en vez de cada 180°). Bastará, por lo tanto, con cambiar θ por $p\theta$ en las expresiones anteriores.

Esta sustitución se suele identificar de la siguiente forma: si θ_m es el ángulo “mecánico” de la máquina (el que identifica físicamente la posición del rotor), las relaciones tensión-corriente se expresan en función de un ángulo “eléctrico” θ (que, como se verá rigurosamente más adelante, es el que define la frecuencia de las tensiones generadas) cuya relación con el anterior es $\theta = p \cdot \theta_m$.

Derivando respecto al tiempo esta expresión, se obtiene la conocida relación entre frecuencia (f) y velocidad de la máquina (n): $f = p \cdot n$, en unidades coherentes.

Ecuaciones de estado instantáneas en coordenadas de fase

Para cada uno de los 6 devanados:

$$v = r \cdot i + d\psi/dt$$

$\psi_j = -\lambda_{ja} \cdot i_a - \lambda_{jb} \cdot i_b - \lambda_{jc} \cdot i_c + \lambda_{jfd} \cdot i_{fd} + \lambda_{jkd} \cdot i_{kd} + \lambda_{jkq} \cdot i_{kq}$, con $j = a, b, c, fd, kd, kq$
 (los signos de "-" se deben a la orientación adoptada para las corrientes de estator)

En notación matricial:

$$v^s = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad v^r = \begin{bmatrix} v_{fd} \\ v_{kd} \\ v_{kq} \end{bmatrix} \quad (\text{con } v_{kd} = v_{kq} = 0) \quad v = \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

(vectores columnas de tensiones del estator, del rotor y de toda la máquina)

$$i^s = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad i^r = \begin{bmatrix} -i_{fd} \\ -i_{kd} \\ -i_{kq} \end{bmatrix} \quad (\text{observar convención de signos!!}) \quad i = \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$\psi^s = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad \psi^r = \begin{bmatrix} \psi_{fd} \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix} \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix}$$

Se supone: $r_s = r_a = r_b = r_c \quad R^s = r_s U_3 \quad (U_3: \text{matriz identidad de orden 3})$

$$R^r = \begin{bmatrix} r_{fd} & & \\ & r_{kd} & \\ & & r_{kq} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R^s & \\ & R^r \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_{aa} & \lambda_{ab} & \lambda_{ac} & \lambda_{afd} & \lambda_{akd} & \lambda_{akq} \\ \lambda_{ba} & \lambda_{bb} & \lambda_{bc} & \lambda_{bfd} & \lambda_{bkd} & \lambda_{bkq} \\ \lambda_{ca} & \lambda_{cb} & \lambda_{cc} & \lambda_{cfd} & \lambda_{ckd} & \lambda_{ckq} \\ \lambda_{fda} & \lambda_{fdb} & \lambda_{fdc} & \lambda_{fdfd} & \lambda_{fdkd} & 0 \\ \lambda_{kda} & \lambda_{kdb} & \lambda_{kdc} & \lambda_{kdfd} & \lambda_{kdkd} & 0 \\ \lambda_{kqa} & \lambda_{kqb} & \lambda_{kqc} & 0 & 0 & \lambda_{kqkq} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{array}{|cc|} \hline L^{ss} & L^{sr} \\ \hline L^{rs} & L^{rr} \\ \hline \end{array}$$

Con esta notación las ecuaciones de estado en coordenadas de fase resultan:

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt} \psi - \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}$$

$$\psi = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{i}$$

Las ecuaciones diferenciales así planteadas son difíciles de resolver debido a:

- a) 27 de los coeficientes de la matriz \mathbf{L} son dependientes del tiempo (no todos distintos, debido a la simetría de los coeficientes de inducción mutua)
- b) El sistema es fuertemente acoplado (sólo 4 coeficientes de \mathbf{L} nulos)

Estas dificultades motivan la introducción de una transformación matemática que permita simplificar las ecuaciones.

Observar que para resolver la dificultad b) bastaría con transformar las ecuaciones de forma tal que la matriz \mathbf{L} (una matriz simétrica) resulte diagonal. Dado que esto se puede hacer de infinitas formas, se intenta elegir una de esas transformaciones que, simultáneamente, resuelva la dificultad a).

La transformación elegida no permite resolver ambas dificultades en forma “perfecta” (observar que al diagonalizar \mathbf{L} se corre el riesgo de transformar los coeficientes de inducción constantes de \mathbf{L}^{rr} en funciones del tiempo), pero permite resolver completamente a) y simultáneamente resolver razonablemente b).

Transformada de Park

La transformación elegida "T" deja invariantes las variables de rotor y diagonaliza la matriz de inductancias L^{ss} .

$$T = \begin{bmatrix} t_p & & \\ & & \\ & & U_3 \end{bmatrix}$$

$$t_p = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-120) & \cos(\theta+120) \\ -\text{sen}\theta & -\text{sen}(\theta-120) & -\text{sen}(\theta+120) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$t_p^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 1 \\ \cos(\theta-120) & -\text{sen}(\theta-120) & 1 \\ \cos(\theta+120) & -\text{sen}(\theta+120) & 1 \end{bmatrix}$$

Comentarios: t_p es una matriz ortogonal (el producto escalar de 2 filas distintas cualesquiera es nulo), pero no unitaria ($t_p \cdot t_p^t \neq U_3$).

Notación:

$$t_p \cdot v^s = v_p^s = \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} \quad t_p \cdot i^s = i_p^s = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad t_p \cdot \psi^s = \psi_p^s = \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix}$$

Comentario

La notación utilizada se debe a que si m_a m_b m_c es una terna de vectores colineal con los ejes de los devanados del estator resulta:

$m_d = 2/3 \cdot (m_a \cdot \cos \theta + m_b \cdot \cos(\theta-120) + m_c \cdot \cos(\theta+120))$ (suma de proyecciones en eje "d")

$m_q = -2/3 \cdot (m_a \cdot \text{sen} \theta + m_b \cdot \text{sen}(\theta-120) + m_c \cdot \text{sen}(\theta+120))$ (suma de proyecciones en eje "q")

$m_0 = 1/3(m_a + m_b + m_c)$ (componente homopolar).

$$v_p = \begin{bmatrix} v_{sp} \\ v_r \end{bmatrix} \quad i_p = \begin{bmatrix} i_{sp} \\ i_r \end{bmatrix} \quad \psi_p = \begin{bmatrix} \psi_{sp} \\ \psi_r \end{bmatrix}$$

Desarrollo de las ecuaciones

Multiplicando a la izquierda por T en las ecuaciones en coordenadas de fase:

$$v_p = T \cdot d/dt (T^{-1} \psi_p) - (T \cdot R \cdot T^{-1}) i_p$$

$$\psi_p = -(T \cdot L \cdot T^{-1}) i_p$$

Usamos la notación: $L_p = T \cdot L \cdot T^{-1}$ $R_p = T \cdot R \cdot T^{-1} = R$ (en general: la transformada de Park no modifica matrices diagonales cuyos elementos diagonales son todos iguales)

Desarrollando el primer término de la primera ecuación:

$$T \cdot d/dt (T^{-1} \psi_p) = T \cdot d/d\theta (T^{-1}) \psi_p \cdot d\theta/dt + d\psi_p/dt$$

$$\text{Usamos la notación: } G = T \cdot d/d\theta (T^{-1}) \quad w = d\theta/dt \quad g_p = t_p \cdot d/d\theta (t_p^{-1})$$

$$G = \begin{bmatrix} g_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_p = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de estado en coordenadas de Park

Con las notaciones adoptadas, las ecuaciones de la máquina en coordenadas de Park se escriben de la siguiente forma compacta:

$$v_p = d/dt \psi_p + w \cdot G \psi_p - R \cdot i_p$$

$$\psi_p = -L_p \cdot i_p$$

$$L_p = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{afd} & L_{akd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{akq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 \cdot L_{afd} & 0 & 0 & L_{fdfd} & L_{fdkd} & 0 \\ 3/2 \cdot L_{akd} & 0 & 0 & L_{fdkd} & L_{kdkd} & 0 \\ 0 & 3/2 \cdot L_{akq} & 0 & 0 & 0 & L_{kqkq} \end{bmatrix}$$

Comentarios

-Más adelante se indica cómo quedan las ecuaciones de Park si uno sustituye los flujos de la segunda ecuación en la primera (se obtienen, por lo tanto, relaciones tensión-corriente). La formulación a través de los flujos en la forma aquí indicada es más útil para introducir la saturación en la teoría y para establecer condiciones de continuidad antes y después de una perturbación.

-Observar que si se supone $w = \text{constante}$, el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido es de coeficientes constantes. Se asume esta hipótesis en el desarrollo posterior del modelo.

Propiedades de la matriz L_p :

- a) Ninguno de sus elementos depende del tiempo (por lo tanto: si uno asume la aproximación de que w es constante, las ecuaciones de Park son de coeficientes constantes)
- b) Es mucho más esparsa que la matriz original
- c) A diferencia de la matriz original, no es simétrica (consecuencia de que t_p no se eligió unitaria)

Interpretación física de la transformada de Park:

La transformada de Park “sustituye” los devanados del estator por 3 devanados ficticios (d, q, 0) con las siguientes características:

a) La relación flujo- corriente para el devanado “d” está dada por: $\psi_d = -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd}$, lo cual nos dice que el devanado “d” está “montado” sobre el rotor (dado que los coeficientes de inducción propia y mutua no dependen del tiempo), y con su eje sobre el eje directo (dado que interactúa con los 2 restantes devanados del eje directo, y con ninguno del eje en cuadratura)

b) En forma análoga: el devanado “q” está “montado” sobre el eje en cuadratura del rotor.

c) La relación flujo-corriente para el devanado “0” está dada por $\psi_0 = -L_0 \cdot i_0$, por lo que el devanado “0” debe verse como un devanado ficticio ortogonal al plano d-q (no interactúa con ninguno de los otros devanados).

Si uno realiza el cálculo riguroso de los coeficientes de inducción (cosa que no hemos hecho), se puede verificar que L_0 no es más que la inductancia de dispersión “ L_l ” de los devanados del estator, resultado que es intuitivamente compatible con la idea de que el devanado “0” no interactúa con ninguno de los devanados del rotor.

La idea de “sustituir” los devanados del estator por devanados en el rotor es análoga a la que se usa en el análisis de transformadores, cuando las reactancias de cortocircuito del primario se refieren al lado secundario. En nuestro caso hay que tener en cuenta adicionalmente que estamos sustituyendo devanados fijos por devanados giratorios, y el “precio” de esta sustitución es introducir en las ecuaciones tensión-flujo el término $w \cdot G \psi_p$ (la llamada “tensión de velocidad”). Este término es el único “discordante” en las ecuaciones de Park: si no fuera por él las ecuaciones de la máquina en el dominio de Park serían las asociadas a 6 bobinas estáticas interactuando electromagnéticamente.

Comentarios adicionales

1) Si uno quiere introducir los efectos de saturación en la máquina síncrona, es necesario discriminar en cada uno de los coeficientes de autoinducción λ_{jj} asociados al estator el término correspondiente a los flujos de dispersión (aquellos que no enlazan a otros devanados), dado que éstos circulan por caminos de aire (no saturables).

Identificando estos términos, los coeficientes de autoinducción se escriben como $\lambda_{jj} = \lambda'_{jj} + \lambda_l$ siendo λ'_{jj} el término asociado a los flujos que enlazan otros devanados (inductancia saturable, dado que circula por caminos que involucran al hierro del estator o del rotor), y λ_l el término de dispersión. Si el término de dispersión se supone constante (no dependiente de la posición del rotor) e igual en los tres devanados de estator, la transformada de Park lo transforma en el mismo término constante; y las inductancias L_d y L_q en el dominio de Park se pueden escribir como:

$$L_d = L_{ad} + L_l \text{ (inductancia saturable + inductancia de dispersión)}$$

$$L_q = L_{aq} + L_l$$

$$\text{con } L_l = \lambda_l$$

2) Mediante una adecuada selección de valores base (tensión y corriente) en el estator y en cada uno de los devanados del rotor (un total de 8 valores base a escoger) es posible conseguir:

a) Que la matriz de inductancias de Park sea simétrica (3 condiciones).

