Señales Aleatorias y Modulación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

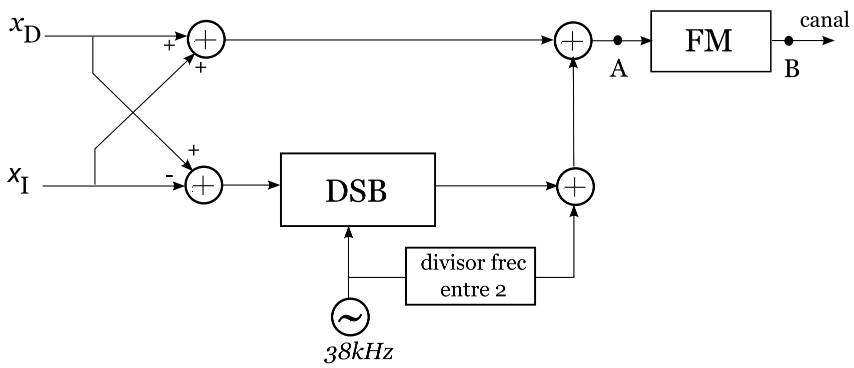
20 de Noviembre de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Se considera un sistema de comunicación FM estereofónico (ver en la figura el diagrama del transmisor). El ancho de banda de las señales del canal izquierdo y derecho es 15 kHz, y ambas están normalizadas. Sus potencias respectivas son $S_{x_I} = S_{x_D} = 0.2$, y están correladas de manera que $E\{x_I(t)x_D(t)\} = 0.15$. Se asumirá que el transmisor tiene un desviación máxima de frecuencia $f_\Delta = 300$ kHz y una potencia de transmisión $S_T = 1kW$. El canal tiene una atenuación en potencia de 30 dB e introduce ruido blanco, gaussiano, con media nula, y densidad espectral de potencia $\eta/2 = 10^{-8} W/Hz$. Se podrá suponer que en la detección, el ruido que afecta a la señal $x_D(t) + x_I(t)$ es independiente del ruido que afecta a la señal $x_D(t) - x_I(t)$.



(a) Dibujar el diagrama del receptor.

(b) Bosquejar el espectro de la señal antes del modulador FM (punto A).

(c) Bosquejar el espectro del ruido luego del demodulador FM del receptor.

(d) Hallar la SNR_D, para la señal monofónica, es decir $x_I(t) + x_D(t)$.

(e) Hallar la SNR_D, para cada señal $x_I(t)$ y $x_D(t)$.

Problema 2 [20 pts.]

Se tiene un sistema de telecontrol que utiliza modulación AM. La señal transmitida $x_c(t)$, llega a destino con un eco interferente aditivo de menor amplitud, $x_I(t) = \alpha\, x_c(t - t_d)$ donde $0 < \alpha \ll 1$. El tiempo de eco t_d se mide experimentalemente y luego se elige la frecuencia de la portadora f_c de forma que se cumpla la siguiente relación $2\pi f_c t_d = \frac{\pi}{2}$.
El objetivo es demodular esta señal de forma que el eco interferente afecte lo menos posible la detección. Para el análisis se considera un canal ideal, es decir que no hay ruido y la atenuación es 1.

(a) Dar un diagrama de bloques de un detector sincrónico.

(b) Estimar el error cometido al demodular con un detector sincrónico en función de α y los demás parámetros del problema.

(c) Dar un diagrama de bloques de un detector de envolvente.

(d) Estimar el error cometido al demodular con un detector de envolvente en función de α y los demás parámetros del problema.

(e) Elegir el sistema demodulador que cometa el menor error posible respecto a lo que cada uno de ellos detectaría en ausencia de eco.

Nota: Puede resultar útil el desarrollo, $\sqrt{1+x} \simeq (1 + \frac{1}{2}\,x)$ con $|x| \ll 1$.

Pregunta [10 pts.]

Se transmite información binaria por un canal, enviando durante un tiempo T, una amplitud nula si el bit es 0, o una amplitud $A\sqrt{L}$ si el bit es 1. Los bits son equiprobables e independientes entre sí. El canal tiene una atenuación en potencia L. El receptor introduce ruido aditivo, blanco y gaussiano (AWGN), con densidad espectral de potencia $\eta/2$. El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda $B = 1/T$ (que se supondrá que no modifica los pulsos) y V es el umbral de decisión.

(a) Calcular la potencia de la señal recibida y la potencia de ruido previo al muestreador.

