Ecuaciones en derivadas parciales

En este capítulo daremos una introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Estudiaremos principalmente dos ecuaciones conocidas como la ecuación de calor y la ecuación de ondas.

0.1. Introducción

Hasta ahora hemos estado estudiando ecuaciones diferenciales de una única variable. Las soluciones a los problemas vistos hasta ahora solo dependían del tiempo. Pero no hemos visto funciones que dependan de dos o más variables, donde en la ecuación diferencial puede relacionar la función con sus derivadas parciales.

En este capítulo veremos algunos ejemplos sencillos de funciones de dos variables que dependen del tiempo y de la posición. Dada una función $U(t,x)$, tendremos ecuaciones que relaciones U con sus derivadas temporales $(U_t, U_{tt}, \ldots)$ y sus derivadas dimensionales $(U_x, U_{xx}, \ldots)$.

A diferencia del resto del curso, trataremos de resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales y no realizaremos un estudio cualitativo.

0.2. Ecuación de calor

Comenzaremos estudiando esta ecuación en derivadas parciales. Consideremos una barra de largo L adiabática salvo en los bordes de la barra. Esto quiere decir que intercambia calor con el ambiente solo por los bordes (con un aislante alrededor de la barra). Además, consideraremos que la barra es delgada, o tiene variaciones de temperatura transversales despreciables con respecto a la variación de temperatura longitudinal. Por esta razón consideraremos que la temperatura de la barra en determinado instante depende solo de la posición longitudinal y tiene temperatura constante en cada sección transversal. Con estas hipótesis, se puede obtener que la ecuación que rige en este sistema es:

$$U_t(t,x) = U_{xx}(t,x) \tag{0.1}$$

donde $U(t,x)$ representa la temperatura de la barra en el tiempo t en la posición x. Esta ecuación tiene infinitas soluciones distintas. No solo depende de la temperatura inicial, si no que también depende de la transferencia de calor en los bodes de la barra. Dada una distribución inicial de temperatura, la temperatura de la barra no evolucionará igual si ponemos un hielo en los bordes o si colocamos algo caliente. Consideraremos el siguiente problema con condiciones iniciales, conocido como problema de Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en} [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = u_0(x) \quad x\in[0,L] \\ U(t,0) = f_1(t) \quad t\in[0,+\infty) \\ U(t,L) = f_2(t) \quad t\in[0,+\infty) \end{cases} \tag{0.2}$$

donde a la primer condición se la referirá como condición inicial ya que es la distribución de temperaturas en el tiempo $t=0$. Las últimas dos son las conocidas como condiciones de borde.

0.2.1. Ecuación de calor con condiciones de bordes nulas

Empezaremos tratando de resolver el problema de Cauchy-Dirichlet simplificando las condiciones de bordes. Con esta simplificación, el problema a resolver sería el siguiente:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_t = U_{xx} \text{ para todo } (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = u_0(x) \text{ para todo } x\in[0,L] \text{ con } u_0 \text{ continua en } [0,L] \\ u_0(0) = u_0(L) = 0 \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \text{ para todo } t\in[0,+\infty) \end{cases} \tag{0.3}$$

Físicamente, se podría obtener este problema si la barra está en contacto con algo a cero grados en sus bordes. Observar que si consideramos el caso particular donde u_0 es la función nula, tenemos una barra con temperatura inicial cero y sus bordes a temperatura contante cero. En este caso, no hay diferencia de temperaturas y por lo tanto no hay transferencia de calor, manteniéndose la barra en equilibrio térmico a cero grados. La solución a ese problema sería la solución trivial $U(t,x)=0$.

Si u_0 es distinto de la función nula, la función $U(t,x)=0$ no será una solución al problema ya que no verifica la condición inicial $U(0,x)=u_0(x)$.

Para resolverla utilizaremos un método conocido como **variables separables**. El mismo consiste en suponer que las soluciones son de la forma:

$$U(t,x)=T(t)X(x). \tag{0.4}$$

Suponiendo que existe una solución de este estilo, veamos que implica para T y X verificar la ecuación diferencial y las condiciones de borde del problema (0.3).

1. $U_t=U_{xx} \Rightarrow T'(t)X(x)=T(t)X''(x) \Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualado a una función que depende de la posición. De modo que:
$$\frac{d}{dt}\frac{T'}{T}(t)=\frac{d}{dt}\frac{X''}{X}(x)=0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t)=\mu \text{ (cte)} \Rightarrow \frac{T'}{T}(t)=\frac{X''}{X}(x)=\mu \text{ (cte)}$$
Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales.
$$\begin{cases} T'-\mu T=0 \\ X''-\mu X=0 \end{cases}$$
2. Como $0=U(t,0)=T(t)X(0)=0 \Rightarrow T(t)=0$ o $X(0)=0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $U(t,x)=0$ la cual no verifica la condición inicial si u_0 no es la función nula. Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0)=0$.
3. $0=U(t,L)=T(t)X(L)=0 \Rightarrow X(L)=0$. Descartamos la opción $T(t)=0$ por la misma razón que en el caso anterior.