Esto se consigue mediante el siguiente procedimiento [Kundur, pág.79]:

$$\psi_d = -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd}$$

Dividiendo por $L_b \cdot i_b$, (valores base de estator) e identificando los valores p.u con un * :

$$\psi_d^* = -L_d^* \cdot i_d^* + (L_{afd} \cdot i_{fd}) / (L_b \cdot i_b) + (L_{akd} \cdot i_{kd}) / (L_b \cdot i_b) = -L_d^* \cdot i_d^* + L_{afd}^* \cdot i_{fd}^* + L_{akd}^* \cdot i_{kd}^*$$

En que (por definición) $L_{afd}^* = (L_{afd} \cdot i_{fdb}) / (L_b \cdot i_b)$, siendo i_{fdb} la corriente base del devanado de campo, y en forma análoga: $L_{akd}^* = (L_{akd} \cdot i_{kdb}) / (L_b \cdot i_b)$.

$$\psi_{fd} = -3/2 \cdot L_{afd} \cdot i_d + L_{fdfd} \cdot i_{fd} + L_{fdkd} \cdot i_{kd}$$

Dividiendo por $L_{fdb} \cdot i_{fdb}$, (valores base de rotor) e identificando los valores p.u con un *:

$$\psi_{fd}^* = -3/2 \cdot (L_{afd} \cdot i_d) / (L_{fdb} \cdot i_{fdb}) + L_{fdfd}^* \cdot i_{fd}^* + (L_{fdkd} \cdot i_{kd}) / (L_{fdb} \cdot i_{fdb}) = -L_{fda}^* \cdot i_d^* + L_{fdfd}^* \cdot i_{fd}^* + L_{fdkd}^* \cdot i_{kd}^*$$

En que (por definición) $L_{fda}^* = 3/2 \cdot (L_{afd} \cdot i_b) / (L_{fdb} \cdot i_{fdb})$, siendo L_{fdb} la inductancia base del devanado de campo En forma análoga $L_{fdkd}^* = (L_{fdkd} \cdot i_{kdb}) / (L_{fdb} \cdot i_{fdb})$

Para que $L_{afd}^* = L_{fda}^*$ debe cumplirse: $L_{fdb} \cdot i_{fdb}^2 = 3/2 \cdot L_b \cdot i_b^2$, y multiplicando a ambos lados por w_0 : $e_{fdb} \cdot i_{fdb} = 3/2 \cdot e_b \cdot i_b$, siendo e_{fdb} y e_b las correspondientes tensiones base. Como habitualmente se eligen como corriente/tensión base en el estator los valores nominales de pico fase-tierra, la relación anterior impone: $P_{fdb} = S_n$, siendo P_{fdb} la

potencia base en el devanado de campo, y S_n la potencia aparente nominal trifásica de la máquina.

En forma análoga: las otras 2 condiciones de simetría (para L_{akd} y L_{akq}) imponen que las potencias base en los 2 devanados amortiguadores sean también iguales a S_n .

b) Que todas las inductancias mutuas estator-rotor en el eje directo sean iguales e iguales a L_{ad} (2 condiciones)

Estas condiciones se obtienen a partir de los desarrollos anteriores:

$$L_{afd}^* = (L_{afd} \cdot i_{fdb}) / (L_b \cdot i_b) = L_{ad}^* = L_{ad} / L_b, \text{ de donde debe imponerse } i_{fdb} = i_b \cdot L_{ad} / L_{afd}$$

En forma análoga: $i_{kdb} = i_b \cdot L_{ad} / L_{akd}$

c) Que todas las inductancias mutuas estator-rotor en el eje en cuadratura sean iguales e iguales a L_{aq} (1 condición)

El desarrollo es análogo al del eje directo, obteniéndose: $i_{kqb} = i_b \cdot L_{aq} / L_{akq}$

3) Es habitual suponer, asimismo, $L_{fdkd} \cong L_{ad}$ (en p.u) (físicamente: el devanado amortiguador de eje directo está muy cerca del estator, por lo que el flujo generado por el devanado de campo que enlaza a este devanado amortiguador es casi el mismo que enlaza al estator)

4) Con estas simplificaciones, la matriz de inductancias de Park se escribe en p.u de la siguiente forma (muy habitual en la literatura):

$$L_p = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{ad} & L_{ad} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{aq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{ad} & 0 & 0 & L_{fdfd} & L_{ad} & 0 \\ L_{ad} & 0 & 0 & L_{ad} & L_{kdkd} & 0 \\ 0 & L_{aq} & 0 & 0 & 0 & L_{kqkq} \end{bmatrix}$$

Comentario: La motivación para obtener una matriz de inductancias simétricas pasa por poder obtener circuitos equivalentes (en los circuitos “físicos” las inductancias mutuas son siempre simétricas)

Ecuaciones en coordenadas de Park desarrolladas

$$v_d = d\psi_d/dt - w.\psi_q - r_s.i_d$$

$$v_q = d\psi_q/dt + w.\psi_d - r_s.i_q$$

$$v_0 = d\psi_0/dt - r_s.i_0$$

$$v_{fd} = d\psi_{fd}/dt + r_{fd}.i_{fd}$$

$$0 = d\psi_{kd}/dt + r_{kd}.i_{kd}$$

$$0 = d\psi_{kq}/dt + r_{kq}.i_{kq}$$

$$\psi_d = -L_d.i_d + L_{afd}.i_{fd} + L_{akd}.i_{kd}$$

$$\psi_q = -L_q.i_q + L_{akq}.i_{kq}$$

$$\psi_0 = -L_0.i_0$$

$$\psi_{fd} = -3/2.L_{afd}.i_d + L_{fdfd}.i_{fd} + L_{fdkd}.i_{kd}$$

$$\psi_{kd} = -3/2.L_{akd}.i_d + L_{fdkd}.i_{fd} + L_{kdkd}.i_{kd}$$

$$\psi_{kq} = -3/2.L_{akq}.i_q + L_{kqkq}.i_{kq}$$

Alternativamente (eliminando los flujos):

$$v_d = -L_d di_d/dt + L_{afd}.di_{fd}/dt + L_{akd}.di_{kd}/dt - r_s.i_d + w.L_q.i_q - w.L_{akq}.i_{kq}$$

$$v_q = -L_q di_q/dt + L_{akq}.di_{kq}/dt - r_s.i_q - w.L_d.i_d + w.L_{afd}.i_{fd} + w.L_{akd}.i_{kd}$$

$$v_0 = -L_0 di_0/dt - r_s.i_0$$

$$v_{fd} = -3/2.L_{afd} di_d/dt + L_{fdfd}.di_{fd}/dt + L_{fdkd}.di_{kd}/dt + r_{fd}.i_{fd}$$

$$0 = -3/2.L_{akd} di_d/dt + L_{fdkd}.di_{fd}/dt + L_{kdkd}.di_{kd}/dt + r_{kd}.i_{kd}$$

$$0 = -3/2.L_{akq} di_q/dt + L_{kqkq}.di_{kq}/dt + r_{kq}.i_{kq}$$

A partir de estas ecuaciones se analizarán diversos casos de funcionamiento de la máquina mediante el siguiente procedimiento “standard”:

- Las condiciones de borde del problema (tensiones o corrientes intercambiadas con el sistema) se transforman al dominio de Park
- Se resuelven las ecuaciones de Park
- Mediante la transformada inversa de Park se obtiene la solución en coordenadas de fase,

Potencia entregada en coordenadas de Park

$$P_{3f} = v_a.i_a + v_b.i_b + v_c.i_c = (v^s)^t . i^s = (t_p^{-1} . (v^s_p))^t . t_p^{-1} . i_p^s$$

$$P_{3f} = 3/2.v_d.i_d + 3/2.v_q.i_q + 3v_0.i_0$$

Por lo tanto: la potencia no es invariante por la transformada de Park.

Comentario: El cálculo hecho es de potencia trifásica instantánea.

Recordar que la potencia activa es (por definición) el valor medio de esta potencia en un ciclo, y que si el sistema es trifásico equilibrado la potencia trifásica instantánea es constante, y coincide con la potencia activa .

(Por supuesto que esto no es cierto si se analiza en cada fase, apareciendo el concepto de potencia reactiva por fase.)

Régimen estacionario balanceado

A) Máquina en vacío

1) Condiciones de borde:

$$i^s = i_p^s = [0], \quad v_{fd} = V_{fd} = \text{constante}$$

2) Aplicación de las ecuaciones de Park:

Imponiendo condiciones de régimen en los devanados del rotor ($d\psi_{fd}/dt = d\psi_{kd}/dt =$

$d\psi_{kq}/dt = 0$) :se cumple:

$$V_{fd} = r_{fd} \cdot i_{fd}$$

$$i_{kd} = i_{kq} = 0$$

Ecuaciones del estator en coordenadas de Park:

$$v_q = w \cdot L_{afd} \cdot i_{fd} = w \cdot L_{afd} \cdot V_{fd}/r_{fd}$$

$$v_d = v_0 = 0$$

3) Aplicando transformada inversa de Park:

$$v^s = t p^{-1} \cdot v_p^s \Rightarrow$$

$$v_a = -\text{sen}\theta \cdot w \cdot L_{afd} \cdot V_{fd}/r_{fd}$$

$$v_b = -\text{sen}(\theta - 120) \cdot w \cdot L_{afd} \cdot V_{fd}/r_{fd}$$

$$v_c = -\text{sen}(\theta + 120) \cdot w \cdot L_{afd} \cdot V_{fd}/r_{fd}$$

en que $\theta = w \cdot t + \theta(0)$, y se supone $\theta(0) = 0$

4) A efectos de facilitar el análisis de sistemas con muchas máquinas, habitualmente se prefiere referir los ángulos respecto a una máquina común de referencia, girando a velocidad síncrona (ver figura):

$\theta = w_0 \cdot t + \delta - 90$ (δ : ángulo del eje en cuadratura respecto al eje de referencia sincrónico, $w = w_0$ en régimen).

Resulta:

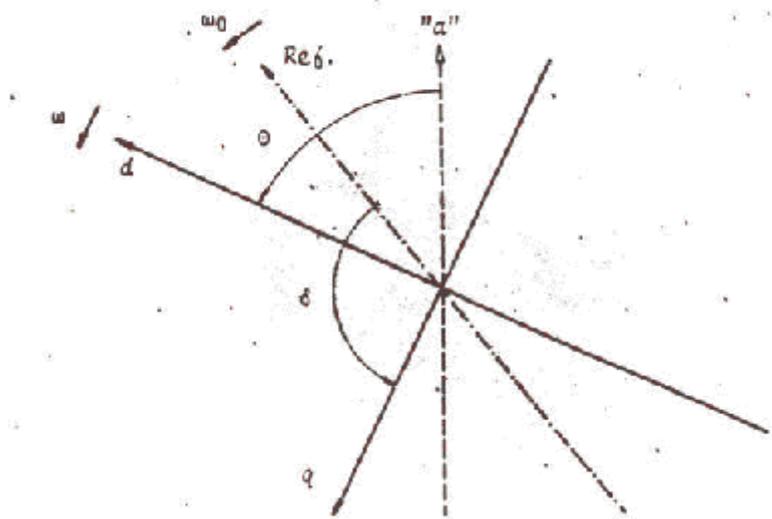
$$v_a = \sqrt{2} \cdot E_I \cdot \cos(w \cdot t + \delta)$$

$$v_b = \sqrt{2} \cdot E_I \cdot \cos(w \cdot t + \delta - 120)$$

$$v_c = \sqrt{2} \cdot E_I \cdot \cos(w \cdot t + \delta + 120)$$

con $E_I = 1/\sqrt{2} \cdot w \cdot L_{afd} \cdot i_{fd}$ (la llamada “tensión proporcional a la corriente de campo”)

El resultado final es que la máquina genera en vacío una terna de fasores de tensión de secuencia positiva, con módulo proporcional a la corriente de campo y fase igual a un ángulo δ que también identifica la posición física del rotor.