(b) Hallar el umbral óptimo de decisión y la probabilidad de error resultante.

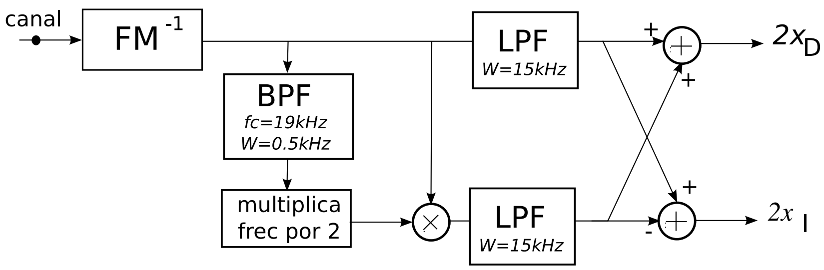
Ahora se modifica el protocolo de transmisión de bits, sin modificar el sistema de transmisión-recepción. Cada bit se envía 3 veces y el receptor decide por mayoría. Por ejemplo, si se desea enviar un '1' se transmite '111', si se recibe (con error) '011', por mayoría, se decide por '1'.

(c) Calcular la nueva probabilidad de error por bit.

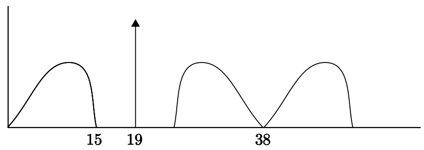
Solución

Problema 1

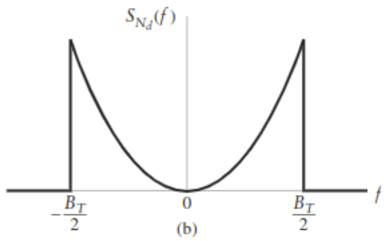
(a)



(b)



(c)



(d) La potencia del ruido en la señal monofónica es:

$$N_{D_{I+D}} = \frac{\eta}{3S_R}W^3$$

$$SNR_{I+D} = 3\left(\frac{f_\Delta}{W}\right)^2 S_x \frac{S_R}{\eta W}$$

Donde:

$$S_R = 1Watt$$

$$S_{x_{(I+D)}} = E\{(S_I + S_D)^2\} = E\{S_I^2 + 2S_I S_D + S_D^2\} = 0.2 + 2 \times 0.15 + 0.2 = 0.7$$

$$W = 15kHz$$

$$\eta = 2 \times 10^{-8} W/Hz$$

$$f_\Delta = 300\ kHz$$

Entonces:

$$SNR_{I+D} = 64.5dB$$

Para que esto sea válido, debemos verificar que estamos trabajando sobre el umbral FM.

$$B_T = 2(f_\Delta + 2W) = 2(300kHz + 30kHz) = 660kHz$$

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{1}{0.0132} = 75{,}8 > 10$$

Por lo tanto estamos por encima del umbral FM y la relación señal a ruido en detección hallada es válida.

(e) Para calcular la SNR_D en $x_I(t)$ y $x_D(t)$ primero debemos calcular la potencia y el ruido en las señales $I + D$ y $I - D$.
Para esto debemos integrar el ruido cuadrático que aparece en la demodulación FM en la banda [38kHz-15kHz, 38kHz+ 15kHz].

$$N_{I-D} = 2\int_{38kHz-15kHz}^{38kHz+15kHz} \frac{\eta f^2}{2S_R} df = \frac{\eta}{3}\left((38kHz + 15kHz)^3 - (38kHz - 15kHz)^3\right)$$
$$N_{I-D} = 9114005$$

y

$$N_{I+D} = 2\int_{0}^{15kHz} \frac{\eta f^2}{2S_R} df = \frac{\eta}{3}(15kHz)^3$$
$$N_{I+D} = 22500$$

con:

$$S_{D_I} = S_{D_D} = 4f_\Delta^2 S_{x_I} = 4 \times 300kHz^2 \times (0.2) = 7.2 \times 10^{10}$$

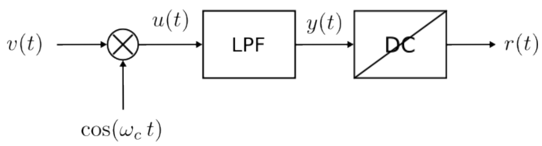
Finalmente:

$$SNR_D = \frac{7.2 \times 10^{10}}{9114005 + 22500} = 48,9dB$$

No es necesario verificar que estamos trabajando por encima del umbral FM porque ya lo verificamos en la parte anterior.
Podemos observar que en la señales estereofonicas tenemos una relación señal a ruido sensiblemente menor al caso de la señal monofónica. Esto se debe a que la potencia de ruido de detección de FM tiene una forma cuadrática y afecta en mayor medida a la señal diferencia, necesaria para regenerar la señal estéreo.