En resumen:

$$\begin{cases} T'(t)-\mu T(t)=0 \\ X''(x)-\mu X(x)=0 \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$$

De la primera condición obtenemos que:

$$T'-\mu T=0 \Rightarrow T(t)=C_0e^{\mu t} \text{ con } C_0\in\mathbb{R}.$$

De la ecuación $X''-\mu X=0$ procederemos calculando P el polinomio característico.

$$P(\lambda)=\lambda^2-\mu=0 \Rightarrow \lambda^2=\mu$$

En consecuencia, la forma de $X(x)$ depende del valor de μ. Discutiremos según los posibles valores de μ.

- Caso (a): $\mu>0$.
  Si $\mu>0$ existe un $\alpha\in\mathbb{R}^+$ tal que $\mu=\alpha^2$.
  $$\mu=\alpha^2 \Rightarrow X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}.$$
  Imponiendo las condiciones $X(0)=0$ y $X(L)=0$ se obtiene:
  $$\begin{cases} X(0)=A+B=0 \\ X(L)=Ae^{\alpha L}+Be^{-\alpha L} \end{cases} \Rightarrow \alpha=0 \text{ o } A=B=0$$
  La primera condición no es válida ya que supusimos $\mu=\alpha^2>0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x)=0$ lo que resultaría nuevamente en la función $U(t,x)=0$. Por ende, μ no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\mu=0$.
  $\mu=0$ implica que $X''=0$, integrando dos veces, obtenemos que
  $$X(x)=Ax+B$$

Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(L) = A.L + B \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, μ tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\mu < 0$.

Si μ es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = -\alpha^2$.

$$\mu = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = Acos(\alpha x) + Bsen(\alpha x)$$

Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = Bsen(\alpha L) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0 \text{ o } sen(\alpha L) = 0$$

Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verificará la segunda opción:

$$sen(\alpha L) = 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow X(x) = Bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Nuestra solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones iniciales nulas sería de la forma:

$$U(t,x) = X(x)T(t) = Bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)C_0 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.^1$$

Llamando $b = C_0 B$:

$$U(t,x) = bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{0.5}$$

Esta función verifica la ecuación diferencial y las condiciones de borde. Si evaluamos esta función en tiempo cero:

$$U(0,x) = bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Esta función podría o no coincidir con u_0. Si u_0 no tiene esta forma, la función encontrada no será solución al problema (0.3). Sin embargo, es fácil verificar que si consideramos una función que sea una suma de funciones con la forma de (0.5) la misma también es solución con condición inicial que es la suma de las condiciones iniciales.

Concretamente, enunciamos el resultado cuya demostración es muy fácil.

Proposición 0.1. *Sean $U_1 = b_1 sen\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 t}$ y $U_2 = b_2 sen\left(\frac{n_2\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 t}$ y consideremos la función $U = U_1 + U_2$. Entonces U es solución de la siguiente ecuación:*

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_t = U_{xx} \text{ para todo } (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = b_1 sen\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) + b_2 sen\left(\frac{n_2\pi}{L}x\right) \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \text{ para todo } t \in [0,+\infty) \end{cases} \tag{0.6}$$

Lo mismo sucede si sumamos 3, 4, 5 o una cantidad finita de funciones con la forma (0.5). En conclusión, sabemos resolver el problema de Cauchy-Dirichlet si la condición inicial, es una combinación lineal finita de senos con período $2L/n$.

[1] Sea $n \in \mathbb{N}$, si consideramos el entero $m = -n$ tenemos que $sen(mx) = -sen(nx)$ y $(m)^2 = n^2$. En consecuencia las soluciones son las mismas si consideramos $n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Se puede probar, de forma análoga, el siguiente resultado más general:

Proposición 0.2.

Sea $\{b_k\}$ una sucesión de números reales y $n \in \mathbb{N}$. La función

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

es solución al problema :

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad x \in [0,L] \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Ambos proposiciones se verifican rápidamente verificando las condiciones del problema de Cauchy-Dirichlet .

***Ejemplo* 0.1.**

Resolveremos el siguiente problema de la ecuación de calor con una barra de largo $L = \pi$.

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,\pi) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,\pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,\pi) \\ U(0,x) = 3sen(4x) \quad x \in [0,\pi] \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0 \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

De la deducción anterior, sabemos que la función $U(t,x) = bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ verifica las condiciones de borde y la ecuación diferencial. Podemos ver que si consideramos $n = 4$ y $b = 3$, esta función también verifica la condición inicial. Determinadas estas constantes, la solución a este problema es:

$$U(t,x) = 3sen(4x)e^{-16t}.$$

Verifiquemos que esta función sea solución al problema planteado.

$$\begin{cases} U_t = -3.16sen(4x)e^{-16t} \\ U_x = 3.4cos(4x)e^{-16t} \\ U_{xx} = -3.16sen(4x)e^{-16t} \end{cases} \Rightarrow U_t = U_{xx}.$$

Si evaluamos la función en los bordes:

$$U(t,0) = 0 \qquad U(t,L) = 0$$

Falta verificar la condición inicial.

$$U(0,x) = 3sen(4x)$$

Hemos encontrado una solución a este problema. ○

***Ejemplo* 0.2.**

Ahora resolveremos un nuevo problema con distinta condición inicial. Consideraremos nuevamente una barra de largo $L = \pi$.