B) Máquina en carga

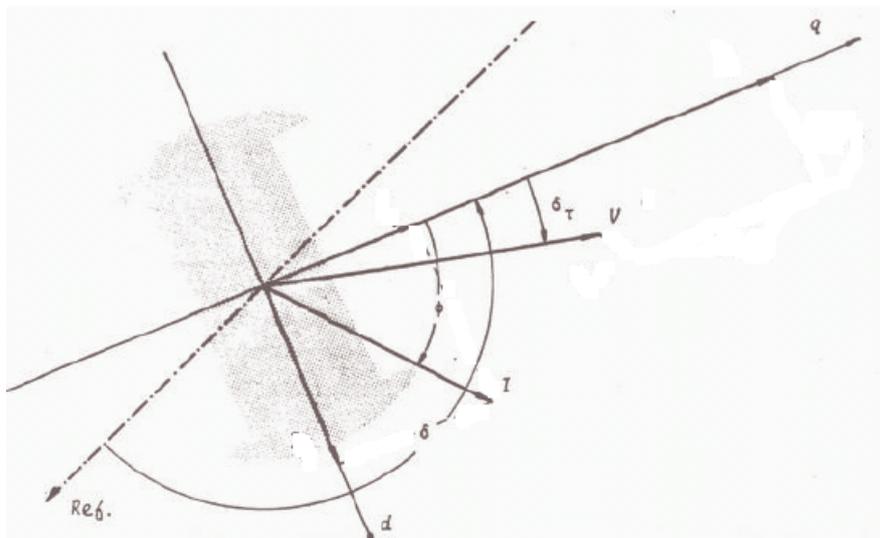
1) Condiciones de borde:

$$i_a = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega t + \delta + \Phi)$$

$$i_b = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega t + \delta - 120 + \Phi)$$

$$i_c = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega t + \delta + 120 + \Phi)$$

Se impone que las corrientes inyectadas al sistema formen una terna de fasores de secuencia positiva, cuya fase respecto al eje sincrónico es $\delta + \Phi$ (Φ es el ángulo del fasor corriente respecto al eje q, ver figura).



En notación fasorial, para la fase a: $I = I_1 \cdot e^{j(\delta + \Phi)}$ (fasor corriente eficaz de la fase "a")

2) Aplicación de las ecuaciones de Park:

Aplicando transformada de Park:

$$i_d = -\sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin \Phi \quad i_q = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos \Phi \quad i_0 = 0$$

Comentario:

Observamos que en este caso las variables transformadas son constantes (no dependen del tiempo)..

Más en general: sea ω la frecuencia asociada a la transformada de Park.

Es fácil ver que la transformada de Park transforma ternas de secuencia positiva de cosenoides de frecuencia ω' en ternas de cosenoides de frecuencia $(\omega - \omega')$.

En particular: si $\omega = \omega'$ se obtienen constantes, y si $\omega' = 0$ se obtienen cosenoides de frecuencia ω .

Teniendo en cuenta que : $di_d/dt = di_q/dt = 0 \quad i_{kd} = i_{kq} = 0$

$$V_{fd} = r_{fd} \cdot i_{fd}$$

$$v_d = -r_s \cdot i_d + x_q \cdot i_q$$

$$v_q = -r_s \cdot i_q - x_d \cdot i_d + \omega \cdot L_{afd} \cdot i_{fd} = -r_s \cdot i_q - x_d \cdot i_d + \sqrt{2} \cdot E_f$$

$$v_0 = 0$$

y sustituyendo i_d, i_q con las expresiones vistas, obtendríamos la solución del problema en coordenadas de Park .

Asumiendo $\omega = \text{constante}$, se definen:

$$x_d = \omega \cdot L_d \quad (\text{reactancia sincrónica de eje directo})$$

$$x_q = \omega \cdot L_q \quad (\text{reactancia sincrónica de eje en cuadratura})$$

3) Aplicando transformada inversa de Park:

$$v_a = v_d \cdot \cos \theta - v_q \cdot \sin \theta$$

$$v_b = v_d \cdot \cos (\theta - 120) - v_q \cdot \sin (\theta - 120)$$

$$v_c = v_d \cdot \cos (\theta + 120) - v_q \cdot \sin (\theta + 120)$$

$$\theta = \omega t + \delta - 90$$

lo cuál muestra (como era de esperar) que también las tensiones forman un sistema balanceado de secuencia positiva

Métodos fasoriales

Dado que todo es balanceado, pasamos a trabajar sólo con la fase "a":

$$v_a = v_d \cdot \sin (\omega t + \delta) + v_q \cdot \cos (\omega t + \delta)$$

En forma fasorial:

$$v_a = \sqrt{2} \cdot V_1 \cos (\omega t + \delta + \delta_\tau) = \text{Re}(\sqrt{2} \cdot V_1 \cdot e^{j(\delta + \delta_\tau)} \cdot e^{j\omega t})$$

$$i_a = \sqrt{2} \cdot I_1 \cos (\omega t + \delta + \Phi) = \text{Re}(\sqrt{2} \cdot I_1 \cdot e^{j(\delta + \Phi)} \cdot e^{j\omega t})$$

siendo

$$\sqrt{2} \cdot V_1 = (v_d^2 + v_q^2)^{1/2} \quad \text{tg} \delta_\tau = -v_d/v_q$$

$$\sqrt{2} \cdot I_1 = (i_d^2 + i_q^2)^{1/2} \quad \text{tg} \Phi = -i_d/i_q$$

$$\begin{aligned} v_d &= -\sqrt{2} \cdot V_1 \cdot \text{sen} \delta_\tau & v_q &= \sqrt{2} \cdot V_1 \cdot \text{cos} \delta_\tau \\ i_d &= -\sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \text{sen} \Phi & i_q &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \text{cos} \Phi \text{ (relaciones ya obtenidas más arriba)} \end{aligned}$$

Se definen los siguientes fasores:

$$V = V_1 \cdot e^{j(\delta + \delta_\tau)} \text{ (fador voltaje eficaz de la fase "a")}$$

Fasor $E_I = E_1 \cdot e^{j\delta}$ (fador de tensión proporcional a la corriente de campo). Este fador está sobre el eje "q", y lo llamaremos también E_I cuando no de lugar a confundirlo con su módulo.

$$\begin{aligned} I_q &= i_q/\sqrt{2} \cdot e^{j\delta}, \text{ que es un fador sobre el eje q} \\ I_d &= i_d/\sqrt{2} \cdot e^{j(\delta-90)} = -j \cdot i_d/\sqrt{2} \cdot e^{j\delta}, \text{ que es un fador sobre el eje d.} \end{aligned}$$

Se observa la siguiente relación fasorial:

$$I_q + I_d = 1/\sqrt{2} \cdot (i_q - j \cdot i_d) e^{j\delta} = 1/\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \text{cos} \Phi + j \cdot \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \text{sen} \Phi) e^{j\delta} = I_1 \cdot e^{j(\delta + \Phi)} = I$$

por lo que los fasores I_d e I_q no son más que las proyecciones de I sobre los ejes d y q.

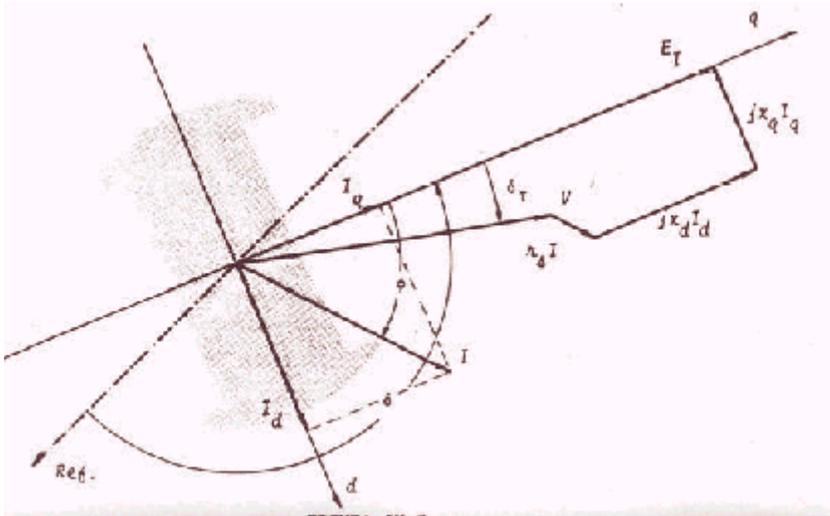
$$\text{En forma análoga: } V = 1/\sqrt{2} \cdot (v_q - j \cdot v_d) e^{j\delta}$$

En base a estas relaciones, interpretamos las ecuaciones de Park en términos fasoriales:

$$\begin{aligned} v_d &= -r_s \cdot i_d + x_q \cdot i_q \\ v_q &= -r_s \cdot i_q - x_d \cdot i_d + \sqrt{2} \cdot E_I \Rightarrow \\ v_q - j \cdot v_d &= -r_s \cdot (i_q - j \cdot i_d) - x_d \cdot i_d - j \cdot x_q \cdot i_q + \sqrt{2} \cdot E_I \Rightarrow \\ (v_q - j \cdot v_d) e^{j\delta} &= -r_s \cdot (i_q - j \cdot i_d) e^{j\delta} - x_d \cdot i_d e^{j\delta} - j \cdot x_q \cdot i_q e^{j\delta} + \sqrt{2} \cdot E_I e^{j\delta} \Rightarrow \\ V &= -r_s \cdot I - j \cdot x_d \cdot I_d - j \cdot x_q \cdot I_q + E_I \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E_I = V + r_s \cdot I + j \cdot x_d \cdot I_d + j \cdot x_q \cdot I_q .$$

En condiciones de régimen i_{fd} es constante, por lo que E_I puede verse como la "fem" interna de la máquina. Observar asimismo que es un fador sobre el eje "q".



(En esta figura δ_τ y Φ son negativos)

La desventaja de esta representación fasorial es que aparecen I_d e I_q , fasores que no se pueden “enganchar” directamente con la red externa, sino a través de la transformada inversa de Park. Para subsanar en parte este problema se manipulan algebraicamente las ecuaciones de la siguiente forma:

$$E_I = V + r_s \cdot I + j \cdot x_d \cdot I_d + j \cdot x_q \cdot I_q = V + r_s \cdot I + j \cdot x_q \cdot I + j \cdot (x_d - x_q) \cdot I_d \Rightarrow$$

$$E_I - j \cdot (x_d - x_q) \cdot I_d = V + r_s \cdot I + j \cdot x_q \cdot I$$

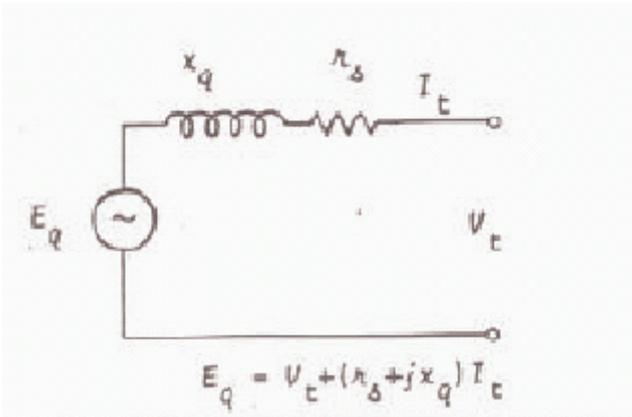
Se define:

$E_q = E_I - j \cdot (x_d - x_q) \cdot I_d$ (Tensión atrás de la reactancia sincrónica de eje en cuadratura, fador sobre el eje "q") \Rightarrow

$$E_q = V + r_s \cdot I + j \cdot x_q \cdot I$$

Esta representación clásica de la máquina como una fem E_q atrás de la reactancia sincrónica en cuadratura no es totalmente exacta, ya que E_q no es, por su definición, una fuente de tensión ideal (su valor depende de I_d).

Para el caso particular de la máquina de rotor liso es $x_d = x_q \Rightarrow E_q = E_I$, la ecuación fasorial es $E_I = V + (r_s + j \cdot x_d) \cdot I$, y la representación sí es exacta.