Problema 2

(a)



(b) En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(2\pi f_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d))\cos(2\pi f_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(4\pi f_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\big[\cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c t_d) + \cos(2\pi f_c t_d)\big]$$

ahora usando que se eligió $2\pi f_c$ para que $2\pi f_c t_d = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

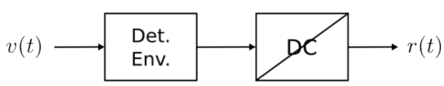
$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(4\pi f_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\sin(4\pi f_c t)$$

y luego filtrando obtenemos que $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$, eliminando el término de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2}\mu x(t)$$

o sea que no hay error.

(c) Ahora veamos en el caso de un detector de envolvente



(d)

$$v(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos(2\pi f_c t) + \alpha A_c(1+\mu x(t-t_d))\cos(2\pi f_c(t-t_d))$$

luego al pasarla por el detector de envolvente tenemos que

$$A_v(t) = A_c\sqrt{(1+\mu x(t))^2 + \alpha^2\left(1+\mu x(t-t_d)\right)^2}$$

Haciendo ahora un desarrollo de primer orden de esta expresión con respecto al parámetro α obtenemos que

$$A_v(t) = A_c(1+\mu x(t))\sqrt{1+\alpha^2\left(\frac{1+\mu x(t-t_d)}{1+\mu x(t)}\right)^2} \approx A_c(1+\mu x(t))\left[1+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1+\mu x(t-t_d)}{1+\mu x(t)}\right)^2\right]$$

y después de eliminar el termino de continua obtenemos $r(t) \approx A_c\mu\, x(t) + \alpha^2\Big(z(t) - \big\langle z(t)\big\rangle\Big)$ donde $z(t) = \frac{A_c}{2}\frac{(1+\mu x(t-t_d))^2}{1+\mu x(t)}$.

(e) Elegimos el detector sincrónico, ya que no presenta error en la recuperación del mensaje $x(t)$.

Pregunta

(a)

$$S_T = E\{x^2(t)\} = A^2 L p(1) + 0\ p(0)$$

Como son equiprobables

$$S_T = \frac{A^2 L}{2}$$

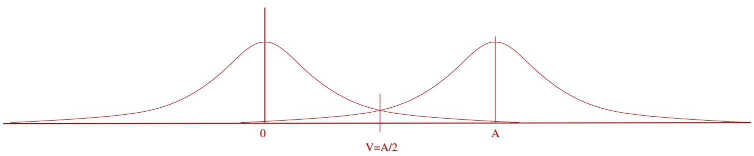
por lo que la señal recibida es

$$S_R = S_T/L = \frac{A^2}{2}$$

Para hallar la potencia de ruido previo al muestreador (σ^2), debemos considerar el ruido introducido (AWGN con DEP $\eta/2$) y el ancho de banda del filtro de recepción ($B = 1/T$).
De esta forma, llegamos a que la potencia de ruido queda:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{T}$$

(b) Si no hubiera ruido en el canal y en la hipótesis que el filtro de recepción no deforma los pulsos enviados, tendríamos en el instante de muestreo A o 0 según el bit enviado fuera 1 o 0. La siguiente figura muestra la distribución de probabilidades en el instante de muestreo:



Como ambos valores son equiprobables el umbral de decisión óptimo es en el punto medio, por lo tanto

$$V_o = \frac{A}{2}$$

y la probabilidad de error es la suma de las dos colas de las gaussianas

$$P_e = p(0)\cdot \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + p(1)\cdot \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

De la parte anterior, tenemos que:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{T}.$$

Finalmente:

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4\eta}}\right).$$

(c) En esta forma de usar el sistema hay error en el bit si hubo error en la recepción de 2 o 3 símbolos.

$$P_{e_{\text{total}}} = 3P_e^2(1 - P_e) + P_e^3$$

$$P_{e_{\text{total}}} = 3P_e^2 - 2P_e^3$$