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,\pi) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,\pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,\pi) \\ U(0,x) = 2sen(3x) + sen(5x) \quad x \in [0,\pi] \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0 \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Si ahora consideráramos una solución de la forma $U(t,x) = bsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\left(-\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$, vemos que esta no verifica la condición inicial. Sin embargo, si consideramos la suma de dos funciones de este tipo con $b_1 = 2,\ n_1 = 3$ y $b_2 = 1,\ n_2 = 5$ podemos probar que la misma es solución a este problema.

$$U(t,x) = 2sen(3x)e^{-9t} + sen(5x)e^{-25t}.$$

Por lo resuelto anteriormente, sabemos que esta función verifica la ecuación diferencial y condiciones de borde. Si evaluamos en tiempo cero:

$$U(0,x) = 2sen(3x) + sen(5x).$$

Por lo tanto, la función definida es solución al problema. ○

Pues bien, pudimos encontrar una solución al problema de Cauchy-Dirichlet si la condición inicial es una combinación lineal de senos. ¿Pero que sucede si la condición inicial es distinta? ¿Cual es la solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones de borde nulas si tenemos una condición inicial, por ejemplo, $u_0(x) = x(x - L)$?¿Vale considerar una suma infinita de seno?

Para obtener que la suma de soluciones a la ecuación diferencial de calor también era solución, utilizamos la linealidad de la derivada. Sin embargo, la linealidad de la derivada no se tiene porque cumplir cuando tenemos una suma infinita.

Esta última afirmación se basa en que cuando hablamos de una suma infinita, estamos hablando de una convergencia. La expresión $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ no es más que el límite de una sucesión de funciones. Si consideramos como candidato a solución la función $U(t,x) = \sum_0^{+\infty} U_k(t,x)$, donde U_k son de la forma de la ecuación (0.5), $U(t,x)$ no es más que la función a la cual converge la sucesión de funciones $S_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(t,x)$. Por la linealidad de la derivada sabemos que S_n verifica la ecuación de calor.

$$S_{n_t} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^2U_k}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{n} U_k = S_{n_{xx}}.$$

Pero por más que S_n verifica la ecuación diferencial la función a la cual converge (puntual o uniformemente) no tiene porque verificar la ecuación de calor. Si teníamos una sucesión de funciones f_n que convergiera puntual o incluso uniformemente a una función f, esto no implicaba que f_n' converja a f'. Esto no se cumple ni pidiendo la convergencia más fuerte (la convergencia uniforme). En otras palabras, no se tiene porque cumplir que:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{dU_n}{dt} \qquad \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^2U_n}{dx^2}.$$

Sin embargo si esto último se cumpliera podemos ver que $U(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x)$ verificaría la ecuación de calor. Dado que $U_{k_t} = U_{k_{xx}}$ tendríamos que:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k.$$

El teorema que vimos en la sección de convergencia para la derivada, afirmaba que si una sucesión de funciones f_n convergía en un punto x_0 y sus derivadas f_n' convergían uniformemente a una función g, entonces se cumplía que f_n también convergía uniformemente a una función f y esta verificaba que $f' = g$. En los siguientes teoremas, tenemos la aplicación directa de el teorema visto anteriormente pero para las series.

Proposición 0.3 (**Derivada respecto de t**).

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- $S_n(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x)$.
- $S_{n_t}(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}U_k(t,x)$.

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}U_k(t,x).$$

La demostración es directa del teorema visto en el capítulo de convergencia. Análogamente, se cumple con la derivada respecto a la posición (o sea respecto de x).

Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0,x_0)$ converja en algún punto (t_0,x_0). No es necesario pedir que $S_n(t,x)$ converja uniformemente. Se pone la hipótesis de que $S_n(t,x)$ converge uniformemente, porque es de esta forma como lo vamos a usar más adelante.

Proposición 0.4 (**Derivada respecto de x**).

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x)$.
- $S_{n_x}(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t,x)$

Entonces:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t,x).$$

Proposición 0.5 (**Derivada segunda respecto de x).**

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} U_k(t,x)$.
- $S_{n_x}(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t,x)$.
- $S_{n_{xx}}(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t,x)$.

Entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t,x).$$

Demostración:

Con los primeros dos items, por la proposición (0.4) sabemos que:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t,x). \tag{0.7}$$

Ahora trataremos de aplicarle el mismo teorema a S_{n_x}. Dado que S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$ convergen uniformemente, tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2 U_k(t,x)}{dx^2}.$$

Luego, por lo obtenido en la ecuación 0.7 sabemos que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2 U_k(t,x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{dU_k(t,x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) \right) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x).$$

□

Teorema 0.1.