Circuito equivalente para la máquina de polos salientes

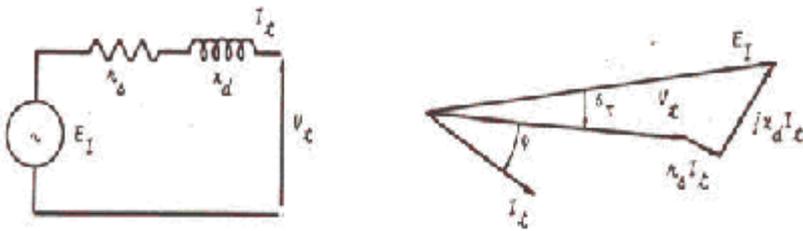


Diagrama fasorial y circuito equivalente para la máquina de polos lisos

Régimen transitorio balanceado aproximado

Se adoptan las siguientes hipótesis simplificatorias:

- 1) No se consideran los arrollamientos amortiguadores
- 2) A los efectos de cálculo de reactancias y de los cálculos fasoriales se considera $w = \text{constante} = w$ de régimen
- 3) Se asume $d\psi_d/dt \cong 0$ $d\psi_q/dt \cong 0$

Comentarios sobre las hipótesis simplificatorias:

a) Los arrollamientos amortiguadores tienen transitorios con constantes de tiempo del orden de unos pocos (típicamente: 2 o 3) ciclos, por lo que despreciar los arrollamientos amortiguadores equivale a “mirar” la máquina una vez transcurrido ese transitorio inicial. Esta hipótesis es aceptable para los estudios clásicos de estabilidad transitoria (con intervalos de tiempo de estudio de hasta 10 segundos), no lo es para otros tipos de estudio, como ser el cálculo de cortocircuitos, en que el valor de pico de la corriente aparece en esos ciclos iniciales. Más adelante se verá como se modifica la teoría si se levanta esta hipótesis (régimen subtransitorio)

b) Asumir las derivadas de los flujos nulas no equivale a suponer los flujos constantes en todo el estudio, sino a suponer que, una vez producida la perturbación que motiva el estudio, las variaciones de los flujos son sumamente rápidas

Esta hipótesis es más bien discutible (la constante de tiempo de los flujos puede llegar hasta a unos 20 ciclos [Kundur, pág. 161] , y más bien se suele adoptar esta hipótesis debido a que si consideráramos estas derivadas no nulas sería necesario (a efectos de tener un modelo coherente, dado que los flujos terminales de la máquina se “enganchan” con la red de transmisión externa) considerar en el modelo también los transitorios de la red de transmisión . y no sólo las ecuaciones algebraicas de la red en régimen.

Se ha verificado empíricamente, asimismo, que levantar esta hipótesis no altera sustancialmente los resultados de los estudios [Kundur, pág.170].

Otro argumento habitual para mantener esta hipótesis es que, en la práctica, estos términos son mucho más pequeños que los términos de “tensión de velocidad” (de la forma $w \cdot \psi$) con que están sumados en las ecuaciones de Park.

c) En relación a los estudios clásicos de cortocircuito, se hace notar que no tener en cuenta la derivada de los flujos respecto al tiempo, equivale a no considerar la componente de continua en la corriente de cortocircuito. Al no considerar esta componente, se acepta que la corriente “pegue un salto” luego del cortocircuito [Kundur, pág.109].

d) Observar que las hipótesis 1) y 3) significan que sólo consideraremos con precisión los transitorios del devanado de campo.

Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de Park se escriben:

$$v_d = -w \cdot \psi_q - r_s \cdot i_d$$

$$v_q = w \cdot \psi_d - r_s \cdot i_q$$

$$v_{fd} = d\psi_{fd}/dt + r_{fd} \cdot i_{fd}$$

$$\begin{aligned}\psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} \\ \psi_q &= -L_q \cdot i_q \\ \psi_{fd} &= -3/2 \cdot L_{afd} \cdot i_d + L_{fdfd} \cdot i_{fd}\end{aligned}$$

(Recordar que los términos homopolares son nulos debido a la hipótesis de régimen balanceado).

Eliminando i_{fd} entre la última y antepenúltima ecuación:

$$\begin{aligned}\psi_d &= -L'_d i_d + L_{afd}/L_{fdfd} \cdot \psi_{fd} \\ \text{con } L'_d &= L_d - 3/2 \cdot L_{afd}^2/L_{fdfd} \text{ ("Inductancia transitoria de eje directo")}\end{aligned}$$

Se definen:

$$E'_q = w \cdot L_{afd}/L_{fdfd} \cdot \psi_{fd}/\sqrt{2} \text{ ("Voltaje proporcional a los enlaces de flujo de campo")}$$

$$x'_d = w \cdot L'_d \text{ ("Reactancia transitoria de eje directo")} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}v_d &= -r_s \cdot i_d + x_q \cdot i_q \\ v_q &= \sqrt{2} \cdot E'_q - x'_d \cdot i_d - r_s \cdot i_q\end{aligned}$$

Son ecuaciones formalmente similares a las de régimen, cambiando x_d por x'_d y E_I por E'_q , y en forma análoga al caso de régimen, se define el fasor $E'_q = E'_q \cdot e^{j\delta}$

La ecuación restante (la única ecuación diferencial) se transforma así:

Multiplicando en la tercer ecuación a ambos lados por $L_{afd}/L_{fdfd} \cdot w/\sqrt{2}$ y definiendo: $T'_{d0} = L_{fdfd}/r_{fd}$ ("Constante de tiempo transitoria de eje directo, a circuito abierto": es la constante de tiempo del devanado de campo si la máquina está en vacío, con valores típicos entre 2 y 10 segundos).

$$E_{fd} = (w \cdot L_{afd})/(r_{fd} \cdot \sqrt{2}) \cdot v_{fd} \text{ ("Voltaje proporcional al voltaje de campo")}$$

\Rightarrow

$$dE'_q/dt = (E_{fd} - E_I)/T'_{d0} \text{ (forma habitual en que se encuentra en la literatura esta ecuación diferencial).}$$

Observar que (dado i_d , que se obtiene a partir de las condiciones de conexión a la red) ésta se puede ver también como una ecuación diferencial en E'_q , dado que de las relaciones:

$$\begin{aligned}v_q &= \sqrt{2} \cdot E'_q - x'_d \cdot i_d - r_s \cdot i_q \\ v_q &= \sqrt{2} \cdot E_I - x_d \cdot i_d - r_s \cdot i_q \\ \text{se obtiene la relación: } E_I &= E'_q + (x_d - x'_d) \cdot i_d/\sqrt{2}\end{aligned}$$

Comentario: Se elige E'_q como variable de estado para describir la dinámica del devanado de campo porque (por ser proporcional a un flujo) no puede variar en forma instantánea al producirse una perturbación. Esto facilita imponer condiciones iniciales en el momento de la perturbación (del tipo: $E'_q(0+) = E'_q(0-)$)

Síntesis:

$$v_d = -r_s \cdot i_d + x_q \cdot \dot{i}_d$$

$$v_q = \sqrt{2} \cdot E'_q - x'_d \cdot i_d - r_s \cdot i_q$$

$$dE'_q/dt = (E_{fd} - E_I)/T'_{d0}$$

$$E_I = E'_q + (x_d - x'_d) \cdot i_d / \sqrt{2}$$

(Caso particular: en régimen $E_{fd} = E_I$, y E'_q es constante)

Métodos fasoriales

Asumiendo que las corrientes son de secuencia positiva, podemos operar igual que en el desarrollo hecho en régimen permanente:

$$E'_q = V + r_s \cdot I + j \cdot x'_d \cdot I_d + j \cdot x_q \cdot I_q$$

E'_q puede verse como una fem interna de la máquina en el intervalo de tiempo en que ψ_{fd} no cambia. Aún teniendo en cuenta la presencia de un regulador de tensión (AVR), este intervalo de tiempo es del orden del valor de T'_{d0} (varios segundos).

Cuando sí se consideran las variaciones de ψ_{fd} (ya sea por la presencia del AVR o porque se quiere hacer un análisis más preciso), las variaciones de E'_q se calculan a través de la ecuación diferencial vista.

Observaciones:

- Al igual que en el caso de régimen, el ángulo de fase de E'_q respecto al eje sincrónico de referencia es también el ángulo " δ " del eje "q" de la máquina respecto a ese eje.
- El método fasorial se aplica en este caso no en régimen (que es la aplicación habitual), sino en el contexto de un análisis cuasiestático: los fasores van cambiando a lo largo del tiempo, y el método fasorial se considera válido en cada intervalo de tiempo elemental de cálculo

Al igual que en el caso de régimen, en los modelos simplificados se busca manipular la ecuación fasorial para poder "engancharse" fácilmente con la red externa.

Una forma sencilla de hacerlo es usar el mismo E_q que en los estudios de régimen, haciendo uso de la relación fasorial $E_q = E'_q + j(x_q - x'_d) \cdot I_d$ para calcular (en cada intervalo de cálculo) el valor de esta "fuente de tensión"
(Recordamos que E_q verifica: $E_q = V + r_s \cdot I + x_q \cdot I$)

Comentario

En los métodos de cálculo más antiguos se usaba habitualmente este otro modelo:

Definimos:

$$E' = E'_q - j \cdot (x_q - x'_d) \cdot I_q \text{ ("Voltaje atrás de la reactancia transitoria de eje directo")}$$

\Rightarrow

$$E' = V + r_s \cdot I + j \cdot x'_d \cdot I$$

E' no es una fuente de tensión ideal (su módulo depende de la corriente), y su ángulo de fase respecto al eje de referencia es sólo aproximadamente " δ " (manipulando las

Régimen subtransitorio balanceado aproximado

Ahora sí se consideran los devanados amortiguadores, y el desarrollo es conceptualmente similar al hecho para el régimen transitorio:

$$\begin{aligned}\psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} \\ \psi_{fd} &= -3/2 \cdot L_{afd} \cdot i_d + L_{fdfd} \cdot i_{fd} + L_{fdkd} \cdot i_{kd} \\ \psi_{kd} &= -3/2 \cdot L_{akd} \cdot i_d + L_{fdkd} \cdot i_{fd} + L_{kdkd} \cdot i_{kd}\end{aligned}$$

Despejando i_{fd} , i_{kd} de las 2 últimas y sustituyendo en la primera se obtiene una relación de la forma:

$$\psi_d = -L''_d \cdot i_d + K_1 \cdot \psi_{fd} + K_2 \cdot \psi_{kd}$$

Análogamente:

$$\psi_q = -L''_q \cdot i_q + K_3 \cdot \psi_{kq}$$

L''_d, L''_q se denominan inductancias subtransitorias de eje directo y en cuadratura.

Sustituyendo en las ecuaciones tensión -corriente :

$$\begin{aligned}v_d &= -w \cdot \psi_q - r_s \cdot i_d \\ v_q &= w \cdot \psi_d - r_s \cdot i_q\end{aligned}\quad \text{resulta:}$$

$$\begin{aligned}v_d &= x''_q \cdot i_q - r_s \cdot i_d - w \cdot K_3 \cdot \psi_{kq} \\ v_q &= -x''_d \cdot i_d - r_s \cdot i_q + w \cdot K_1 \cdot \psi_{fd} + w \cdot K_2 \cdot \psi_{kd}\end{aligned}$$

Manipulando estas ecuaciones en la forma habitual:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot V &= (v_q - j \cdot v_d) \cdot e^{j\delta} = \sqrt{2} \cdot (-r_s \cdot I - j \cdot x''_d \cdot I_d - j \cdot x''_q \cdot I_q + E''_q + j \cdot E''_d), \text{ con} \\ E''_q &= e^{j\delta} f(\psi_{fd}, \psi_{kd}) \text{ y } E''_d = -j \cdot e^{j\delta} g(\psi_{kq}), \text{ siendo } g \text{ y } f \text{ funciones que se pueden} \\ &\text{calcular explícitamente.}\end{aligned}$$

$E''_2 = E''_q + j \cdot E''_d$ es una “fuente de tensión” constante en el período de tiempo en que estos flujos no varían. Este período de tiempo no puede ser mayor que las constantes de tiempo de los devanados amortiguadores, que es de unos pocos ciclos.

