CONTROL PREDICTIVO POR MODELO
ENTREGA

1. CONTROL SIN RESTRICCIONES

1.1.

Considere el sistema lineal

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{1}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Se desea minimizar $\sum_{t=0}^{\infty} x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t)$, con $Q = I$ y $R = 1$.

Calcule P_∞, solución de la ecuación de Ricatti

$$P_\infty = A^\top P_\infty A + Q - A^\top P_\infty B \left(B^\top P_\infty B + R\right)^{-1} B^\top P_\infty A \tag{3}$$

y la matriz de control K_{LQR}.

1.2.

Grafique el diagrama de fase del sistema en lazo cerrado

$$x(k+1) = (A + BK_{LQR})\, x(k) \tag{4}$$

para el conjunto $\mathcal{X} = \{x \mid \|x\|_\infty \leq 5\}$.

1.3.

Pruebe que $V(x) = x^\top P_\infty x$ es una función de Lyapunov para el lazo cerrado en la ecuación (4). ¿Qué implica la existencia de una función de Lyapunov para el sistema (4)? ¿Es consistente con el diagrama de fase? Explique.

2. CONTROL CON RESTRICCIONES

En esta sección consideramos el sistema anterior pero limitamos las acciones al conjunto $\mathcal{U} = \{u \mid |u| \leq 1\}$ y el estado al conjunto $\mathcal{X} = \{x \mid \|x\|_\infty \leq 5\}$.

2.1.

Sea $\mathcal{X}_u = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid u = K_{LQR}x \in \mathcal{U}\right\}$, grafique el conjunto $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_u$.

2.2.

Muestreando mediante una grilla en el conjunto $\mathcal{X}$ describa gráficamente el conjunto de condiciones iniciales para los cuales el sistema en lazo cerrado (4) siempre respeta las restricciones. Es decir, las condiciones iniciales $x(0)$ tales que $x(k) \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_u$ para todo $k \geq 0$. El esquema resultante debería ser similar a la diapositiva 23 del capítulo 7.

2.3.

Escriba el problema de optimización que surge de plantear el problema de control con ventana móvil de tamaño N usando P_∞ como costo terminal y $\mathcal{X}_f = 0$. Muestreando en el conjunto $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_u$ describa gráficamente el conjunto de condiciones iniciales para los cuales el problema es siempre factible, para $N = 5, 10, 20$.

2.4.

Calcule el conjunto $\mathcal{X}_f$ con el método de la elípse de máximo volumen. Repita la parte anterior con el nuevo $\mathcal{X}_f$.

2.5.

Repita la parte anterior con $\mathcal{X}_f$ siendo el mayor conjunto invariante para el controlador lineal $u(k) = K_{LQR}x(k)$.

2.6.

¿Con cuál de los tres métodos se obtiene una mayor región de atracción? Compare los costos.

2.7.

Pruebe que el esquema de ventana movil con $\mathcal{X}_f = 0$ posee las propiedades de factibilidad recursiva y estabilidad (Diapositiva 29 capítulo 7)