Sea $u_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$ *condición inicial del problema de Cauchy-Dirichlet . Si* $\sum_{k=1}^{n} |b_k|$ *es convergente entonces:*

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \tag{0.8}$$

es solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condición de bordes nulas y condición inicial $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(kx)$. *Además* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ *converge uniformemente.*

Demostración:

Se verifican rápidamente las condiciones de borde e iniciales.

$$U(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L} x\right) e^0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = u_0(x)$$

$$U(t,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(0) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}=0$$

$$U(t,L)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(k\pi) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}=0$$

Probemos que U es continua en $[0,+\infty)\times[0,L]$. Sea $U_k(t,x)=b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ veamos que $S_n=\sum_{k=1}^{n} U_k$ converge uniformemente.

$$|U_k|=\left|b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}\right|\leq |b_k|,\quad t\in[0,+\infty)$$

en la última desigualdad se utilizó que la exponencial (con $t\geq 0$) y el seno son menores o iguales a 1. Por hipótesis sabemos que $\sum_{k=1}^{n}|b_k|$ es convergente y utilizando el criterio del mayorante concluimos que S_n converge uniformemente a U. Como S_n es continua en $[0,+\infty)\times[0,L]$, entonces U es continua en $[0,+\infty)\times[0,L]$.

Falta verificar la ecuación diferencial. Sea $U_k(t,x)=b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ para que se cumpla la ecuación diferencial debemos ver si:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{+\infty}U_k \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{dU_k}{dt}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2}{dx^2}U_k \stackrel{?}{=} \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=1}^{+\infty}U_k=\frac{d^2U}{dx^2}.$$

Debemos verificar que S_{n_t}, S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$ convergen uniformemente, para poder utilizar las proposiciones anteriores y deducir que U verifica la ecuación diferencial. Dado que $S_{n_t}=S_{n_{xx}}$, basta con verificar que S_{n_t} y S_{n_x} convergen uniformemente.

$$S_{n_t}=\sum_{k=1}^{n}U_{k_t}=\sum_{k=1}^{n}-b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$|U_{k_t}|=\left|-b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}\right|\leq\left|b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}\right|$$

Excluimos a los bordes ya que las derivadas no están definidas en los bordes. Empezaremos probandolo para tiempos tal que $0<\delta<t$. Para estos tiempos se cumple que:

$$|U_{k_t}|<\left|b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}\right|,\quad t>\delta>0.$$

Como la serie de b_k converge, sabemos que $|b_k|$ está acotado por un número M.

$$|U_{k_t}|<M\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}\quad t>\delta>0,$$

la sucesión asociada a la sucesión de la derecha es convergente de modo que nuevamente por el criterio del mayorante concluimos que S_{n_t} converge uniformemente en $(\delta,+\infty)\times(0,L)$.

Luego por la proposición 0.3 se cumple que:

$$U_t=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty}U_k(t,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}U_k(t,x) \text{ para } t>\delta>0.$$

Análogamente se puede proceder con S_{n_x} y deducir que converge uniformemente (para $t>\delta>0$). Como $S_{n_t}=S_{n_{xx}}$ y S_{n_t} converge uniformemente también lo hace $S_{n_{xx}}$. Luego por la proposición 0.5 se cumple:

$$U_{xx}=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=1}^{+\infty}U_k(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2}{dx^2}U_k(t,x) \text{ para } t>\delta>0.$$

Finalmente utilizando que $U_{k_t}=U_{k_{xx}}$:

$$U_t=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{+\infty}U_k(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d}{dt}U_k(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2}{dx^2}U_k(t,x)=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=1}^{+\infty}U_k(t,x)=U_{xx} \text{ para } t>\delta>0.$$

Finalmente, dado $(t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L)$ consideramos $\delta>0$ tal que $t>\delta>0$ y haciendo el razonamiento anterior, tenemos probado el resultado.

$\square$

Observación:

- Si bien $u_0(x)$ puede ser una función no derivable, al pasar un instante ($t > 0$) la función temperatura de la barra $U(t, x)$ va a ser C^∞. Esto se debe a que si seguimos derivando U (temporal o espacialmente), gracias a la exponencial las series seguirán convergiendo uniformemente.

***Ejemplo* 0.3.**

Veamos como resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, \pi) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ U(0, x) = x(x - \pi) \quad x \in [0, \pi] \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Como ya vimos en el capítulo Series de Fourier, la función $x(x - \pi)$ la podemos escribir como una suma infinita de senos. Para esto lo que hicimos fue considerar la extensión impar de la función en $[-\pi, \pi]$ y luego la repetición de este intervalo. Considerando esta extensión, se obtuvo que:

$$u_0(x) = x(x - \pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} sen(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

En este caso los coeficientes de Fourier b_k son:

$$b_k = 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3}.$$

Dado que la serie de b_k converge, podemos utilizar el teorema 0.1 que nos afirma que la función

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} sen(kx)e^{-k^2 t}$$

es una solución al problema. Si deseáramos verificar que esta función es solución, podemos verificar rápidamente las condiciones de bordes y la inicial. Para verificar la ecuación diferencial, debemos actuar de forma análoga a la demostración del teorema 0.1.