Este modelo es habitualmente usado en cálculos de cortocircuito.

Para los estudios de estabilidad, en cambio, sólo tiene sentido usar este modelo con un método de resolución cuasiestático, en que estas fuentes de tensión van cambiando su valor a lo largo del tiempo.

Para calcular estos valores es necesario, por supuesto, tener en cuenta también las ecuaciones diferenciales de Park restantes: $d\psi_{fd}/dt$, $d\psi_{kd}/dt$, $d\psi_{kq}/dt$.

Si uno lo hiciera, aparecerían (en forma análoga a como se definió T'_{d0}) las constantes de tiempo subtransitorias T''_{d0} y T''_{q0} .

Si se define: $E'' = E''_2 - j \cdot I_q (x''_d - x''_q)$ (tensión atrás de la reactancia subtransitoria de eje directo), resulta una relación fasorial para “enganchar” con la red externa:

$$E'' = V + r_s \cdot I + j \cdot x''_d \cdot I$$

Parámetros operacionales de la máquina síncrona

Se presenta a continuación un enfoque alternativo de los parámetros de la máquina síncrona.

Se pretende obtener una expresión general en el dominio de Laplace que “incluya” a todas las inductancias de la máquina definidas para los diversos regímenes estudiados.

Este método alternativo de análisis en el dominio de Laplace tiene algunas ventajas respecto a los métodos de análisis clásicos:

- permite elaborar métodos de medida en campo de los parámetros de la máquina
- es fácilmente generalizable a modelos de máquina con mayor número de devanados en el rotor.

A) Parámetros de eje directo

Las ecuaciones de eje directo del rotor en el dominio de Laplace (en forma incremental respecto a las condiciones de régimen en $t=0$) son:

$$\Delta v_{fd}(s) = s \cdot \Delta \psi_{fd}(s) + r_{fd} \cdot \Delta i_{fd}(s)$$

$$0 = s \cdot \Delta \psi_{kd}(s) + r_{kd} \cdot \Delta i_{kd}(s)$$

siendo:

$$\Delta \psi_d(s) = -L_d \cdot \Delta i_d(s) + L_{afd} \cdot \Delta i_{fd}(s) + L_{akd} \cdot \Delta i_{kd}(s)$$

$$\Delta \psi_{fd}(s) = -3/2 \cdot L_{afd} \cdot \Delta i_d(s) + L_{fdfd} \cdot \Delta i_{fd}(s) + L_{fdkd} \cdot \Delta i_{kd}(s)$$

$$\Delta \psi_{kd}(s) = -3/2 \cdot L_{akd} \cdot \Delta i_d(s) + L_{fdkd} \cdot \Delta i_{fd}(s) + L_{kdkd} \cdot \Delta i_{kd}(s)$$

(en estas expresiones para cada variable “m” se define: $\Delta m(t) = m(t) - m(0)$)

Sustituyendo con estas expresiones de los flujos resulta:

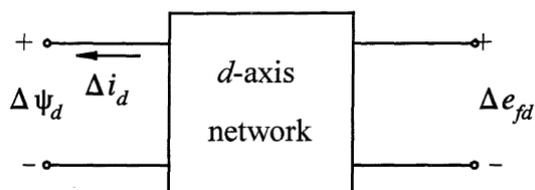
$$\Delta v_{fd}(s) = -3/2 \cdot s \cdot L_{afd} \cdot \Delta i_d(s) + (L_{fdfd} \cdot s + r_{fd}) \Delta i_{fd}(s) + L_{fdkd} \cdot s \cdot \Delta i_{kd}(s)$$

$$0 = -3/2 \cdot s \cdot L_{akd} \cdot \Delta i_d(s) + (L_{kdkd} \cdot s + r_{kd}) \Delta i_{kd}(s) + L_{fdkd} \cdot s \cdot \Delta i_{fd}(s)$$

Despejamos $\Delta i_{fd}(s)$, $\Delta i_{kd}(s)$ de estas ecuaciones y sustituimos en la expresión de $\Delta \psi_d(s)$, obteniendo una expresión de la forma:

$$\Delta \psi_d(s) = G(s) \Delta v_{fd}(s) - L_d(s) \cdot \Delta i_d(s)$$

$L_d(s)$ es la denominada “Inductancia operacional de eje directo”. Para tensión de campo constante $L_d(s)$ puede verse, por lo tanto, como la función de transferencia entre $\Delta \psi_d(s)$ y $\Delta i_d(s)$,



Realizando explícitamente las operaciones, se obtiene que $L_d(s)$ es de la forma:

$$L_d(s) = L_d \cdot (1 + s \cdot T'_d) / (1 + s \cdot T''_d) \cdot (1 + s \cdot T''_{d0}) / (1 + s \cdot T'_{d0}),$$

siendo:

T'_{d0}, T''_{d0} : Constantes de tiempo de eje directo a circuito abierto (transitoria y subtransitoria) (Coinciden con las ya definidas anteriormente al estudiar el régimen transitorio y subtransitorio balanceado).

T'_d, T''_d : Constantes de tiempo de eje directo en cortocircuito (transitoria y subtransitoria)

(Los nombres provienen de que son las constantes de tiempo que definen el andamiento de la corriente de cortocircuito cuando se impone una falta trifásica en bornes de la máquina)

Es inmediato que:

-si $s \rightarrow 0$, $L_d(s) \rightarrow L_d$

-si $s \rightarrow \infty$, $L_d(s) \rightarrow L''_d = L_d \cdot T''_d / T'_{d0} \cdot T'_d / T'_{d0}$

-si $s \rightarrow \infty$ y no se consideran los devanados amortiguadores $L_d(s) \rightarrow L'_d = L_d \cdot T'_d / T'_{d0}$

Haciendo el desarrollo explícito se puede ver que L'_d y L''_d coinciden con las ya definidas anteriormente al estudiar el régimen transitorio y subtransitorio balanceado [Kundur, pág. 143].

Teniendo en cuenta la clásica forma en que se analiza la respuesta en frecuencia de los sistemas lineales frente a excitaciones senoidales, resulta:

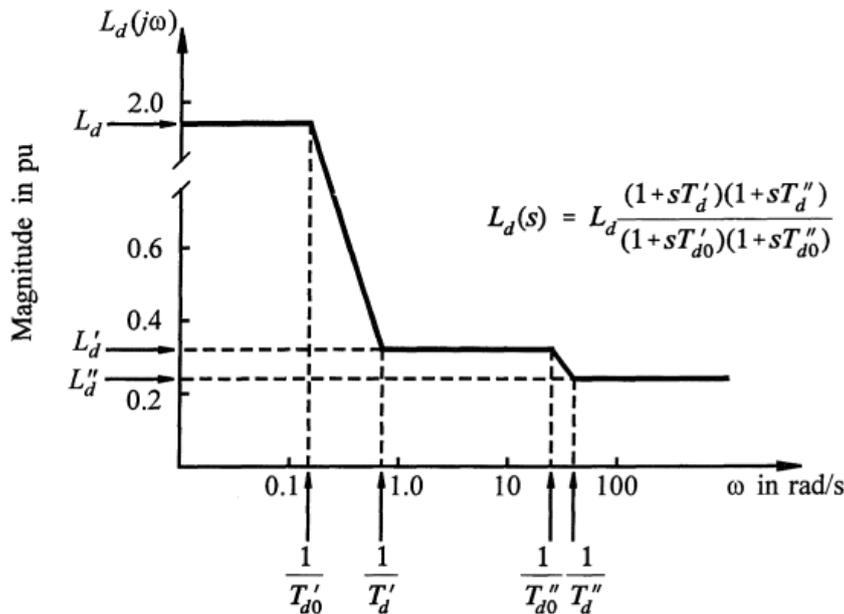
a) $|L_d(j\omega=0)| = L_d$ es la inductancia que presenta la máquina frente a excitaciones de la forma $i_d = \text{constante}$ (para tensión de campo constante), por lo que representa la inductancia en condiciones de régimen (recordar que $i_d = \text{constante}$ significa que las corrientes en coordenadas de fase forman una terna equilibrada de fasores de secuencia positiva).

b) $|L_d(j\omega=\infty)| = L''_d$ es la inductancia que presenta la máquina frente a excitaciones “rápidas”

c) $|L_d(j\omega=\infty)| = L'_d$ es la inductancia que presenta la máquina frente a excitaciones “rápidas” si no tuviese devanados amortiguadores.

Más en general: si uno dibujara el diagrama de Bode $|L_d(j\omega)| = f(\omega)$ para una máquina típica, se encontraría que $|L_d(j\omega)| \cong L_d$ para frecuencias de hasta 0,02 Hz, $|L_d(j\omega)| \cong L'_d$ para frecuencias entre 0,2 y 2 Hz, y $|L_d(j\omega)| \cong L''_d$ para frecuencias > 10 Hz (Ver figura) [Kundur, pág. 160].

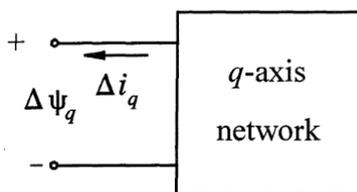
Este comportamiento de la inductancia operacional sugiere métodos de medida de los parámetros de la máquina basados en imponer a la máquina corrientes de estator de frecuencia ajustable.



B) Parámetros de eje en cuadratura

Con un desarrollo análogo:

$\Delta\psi_q(s) = -L_q(s) \cdot \Delta i_q(s)$, siendo $L_q(s)$ la “Inductancia operacional de eje en cuadratura”.



$$L_q(s) = L_q \cdot (1 + s \cdot T''_q) / (1 + s \cdot T''_{q0})$$

Es inmediato que:

-si $s \rightarrow 0$, $L_q(s) \rightarrow L_q$

-si $s \rightarrow \infty$, $L_q(s) \rightarrow L''_q = L_q \cdot T''_q / T''_{q0}$

-si no se consideran los devanados amortiguadores $L_q(s) = L_q$ (constante)

Observación

Si la máquina es de rotor liso, es habitual modelarla con 2 devanados amortiguadores (reales o ficticios) en el eje en cuadratura, con constantes de tiempo bastante distintas entre sí. En tal caso, la inductancia operacional de eje en cuadratura pasa a ser formalmente similar a la de eje directo :

-aparece un segundo juego de constantes de tiempo T'_q, T'_{q0}

-se puede definir $L'_q = \lim_{s \rightarrow \infty} L_q(s)$ cuando no se considera el devanado amortiguador de eje en cuadratura de constantes de tiempo más pequeñas.

Aplicación típica

Una forma clásica de “observar” estas variaciones de las inductancias operacionales al ir cambiando la frecuencia de la perturbación aplicada es registrar las corrientes de estator que se producen al ocurrir un cortocircuito trifásico en bornes de la máquina.