$$|U_k| = \left|4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} sen(kx)e^{-n^2 t}\right| \le \left|4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3}\right| \le \frac{8}{k^3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{c.u} U.$$

$$|U_{k_x}| = \left|4k\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} cos(kx)e^{-n^2 t}\right| \le \left|4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\right| \le \frac{8}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_{k_x} \xrightarrow{c.u} U_x.$$

$$|U_{k_t}| = \left| - 4k^2\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} sen(kx)e^{-k^2 t}\right| \le \left|4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k} e^{-n^2\delta}\right|, \quad t > \delta > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_{k_t} \xrightarrow{c.u} U_t$$

donde con la última acotación de $|U_{k_t}|$ deducimos que la serie de U_{k_t} converge para tiempos mayores a δ. Tomando en cuenta que δ puede ser tan chico como queramos lo podemos concluir para cualquier tiempo positivo. Gracias a los proposiciones vistas anteriormente, con esto podemos concluir que U verifica la ecuación de calor. $\bigcirc$

Es de esperarse que a medida que vaya pasando el tiempo la temperatura de la barra se estabilice. En especial, si los bordes de la barra se encuentra algo a cero grados y fuera de eso la barra no recibe calor, uno esperaría que la temperatura de toda la barra tienda a cero grados. Veamos que esto si sucede.

Teorema 0.2.

Sea $U(t, x)$ de la forma (0.8) con la serie de b_k convergente la solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones de borde nulas. Entonces $U(t, x)$ tiende a la función nula cuando t tiende a más infinito.

Demostración:

Usando que $k \geq 1$:

$$|U(t,x)| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right| < \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \right|$$

$$\Rightarrow |U(t,x)| \leq e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \xrightarrow{t \to +\infty} 0$$

Para afirmar que el módulo tiende a cero utilizamos que la serie que aparece es la condición inicial la cual está acotada. □

0.2.2. Ecuación de calor con condiciones de bordes constantes

Ahora estudiaremos el problema:

$$(0.9) \qquad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty) \times [0,L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L) \\ U(x,0) = u_0(x) \quad x \in [0,L] \\ U(t,0) = A \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \\ U(t,L) = B \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

0.2.2.1. Solución estacionaria

Antes de estudiar el problema anterior, trataremos de encontrar una solución estacionaria (no depende del tiempo) al problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty) \times [0,L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L) \\ U(t,0) = A \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \\ U(t,L) = B \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Si la solución es estacionaria, la solución se mantendrá como en su condición inicial. Si suponemos que este problema tiene una solución estacionaria $U(t,x) = u_e(x)$ tendríamos que:

$$U_{e_t} = 0 = U_{e_{xx}} \Rightarrow u_e(x) = ax + b$$

Para que verifique las condiciones de borde:

$$u_e(0) = b = A, \; u_e(L) = aL + b = B \;\; \Rightarrow u_e(x) = \frac{B-A}{L}x + A.$$

Este resultado es intuitivo ya que si la barra es de un material homogéneo, se esperaría que la distribución de temperaturas fuera lineal.

0.2.2.2. Solución no estacionaria

Si buscamos una solución distinta a la estacionaria (condición inicial distinta a $u_e(x)$), podemos empezar tratando de resolver el problema por el método de variables separables como se hizo en el problema con condiciones de borde nulas. Supongamos que la solución tiene la forma:

$$U(t,x) = T(t)X(x)$$

En este caso, si imponemos las condiciones de borde tenemos que:

$$U(t,0) = T(t)X(0) = A \Rightarrow T(t) = cte \Rightarrow U(t,x) = U(x) = u_e(x)$$

Si buscamos soluciones de la forma $U(t,x) = T(t)X(x)$ la única que encontramos es la solución estacionaria, la cual no nos sirve si nuestra condición inicial no es la recta u_e. Este método no nos sirve directamente cuando las condiciones de borde son distintas a las nulas.

Intuitivamente podríamos pensar que la solución a este problema podría ser la suma de una función estacionaria más una transitoria. A medida que pasa el tiempo uno esperaría que la temperatura tienda a estabilizarse, tendiendo a u_e (la función transitoria tienda a la función nula). Consideremos una posible solución al problema de la forma:

$$U(t,x) = u_e(x) + \tilde{U}(t,x)$$

Imponiendo que esta función sea solución, podemos ver que debe verificar la función $\tilde{U}$. De la ecuación diferencial:

$$\begin{array}{l} U_t = \tilde{U}_t \\ U_{xx} = U_{e_{xx}} + \tilde{U}_{xx} = \tilde{U}_{xx} \end{array} \Rightarrow \tilde{U}_t = \tilde{U}_{xx}$$

Condiciones de borde:

$$U(t,0) = u_e(0) + \tilde{U}(t,0) = A + \tilde{U}(t,0) = A \Rightarrow \tilde{U}(t,0) = 0$$

$$U(t,L) = u_e(L) + \tilde{U}(t,L) = B + \tilde{U}(t,L) = B \Rightarrow \tilde{U}(t,L) = 0$$

Condición inicial:

$$U(0,x) = u_e(x) + \tilde{U}(0,x) = u_0(x) \Rightarrow \tilde{U}(0,x) = u_0(x) - u_e(x)$$

En resumen, la función $\tilde{U}$ deberá ser solución a:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty) \times [0,L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L) \\ U(x,0) = u_0(x) - u_e(x) \quad x \in [0,L] \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Hemos transformado el problema original de condiciones de borde constante en uno con condiciones de borde nulo. Si sabemos resolver este último, sumándole la solución estacionaria ya tendremos una solución al problema original.

***Ejemplo* 0.4.**

Trataremos de encontrar una solución al siguiente problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,1) \text{ y continua en} [0,+\infty) \times [0,1] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1) \\ U(x,0) = sen(\pi x) + x \quad x \in [0,1] \\ U(t,0) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \\ U(t,L) = 1 \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}.$$

Para esto utilizaremos lo que vimos recién. La solución estacionaria este problema es:

$$u_e(x) = x.$$

Si suponemos que una posible solución a este problema es de la forma:

$$U(t,x) = u_e(x) + \tilde{U}(t,x)$$

obtenemos que la función $\tilde{U}$ debe ser solución a:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty) \times (0,1) \text{ y continua en } [0,+\infty) \times [0,1] \\ U_t = U_{xx} \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1) \\ U(x,0) = sen(\pi x) \quad x \in [0,1] \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Este problema ya lo sabemos resolver. En este caso no es necesario encontrar la serie de Fourier de $u_0(x)$ ya que la misma función ya tiene la forma $sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. La solución a este problema será de la forma de la ecuación (0.5).

$$\tilde{U}(t,x) = sen(\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

Por ende, la solución al problema original es:

$$U(t,x) = x + sen(\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

$\bigcirc$

0.3. Ecuación de la cuerda

Ahora analizaremos el movimiento en el plano de una cuerda flexible. Definiremos $U(t, x)$ como la altura de la cuerda en la posición x y tiempo t, donde la altura la medimos desde la posición media de la cuerda (o la posición de equilibrio). Esto se encuentra representado en la figura (1). Considerando que cada punto de la cuerda se mueve sólo perpendicularmente al eje ox y no hay rozamiento, la ecuación que rige el movimiento de la cuerda es:

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}$$

donde c es una constante real. Al fijar un tiempo t_0 la función $U(t_0, x)$ sería como sacarle una foto a la cuerda en ese instante. La derivada respecto al tiempo U_t representa las velocidades de cada punto y la derivada segunda U_{tt} representa las aceleraciones.

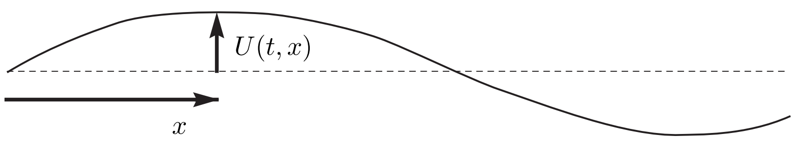

Figura 1. Ecuación de la cuerda

Intuitivamente uno pensaría que para que el problema quede definido esta vez necesitaríamos más condiciones. No solo necesitaríamos la posición inicial ($U(0, x)$) si no también las velocidades iniciales en cada punto para saber como se van a mover ($U_t(0, x)$). A su vez el movimiento también será distinto si tenemos una cuerda con extremos fijos, una cuerda con extremos móviles, una cuerda infinita, etc.

0.3.1. Cuerda con extremos fijos

Empezaremos analizando el caso de una cuerda de largo L con extremos fijos. El problema a considerar es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_{tt} = c^2 U_{xx} \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = u_0(x) \quad x\in[0,L] \\ U_t(0,x) = v_0(x) \quad x\in[0,L] \\ U(t,0) = U(t,L) = 0 \quad t\in[0,+\infty) \end{array}\right. . \tag{0.10}$$

En este caso, obtendríamos una solución estacionaria si u_0 y v_0 son las funciones nulas. Si alguna de estas no es nula, la cuerda se moverá. Estudiaremos el caso no trivial donde al menos una de estas dos funciones no es nula.

Trataremos de resolverlo de la misma forma que la ecuación de calor, a través del método de variables separables. Si la solución al problema es de la forma $U(t, x) = T(t)X(x)$ tenemos que:

1. $$U_{tt} = c^2 U_{xx} \Rightarrow T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T''}{T}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x)$$
   De forma análoga a lo que realizamos en la ecuación de calor, dado que en la última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualada a otra función que depende de la posición, ambas deben ser constantes.
   $$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) = \mu \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T'' - \mu c^2 T = 0 \\ X'' - \mu X = 0 \end{array}\right.$$
   Pasamos de una ecuación en derivadas parciales a 2 ecuaciones ordinarias de segundo orden.
2. $U(t, 0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. De la primera opción obtendríamos la solución trivial que solo es válida si u_0 y v_0 es la función nula, de modo que nos quedaremos con la segunda opción $X(0) = 0$.
3. $U(t, L) = T(t)X(L) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$. Razonando de forma análoga a la condición de borde anterior descartamos que $T(t) = 0$.