La corriente de cortocircuito de fase en bornes de una máquina de rotor liso, por ejemplo, obedece a la expresión (Referencia: A.C. Alvarez: ”Comportamiento subtransitorio y transitorio en régimen balanceado”)

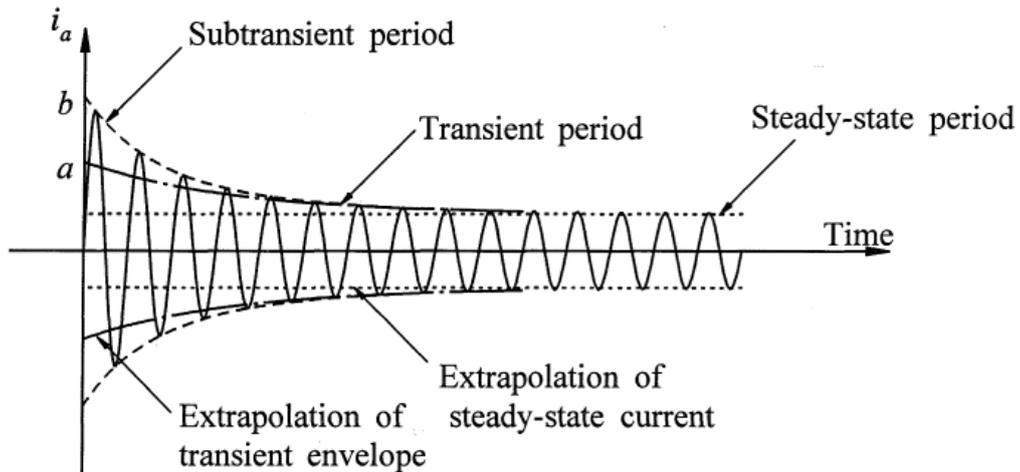
$$i_a(t) = \sqrt{2} |E_I| \cdot (1/x_d + (1/x'_d - 1/x_d) e^{-t/T'^d} + (1/x''_d - 1/x'_d) e^{-t/T''_d}) \cos(\omega t + \delta - 90) - \sqrt{2} |E_I| / x''_d \cdot e^{-t/T_a} \cos(\delta - 90)$$

δ : fase de E_I en el momento del cortocircuito

$T_a = L''_d / r_s$ (“Constante de tiempo de armadura”)

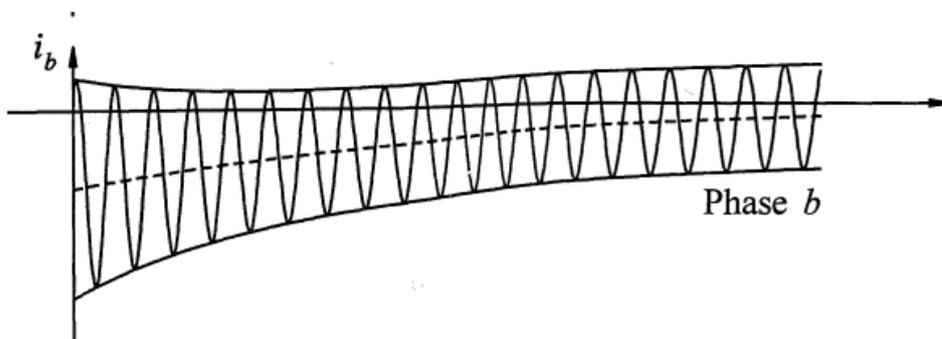
(Si la máquina es de polos salientes aparece en T_a el promedio de las inductancias subtransitorias en vez de L''_d).

La corriente se compone por lo tanto de una componente continua (como ya se ha dicho, corresponde a no despreciar las derivadas de los flujos de estator), y una componente de alterna que decrece a lo largo del tiempo. En relación a la componente de alterna, en un primer período (mientras duran los transitorios en los devanados amortiguadores) la inductancia de la máquina es aproximadamente L''_d , más adelante es aproximadamente L'_d , y finalmente (al extinguirse los transitorios en el devanado de campo) toma el valor de régimen L_d .



Se observa en esta gráfica la variación de las reactancias de la máquina a medida que transcurren los diversos períodos: subtransitorio (dinámica muy rápida de los devanados amortiguadores), transitorio (dinámica del devanado de campo) y régimen permanente.

Se ha supuesto la máquina inicialmente en vacío, de ahí que el valor inicial de la corriente (que debe coincidir con el valor pre-perturbación, dado que los flujos en el estator no pueden cambiar instantáneamente) sea cero.



Si la máquina hubiese estado inicialmente en carga, en cambio, la condición de continuidad de la corriente impone una “componente continua” adicional, que se superpone a las componentes puramente sinusoidales

Observación. Nuestra teoría vista de régimen transitorio aproximado desprecia esta componente continua, al suponer $d\psi_d/dt = d\psi_q/dt = 0$.

La duración típica de los diversos regímenes es:

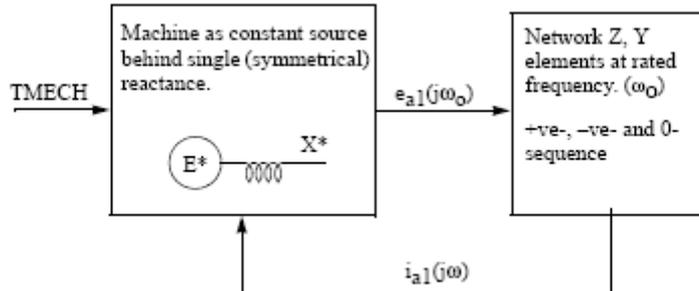
- la componente subtransitoria se amortigua en 3 o 4 ciclos
- la componente de continua decae en 8 a 10 ciclos

-la componente transitoria se amortigua con constante de tiempo 1 a 3 seg

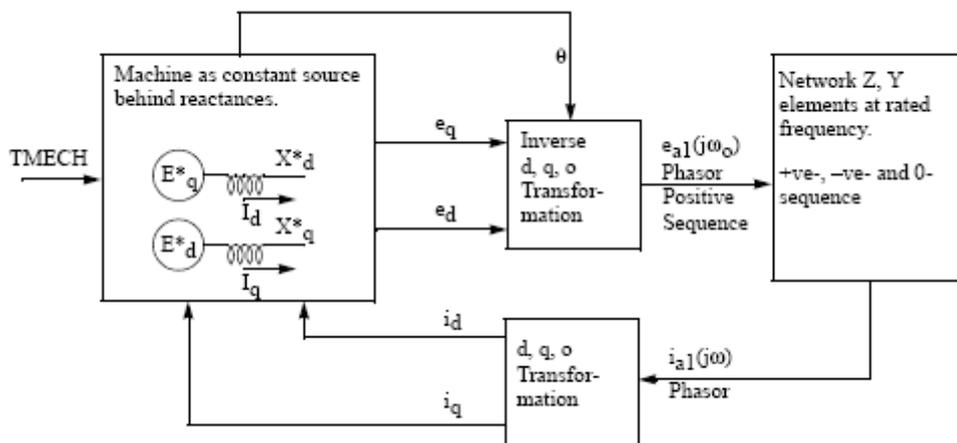
-el valor de régimen se alcanza a los 8 a 10 seg.

Síntesis de los modelos de máquina y su interconexión con la red

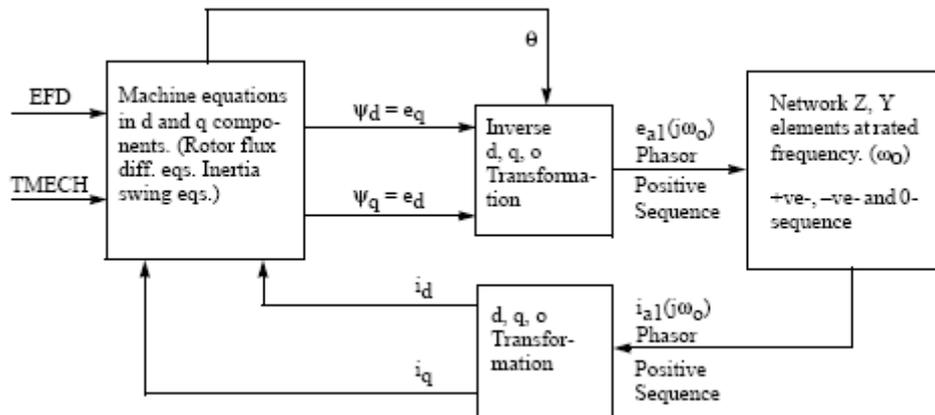
En los diagramas siguientes se muestran las diversas opciones de modelos de máquina en grado creciente de sofisticación:



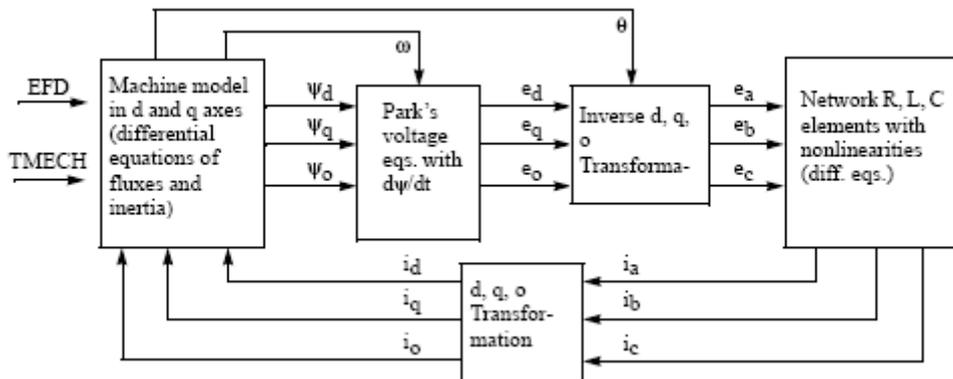
Modelo más simple: fuente de tensión atrás de una reactancia, y despreciando los efectos de saliencia. La red se representa como un conjunto de impedancias serie y paralelo interconectadas, eventualmente con sus componentes de secuencia (componentes simétricas).



A diferencia del anterior, ahora se consideran los efectos de saliencia, por lo que aparece el modelado de la máquina en coordenadas de Park, y la necesidad de usar la transformada de Park y su inversa para interactuar con la red. Las reactancias en el modelo de máquina pueden ser sincrónicas, transitorias o subtransitorias, de acuerdo al estudio que se esté realizando.



La máquina se representa ahora con las ecuaciones de Park completas, incluyendo las que representan la dinámica del rotor. Este es el modelo más sofisticado que hemos desarrollado, con las simplificaciones ya explicadas: $\omega = \text{constante}$ y despreciando las derivadas de los flujos del estator.



Se muestra, finalmente, este modelo aun más sofisticado; en que las simplificaciones anteriores no son consideradas. Dado que las ecuaciones incluyen las derivadas de los flujos del estator, es necesario también representar la dinámica de la red externa, que pasa a ser representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales en cada una de las fases.

Este modelo es típico de los estudios de transitorios electromagnéticos, y no se usa habitualmente en estudios de estabilidad.

Valores típicos de los parámetros de la máquina síncrona

Parámetro	Hidráulica	Térmica
X_d	0,6 – 1,5	1,0 – 2,3
X_q	0,4 --1,0	1,0 – 2,3
X'_d	0,2 – 0,5	0,15 – 0,4
X'_q	----	0,3 – 1,0
X''_d	0,15 – 0,35	0,12 – 0,25
X''_q	0,2 – 0,45	0,12 – 0,25
T'_{d0}	1,5 – 9,0	3,0 – 10
T'_{q0}	----	0,5 – 2,0
T''_{d0}	0,01 – 0,05	0,02 – 0,05
T''_{q0}	0,01 – 0,09	0,02 – 0,05
$X_l=X_0$	0,1 – 0,2	0,1 – 0,2
r_s	0,002 – 0,02	0,0015 – 0,005

Reactancias y resistencia en p.u (base: valores nominales del estator),
tiempos en segundos.

Se cumplen habitualmente las siguientes relaciones entre los parámetros de la máquina:
[Kundur 152]

$$X_d > X_q > X'_q > X'_d > X''_q > X''_d$$

$$T'_{d0} > T'_d > T'''_{d0} > T''_d$$

$$T'_{q0} > T'_q > T'''_{q0} > T''_q$$

Medición de parámetros de las máquinas (en base a imponer cortocircuitos en vacío):
ver Norma IEEE-115

TRATAMIENTO DE LA SATURACION

Recordemos que la saturación se considera exclusivamente para las inductancias que no son de dispersión (si $L_d = L_{ad} + L_l$, sólo L_{ad} satura, y análogamente en el eje “q”).

Si L_{adu} es el valor no-saturado de L_{ad} , la saturación se considera a través de un factor de saturación de eje directo $K_{sd} \leq 1$ tal que:

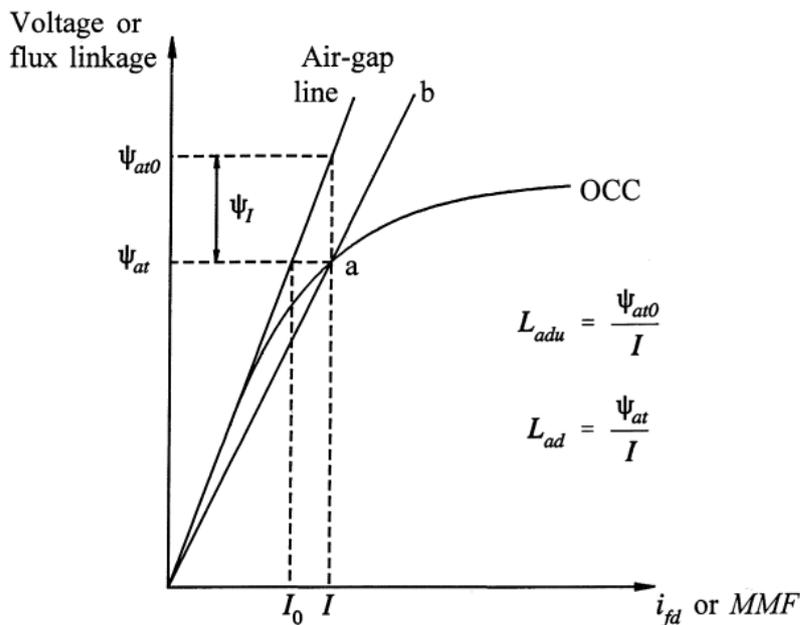
$L_{ad} = K_{sd} \cdot L_{adu}$, y análogamente $L_{aq} = K_{sq} \cdot L_{aqu}$ para el eje en cuadratura.

Ensayando la máquina, es posible obtener la “característica de saturación a circuito abierto” (OCC), que es la gráfica de la tensión terminal en vacío a velocidad nominal (valor eficaz V o de pico $V\sqrt{2}$) contra la corriente de excitación (i_{fd}).

En estas condiciones: $V\sqrt{2} = v_q = \psi_d = L_{afd} \cdot i_{fd} = L_{ad} \cdot i_{fd}$ (en p.u, con $w=1$ en régimen, y acudiendo a la forma de la ecuaciones p.u ya vista, que impone la simetría de la matriz de inductancias) por lo que la curva nos permite obtener para cada punto de operación el valor del K_{sd} en condiciones de vacío. Como además $v_d = \psi_q = 0$, la curva también puede verse como $\psi_{at} = f(i_{fd})$, siendo ψ_{at} el flujo total a través del entrehierro (flujo total en el estator excluyendo el flujo de dispersión).

Se asume habitualmente que (a los efectos del cálculo de K_{sd}) la curva también es válida en condiciones de carga, interpretada como una curva $\psi_{at}-i$, siendo ψ_{at} el flujo magnético a través del entrehierro e i la correspondiente corriente magnetizante, que es una combinación de las diversas corrientes i_d , i_{fd} , etc.

Por lo tanto: si de la OCC deducimos una curva $K_{sd} = f(\psi_{at})$, asumimos que la curva sigue siendo válida en carga.



Dada una corriente en abscisas, sea ψ_{at0} el flujo correspondiente si no hubiese saturación (se obtiene en la “línea de entrehierro”: tangente a la OCC en el origen) y ψ_{at}

el flujo leído en la OCC \Rightarrow la suposición de que la curva OCC sigue siendo válida en carga se escribe: $K_{sd} = \psi_{at}/\psi_{at0}$

A los efectos prácticos, el cálculo del factor de saturación en cada punto de funcionamiento se hace de la siguiente forma:

a) El flujo de eje directo a través del entrehierro surge de las relaciones básicas flujo-corriente:

$\psi_d = -(L_l + L_{ad}) \cdot i_d + L_{ad} \cdot i_{fd} + L_{ad} \cdot i_{kd}$, y (por definición) el flujo a través del entrehierro se obtiene de descontar (con el signo adecuado a la orientación elegida de corrientes) el flujo de dispersión:

$\psi_{ad} = \psi_d + L_l \cdot i_d = v_q + r_s \cdot i_q + L_l \cdot i_d$ (Ecuación en p.u., con $w=1$ p.u.; válida en régimen transitorio o subtransitorio bajo la hipótesis habitual $d/dt \psi_d \cong 0$)

Análogamente:

$\psi_{aq} = \psi_q + L_l \cdot i_q = -v_d - r_s \cdot i_d + L_l \cdot i_q \Rightarrow$

Acudiendo a las definiciones fasoriales habituales:

$(\psi_{ad} + j \cdot \psi_{aq}) \cdot e^{j\delta}/\sqrt{2} = V + (r_s + j \cdot X_l) I$ (siendo V, I la corriente y tensión terminales).

Si llamamos $E_a = V + (r_s + j \cdot X_l) I$ (tensión de entrehierro) resulta $|E_a| = \psi_{at}$ (en p.u., valor r.m.s).

(Recordar que, por propiedades de la transformada de Park, es:

$$\sqrt{2} \cdot \psi_{at} = (\psi_{ad}^2 + \psi_{aq}^2)^{1/2}$$

Por lo tanto: para cada condición terminal V, I , calculando $V + (r_s + j \cdot X_l) I$ se obtiene ψ_{at} .

b) El correspondiente ψ_{at0} es el valor de flujo obtenido en la línea de entrehierro para la corriente magnetizante asociada a ψ_{at} en la OCC (ver figura).

Comentario: En la práctica: habitualmente no se dispone fácilmente de esa corriente magnetizante (que, de acuerdo a la expresión de ψ_d de más arriba, es $i_{magd} = -i_d + i_{fd} + i_{kd}$ para ψ_d , y una expresión análoga para ψ_q), por lo que se busca trabajar con expresiones analíticas de la curva OCC que permitan calcular directamente ψ_{at0} como función de ψ_{at} . (observar en la figura que, conocida la curva OCC y la línea de entrehierro, no es necesario calcular explícitamente esa corriente para obtener ψ_{at0} para cada ψ_{at})

c) Calculado ψ_{at0} , se calcula finalmente $K_{sd} = \psi_{at}/\psi_{at0}$

d) Se suele tomar $K_{sq} = 1$ si la máquina es de polos salientes (L_{aq} prácticamente no satura, por ser el camino de flujo casi todo en el aire) y $K_{sq} = K_{sd}$ si es de polos lisos.

e) En los programas de cálculo la curva OCC se suele aproximar por tramos de la siguiente forma:

-Un tramo inicial rectilíneo, válido para $\psi_{at} \leq$ un cierto ψ_1 . Este tramo coincide, obviamente, con la línea de entrehierro.

-Un segundo tramo de la forma: $\psi_{at0} = \psi_{at} + A \cdot \exp(B \cdot (\psi_{at} - \psi_1))$ (con A, B constantes), válido para $\psi_1 < \psi_{at} \leq \psi_2$

-Un tramo final rectilíneo, válido para $\psi_2 < \psi_{at}$

Estas aproximaciones analíticas permiten calcular ψ_{at0} como función de ψ_{at} en cada tramo, de acuerdo con lo requerido.

Comentarios

- Algunos programas asumen la curva OCC como función cuadrática del flujo de entrehierro.
- Por lo general los programas de cálculo solicitan que se ingresen 2 puntos de la curva OCC a efectos de poder aproximarla con la función definida.

ECUACION DE “SWING”

A los efectos de completar el modelo de la máquina, aun es necesario introducir la ecuación de comportamiento mecánico luego de una perturbación:

Usaremos la siguiente notación:

T_m : Torque mecánico (N-m)

T_e : Torque eléctrico (N-m)

$T_a = T_m - T_e$: Torque acelerante (N-m)

J : Momento de inercia del conjunto turbina-rotor(Kg-m²)

w_m : Velocidad angular mecánica (rad/s)

pf : Número de pares de polos

$w = w_m \cdot pf$: Velocidad angular (pulsación) eléctrica (rad/s)

La ecuación de Newton para la masa rotante turbina-generator se escribe:

$$J \cdot dw_m/dt = T_a$$

Esta ecuación se suele escribir de una forma un poco distinta:

S_b : Potencia básica (MVA)

w_{0m} = velocidad angular mecánica nominal (rad/s)

$w_0 = w_{0m} \cdot pf$ = pulsación eléctrica nominal = $2\pi f_0$ (rad/s)

$T_b = S_b / w_{0m}$: Torque básico (N-m)

$H = 1/2 \cdot J \cdot w_{0m}^2 / S_b$: Constante de inercia (MW-s/MVA)

(A diferencia de la inercia J , permite manejar valores típicos, con sólo conocer algunos datos básicos de la máquina)

Con estas definiciones, la ecuación queda:

$$2 \cdot H \cdot S_b / w_{0m}^2 \cdot (dw_m/dt) = T_a \Rightarrow 2 \cdot H / w_{0m} \cdot (dw_m/dt) = T_a / (S_b / w_{0m}) = T_a / T_b = T_a \text{ (pu)}$$

$$\text{Como } w_m / w_{0m} = w / w_0 \Rightarrow 2 \cdot H / w_0 \cdot (dw/dt) = T_a \text{ (pu) (con } w \text{ en rad/seg)}$$

Interesa expresar las ecuaciones en función del ángulo δ que, como ya vimos, tiene también un significado en algunos modelos como ángulo de fase de la “fem” de la máquina :

$$d\delta/dt = w - w_0 \Rightarrow d^2\delta/dt^2 = dw/dt \Rightarrow$$

$$2 \cdot H / w_0 \cdot (d^2\delta/dt^2) = T_a \text{ (pu)} \quad (\text{Ecuación de swing clásica})$$

Incorporando un término de amortiguación:

$$2 \cdot H / w_0 \cdot (d^2\delta/dt^2) = T_a \text{ (pu)} - K_D \cdot \Delta w \quad , \text{ con } \Delta w = w - w_0$$

Se suele simplificar esta ecuación de la siguiente forma aproximada:

$$P_a = T_a \cdot w_m = P_m - P_e : \text{Potencia acelerante (MW)}$$

$$\text{Observamos que } T_a \cdot w_{0m} / S_b \cong T_a \cdot w_m / S_b = P_a / S_b = P_a \text{ (pu)} = P_m \text{ (pu)} - P_e \text{ (pu)} \Rightarrow$$

$$2.H/w_0.(d^2\delta/dt^2) = P_a(\text{pu}) - K_D.\Delta w$$

Si las máquinas del sistema se suponen representadas con un circuito equivalente “fem atrás de una reactancia”, observamos que P_e (potencias inyectadas por las máquinas hacia el sistema) es función de las tensiones y ángulos de los fasores “fem” de las máquinas y de las restantes barras del sistema.

Si se formulan, por lo tanto, las ecuaciones de swing de todas las máquinas y las ecuaciones de la red que las une (flujo de cargas), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineal (dado que las relaciones potencia-ángulo son no lineales) cuyas variables de estado son los ángulos “ δ ” y cuyas variables algebraicas son los módulos de las tensiones de barra.

Comentarios:

a) K_D es, en principio, un factor de fricción mecánica. Habitualmente, no obstante, se suele “agrupar” también en el término $K_D.\Delta w$ términos que, en rigor, son parte de T_a , como ser la variación de cargas con la frecuencia. En algunos modelos también se incluyen factores de amortiguación que provienen de no considerar en el modelo de máquina los devanados amortiguadores.

b) Es habitual trabajar con Δw por unidad en vez de expresarlo en rad/seg:

$$\Delta w \text{ (p.u)} = (w - w_0)/w_0.$$

En tal caso K_D (cuyas unidades son p.u torque / p.u velocidad) se redefine como $K'_D = K_D.w_0$, de forma que el término de fricción queda expresado como $K'_D.\Delta w$, con Δw en p.u.

Valores típicos de K'_D son entre 1 y 3 si representa sólo fricción mecánica más variación de cargas con la frecuencia, y hasta 25 si también incluimos el efecto de devanados amortiguadores [Anderson y Fouad, pag.428].

c) La constante de inercia H se suele interpretar de la forma siguiente:

Sea T_M el tiempo requerido para acelerar la máquina en vacío desde el reposo hasta su velocidad nominal, aplicando el torque mecánico nominal y asumiendo $K_D=0$:

$$dw/dt = T_a.w_0/2H \text{ con } T_a = 1 = Sb/w_0 \Rightarrow w_0 = w_0/(2H) \int_{(0,T_M)} T_a dt = w_0/(2H).T_M \Rightarrow T_M = 2H \text{ (} T_M \text{ se denomina “tiempo de arranque mecánico”)}$$

Valores típicos de H:

- Unidad térmica, 2 polos: 2,5 a 6 seg.
- Unidad térmica, 4 polos: 4 a 10 seg.
- Unidad hidráulica: 2 a 4 seg.