Si analizamos las condiciones de borde obtenidas para $X(x)$ y la ecuación diferencial que debe cumplir, son las mismas que las obtenidas de la ecuación de calor. Por lo tanto, si discutiéramos según las raíces del polinomio característico la forma de la función $X(x)$ alcanzaríamos el mismo resultado. En consecuencia:

$$\mu = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X(x) = Asen\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Nos falta saber la forma de T. De la ecuación diferencial tenemos que:

$$T'' - \mu c^2 T = 0 \Rightarrow T'' + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2 T = 0$$

El polinomio característico de este problema es:

$$\lambda^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2$$

$$T(t) = Bcos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + Csen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)$$

Ahora si, la solución a (0.10) sería:

$$U(t,x) = Asen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(Bcos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + Csen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

$$U(t,x) = sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(Ecos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + Fsen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right) \tag{0.11}$$

Para que esta función sea solución deberá verificar las condiciones iniciales.

$$U(0,x) = Esen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$U_t(t,x) = \frac{k\pi c}{L}sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(-Esen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + Fcos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

$$\Rightarrow U_t(0,x) = F\frac{k\pi c}{L}sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Si las condiciones iniciales no tienes esta forma, procederemos a considerarnos la serie de Fourier, al igual que en el caso de la ecuación de calor.

Teorema 0.3.

Sea $u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *y* $v_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *las condiciones iniciales del problema (0.10). Si*

$$|b_k| < \frac{M}{k^4} \qquad |b'_k| < \frac{N}{k^3} \quad N, M \in \mathbb{R}$$

entonces:

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

con $A_k = b_K$ *y* $B_k = b'_k\frac{L}{k\pi c}$ *es solución al problema (0.10).*

Demostración:

Empecemos verificando las condiciones de borde y la posición inicial.

$$U(t,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} sen(0)\left(b_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b'_k\frac{L}{k\pi c}sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right) = 0$$

$$U(t,L) = \sum_{k=1}^{+\infty} sen\left(k\pi\right)\left(b_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b'_k\frac{L}{k\pi c}sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right) = 0$$

$$U(0,x)=\sum_{k=1}^{+\infty} sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(b_k cos(0)+b'_k\frac{L}{k\pi c}sen(0)\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)=u_0(x)$$

Para verificar la velocidad inicial v_0, debemos derivar la función U. Para esto necesitaremos las proposición (0.3). Llamaremos $S_n=\sum_{k=1}^{n} U_k$, con U_k los términos de la serie de U. Dado que U_k tiene la forma de la ecuación (0.10) verifican que $U_{k_{tt}}=c^2U_{k_{xx}}$. Debemos verificar que S_n y S_{n_t} convergen uniformemente para utilizar la proposición mencionada. Con las acotaciones de las hipótesis de b_k y b'_k obtenemos que:

$$A_k<\frac{M}{k^4} \qquad B_k<\frac{L}{\pi c}\frac{N}{k^4}$$

$$|U_k|=\left|sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)\right|\leq |A_k|+|B_k|$$

$$|U_k|<\frac{M}{k^4}+\frac{L}{\pi c}\frac{N}{k^4}\Rightarrow S_n\xrightarrow{c.u} U.$$

Veamos ahora con la derivada S_{n_t}.

$$S_{n_t}=\sum_{k=1}^{n} U_{k_t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi c}{L}sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(-A_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

$$|U_{k_t}|=\left|\frac{k\pi c}{L}sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(-A_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)\right|$$

$$|U_{k_t}|\leq\frac{k\pi c}{L}\left(|A_k|+|B_k|\right)<\frac{k\pi c}{L}\left(\frac{M}{k^4}+\frac{L}{k\pi c}\frac{N}{k^3}\right)=\frac{\pi c}{L}\frac{M}{k^3}+\frac{N}{k^3}\Rightarrow S_{n_t}\xrightarrow{c.u}\sum_{k=1}^{+\infty} U_{k_t}$$

Podemos afirmar gracias a la proposición 0.3 que:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{+\infty} U_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{dU_k}{dt}$$

$$\Rightarrow U_t(0,x)=\sum_{k=1}^{+\infty} U_{k_t}(0,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi c}{L}sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)B_k=\sum_{k=1}^{+\infty} b'_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)=v_0(x).$$

Ahora si, hemos verificado todas las condiciones iniciales. La condición faltante es la ecuación en derivadas parciales. Para esto debemos proceder de igual manera que en la ecuación de calor. Ya hemos verificado que S_n y S_{n_t} convergen uniformemente. Haría falta verificar que también lo hacen $S_{n_{tt}}$, S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$. Dado que $S_{n_{tt}}=c^2S_{n_{xx}}$, si una de ellas converge también lo hará la otra. En resumen, resta verificar que $S_{n_{tt}}$ yS_{n_x} convergen uniformemente.

$$S_{n_{tt}}=\sum_{k=1}^{n} U_{k_{tt}}=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2 sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

$$|U_{k_{tt}}|=\left|\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2 sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)\right|$$

$$|U_{k_{tt}}|\leq\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2\left(|A_k|+|B_k|\right)<\frac{\pi c}{L}\left(\frac{\pi c}{L}\frac{N}{k^2}+\frac{M}{k^2}\right)\Rightarrow S_{n_{tt}}\xrightarrow{c.u}\sum_{k=1}^{+\infty} U_{k_{tt}}$$

Esto nos permite afirmar que:

$$\frac{d^2U}{dt^2}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{dU_k}{dt}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2U_k}{dt^2}.$$

Falta ver la convergencia de S_{n_x}.