LIMITES OPERATIVOS DE LOS GENERADORES SINCRONOS

Cálculo de la potencia activa y reactiva en régimen balanceado

Suponemos una máquina conectada a una barra de carga infinita (tensión terminal V constante, cualquiera sea su inyección de potencia). Consideramos condiciones de régimen, y despreciando la resistencia de estator.

Tomamos V como fasor de referencia, y el ángulo δ_τ entre E_I y V se toma positivo antihorario.

Proyectamos V sobre los ejes d y q :

$$V \cdot \cos \delta_\tau = E_I - X_d \cdot I_d \Rightarrow I_d = (E_I - V \cdot \cos \delta_\tau) / X_d$$

$$V \cdot \sin \delta_\tau = X_q \cdot I_q \Rightarrow I_q = V \cdot \sin \delta_\tau / X_q$$

Proyectamos I sobre los ejes V y jV :

$$I = I_d \cdot \sin \delta_\tau + I_q \cdot \cos \delta_\tau + j \cdot (-I_d \cdot \cos \delta_\tau + I_q \cdot \sin \delta_\tau)$$

$$\begin{aligned} P + j \cdot Q &= V \cdot I^* = V(I_d \cdot (\sin \delta_\tau + j \cdot \cos \delta_\tau) + I_q \cdot (\cos \delta_\tau - j \cdot \sin \delta_\tau)) = \\ &= V \cdot E_I \cdot \sin \delta_\tau / X_d - V^2 \sin \delta_\tau \cdot \cos \delta_\tau / X_d + V^2 \sin \delta_\tau \cdot \cos \delta_\tau / X_q + \\ &+ j \cdot (-V^2 \cos^2 \delta_\tau / X_d - V^2 \sin^2 \delta_\tau / X_q + V \cdot E_I \cdot \cos \delta_\tau / X_d) \end{aligned}$$

$$P = V \cdot E_I \cdot \sin \delta_\tau / X_d + V^2 \sin \delta_\tau \cdot \cos \delta_\tau (1/X_q - 1/X_d)$$

$$\text{(Rotor liso: } P = V \cdot E_I \cdot \sin \delta_\tau / X_d)$$

$$Q = V \cdot E_I \cdot \cos \delta_\tau / X_d + V^2 \cdot \cos^2 \delta_\tau (1/X_q - 1/X_d) - V^2 / X_q$$

$$\text{(Rotor liso: } Q = V \cdot E_I \cdot \cos \delta_\tau / X_d - V^2 / X_d)$$

Las expresiones indicadas son para las potencias por fase. Es fácil ver que también son válidas para potencias trifásicas $p.u$ (considerando como potencia base la nominal trifásica, y como tensión base la nominal fase-fase).

Límites operativos

Se intenta definir una región en el plano P-Q en la cuál deben encontrarse los puntos de operación de la máquina en régimen.

Se supondrá en todos los casos tensión terminal $V=\text{constante}$.

A) Límite de corriente de estator (calentamiento del estator):

$P^2 + Q^2 \leq (V \cdot I_{\text{max}})^2$ (para $V = V$ nominal es habitualmente $I_{\text{max}} = I$ nominal, por lo que $V \cdot I_{\text{max}} = S$ nominal), que representa una circunferencia centrada en el origen.

B) Límite de corriente de rotor (calentamiento del rotor)

Limitar la corriente del rotor equivale a limitar E_I , que es proporcional a i_{fd} .

Para $E_I = E_I$ máximo, obtenemos $P=f(Q)$, eliminando δ_τ de las expresiones vistas de P y Q.

La curva obtenida es un “caracol de Pascal”. Si la máquina es de rotor cilíndrico, degenera en una circunferencia con centro en el eje Q (en $(0, -V^2/X_d)$)

C) Límite de estabilidad

Se observa que P como función de δ_τ es acotada, por lo que para cada E_I se puede obtener el δ_τ máximo asociado a una potencia P máxima, y a su correspondiente Q. En particular: para rotor liso δ_τ máximo = 90° (de lo contrario es $< 90^\circ$)

Haciendo variar E_I obtenemos la curva límite P máxima = $f(Q)$, que se denomina “límite de estabilidad teórico”.

En el caso particular de las máquinas de rotor cilíndrico este límite es la recta vertical $Q = -V^2/X_d$

En la práctica, se suele evitar funcionar a P máxima, tomando un factor de seguridad adecuado (p.ej: P máxima $\cdot 0,1 \cdot P$ nominal).

Si $P'_{\text{max}} = F_s \cdot P_{\text{máxima}}$ es la potencia máxima a la que se quiere funcionar, teniendo en cuenta el factor de seguridad F_s , se encuentra la correspondiente curva límite (“límite de estabilidad práctico”) en el plano P-Q mediante el siguiente procedimiento:

Cálculo de P máxima a E_I dado (maximización de la función $P(\delta_\tau)$) \rightarrow Cálculo de $P'_{\text{max}} = F_s \cdot P_{\text{máxima}} \rightarrow$ Resolución en δ_τ de la ecuación $P'_{\text{max}} = P(\delta_\tau) \rightarrow$ Cálculo del correspondiente $Q(\delta_\tau)$.

Haciendo variar E_I (entre 0 y E_I máximo) se obtiene la curva $P(Q)$ deseada.

Comentarios sobre el límite de estabilidad

El límite descrito se denomina “de estabilidad” porque, como es sabido, en las condiciones ideales descritas (máquina contra barra infinita), los puntos de operación a ángulos δ_τ mayores a los asociados a P máxima son inestables a la pequeña señal.

En las redes habituales, en que la máquina se conecta a varias barras no infinitas, este límite carece de significado. En tal caso, uno debe asegurarse (mediante un adecuado estudio del sistema completo) que se esté funcionando en un punto de operación estable

a la pequeña señal, y no debería pensarse en una curva límite individual de cada máquina.

El límite de estabilidad aquí descrito (visto como una cota que cada máquina individual no debería rebasar) se sigue usando habitualmente, no obstante, como complemento a los límites que se definan en base a los estudios de sistema, (observar que es un límite “optimista”, dado que mantener la tensión terminal constante es beneficioso para la estabilidad de pequeña señal).

Observaciones:

-Existen también limitaciones en la zona de subexcitación vinculadas a calentamientos localizados si se trabaja con corrientes de campo muy bajas (la saturación limita estos calentamientos para corrientes de campo más altas).(Ver Kundur,194)

-La zona de funcionamiento para corrientes de campo bajas suele limitarse también a causa del ajuste del relé de subexcitación.

Si una máquina pierde su excitación, pasa a funcionar como un generador de inducción, consumiendo cantidades importantes de reactiva de la red. La consecuencia práctica es un descenso de la tensión terminal y un aumento importante de las corrientes de estator y rotor, de ahí que suelen implementarse protecciones que evitan subexcitaciones excesivas.

D)Límites adicionales de potencia activa

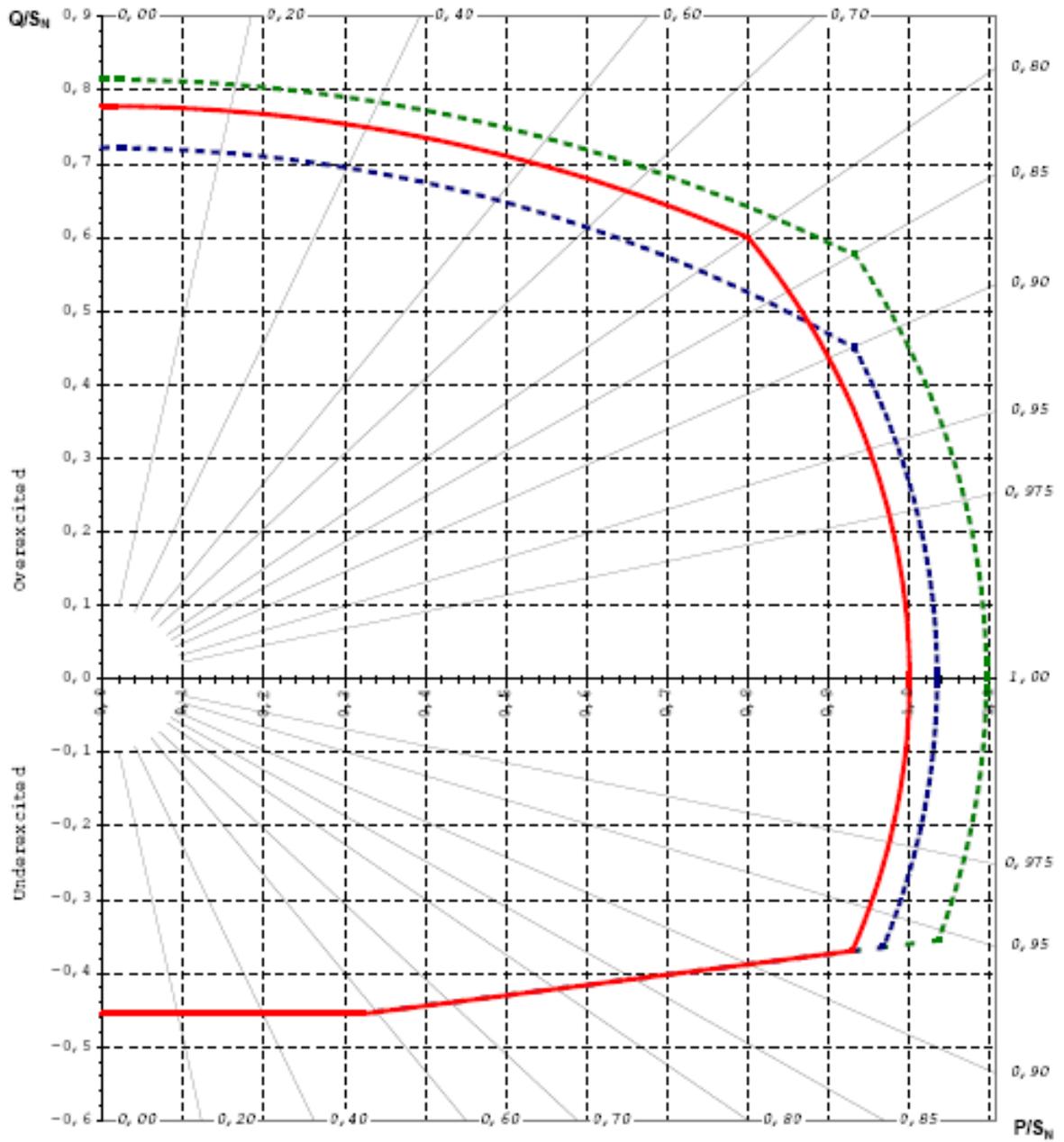
D.1) Potencia máxima de diseño:

Suele ser igual a la potencia activa nominal (potencia aparente nominal por el factor de potencia nominal), aunque puede aparecer también un factor de sobrecarga aceptable (5 a 10 % por encima de la potencia activa nominal)

D.2) Potencia mínima por consideraciones económicas (mínimo técnico) :

Se tiene en cuenta el descenso de rendimiento de las máquinas hidráulicas y térmicas, el aumento de consumo de combustible en las máquinas térmicas, etc.

Los límites habituales oscilan entre el 10 y el 25 % (caso de las turbinas de vapor y las turbinas Francis) de la potencia activa nominal.



Límites operativos de los generadores de la Central Térmica UPM.

Referencias bibliográficas básicas

P.Kundur: Power System Stability and Control, Mc Graw Hill,1994

A.C.Alvarez: Representación de la máquina trifásica en sistemas de potencia,
Publicación DEBA-Universidad Nacional del Sur.

P.Anderson, A.Fouad : Power System Control and Stability, IEEE Press, 1994