$$S_{n_x}=\sum_{k=1}^{n} U_{k_x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{L}cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

$$|U_{k_x}|=\left|\frac{k\pi}{L}cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)+B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)\right|$$

$$|U_{k_x}|\leq\frac{k\pi}{L}(|A_k|+|B_k|)<\frac{\pi}{L}\frac{M}{k^3}+\frac{1}{c}\frac{N}{k^3}\Rightarrow S_{n_x}\xrightarrow{c.u}\sum_{k=1}^{+\infty} U_{k_x}$$

Con esto y sabiendo que $S_{n_{xx}}$ también converge uniformemente (dado que $S_{n_{tt}}$ lo hace) afirmamos gracias a la proposición 0.5 que:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dx^2}.$$

Luego usando que $U_{k_{tt}} = c^2 U_{k_{xx}}$:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dt^2} = c^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dx^2} = c^2 \frac{d^2U}{dx^2}.$$

□

Teorema 0.4.

La única solución C^2 al problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_{tt} = c^2 U_{xx} \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = 0 \quad x\in[0,L] \\ U_t(0,x) = 0 \quad x\in[0,L] \\ U(t,0) = 0 \quad t\in[0,+\infty) \\ U(t,L) = 0 \quad t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

es la función nula.

Demostración:

Se verifica rápidamente que la función nula es solución a este problema. Debemos ver que no hay ninguna otra solución. Para la demostración, supondremos que hay otra solución $U(t,x)$ y utilizaremos la función de energía de la cuerda. Se puede probar, que la energía de la cuerda está representada por:

$$E(t) = \int_0^L U_x^2 + \frac{U_t^2}{c^2} dx$$

Veremos que la derivada respecto al tiempo de la energía es nula, es decir que la misma se conserva. Esto tiene sentido físico, ya que la ecuación de la cuerda considerada es válida si despreciamos el rozamiento.

$$\dot{E}(t) = \int_0^L 2U_xU_{xt} + \frac{2U_tU_{tt}}{c^2}\ dx = 2\int_0^L U_xU_{tx} + U_tU_{xx}\ dx = 2\int_0^L \frac{d(U_xU_t)}{dx}\ dx$$

$$\dot{E}(t) = 2[U_x(t,L)U_t(t,L) - U_x(t,0)U_t(t,0)]$$

En la segunda igualdad se utilizó que $U_{xt} = U_{tx}$, donde estamos utilizando la hipótesis de que la función sea de clase C^2. Dado que $U(t,0)$ y $U(t,L)$ son constantes, al derivada respecto al tiempo de estas funciones es cero, obteniendo que:

$$\dot{E}(t) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$$

Podemos obtener la energía inicial evaluando en la fórmula $U_x(0,x)$ y $U_t(0,x)$. Por hipótesis sabemos que $U_t(0,x) = 0$ y como $U(0,t)$ es constante también lo es $U_x(0,x) = 0$ (no hay variaciones espaciales). De modo que la energía inicial es nula.

$$E(t) = \int_0^L U_x^2 + \frac{U_t^2}{c^2} = 0 \Rightarrow U_x = 0 \text{ y } U_t = 0 \Rightarrow U(t,x) = cte \Rightarrow U(t,x) = 0.$$

Al ser el integrando positivo, la única opción de que esa integral sea nula es que el integrando sea nulo. En consecuencia la función deberá ser constante y la única constante que verifica las condiciones de borde del problema es el cero. □

Teorema 0.5 (Unicidad).

El problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,+\infty)\times(0,L) \text{ y continua en } [0,+\infty)\times[0,L] \\ U_{tt} = c^2 U_{xx} \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,L) \\ U(0,x) = u_0(x) \quad x\in[0,L] \\ U_t(0,x) = v_0(x) \quad x\in[0,L] \\ U(t,0) = f_1(t) \quad t\in[0,+\infty) \\ U(t,L) = f_2(t) \quad t\in[0,+\infty) \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución $U \in C^2$.

Demostración:

Supongamos que hay dos soluciones $\tilde{U}$ y $\overline{U}$ ambas C^2. Si consideráramos la función:

$$U(t,x) = \tilde{U}(t,x) - \overline{U}(t,x)$$

la misma sería solución al problema con condiciones iniciales y de borde nulas. Al ser resta de dos funciones C^2 U también será C^2. Luego por el teorema 0.4 se obtiene que:

$$U(t,x) = 0 \Rightarrow \tilde{U}(t,x) = \overline{U}(t,x).$$

$\square$

0.3.2. Método de propagación de ondas para una cuerda infinita

Trataremos de encontrar la soluciones a la ecuación de la cuerda para una cuerda infinita.

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad U_{tt} = c^2 U_{xx}.$$

Buscamos funciones $U(t,x)$ que verifiquen lo anterior. Esta vez trataremos de resolver esta ecuación realizando el cambio de variable:

$$\alpha = x + ct \qquad \beta = x - ct$$

Con este cambio tenemos que:

$$U_x = U_\alpha \alpha_x + U_\beta \beta_x = U_\alpha + U_\beta$$
$$U_{xx} = U_{\alpha\alpha}\alpha_x + U_{\beta\alpha}\alpha_x + U_{\alpha\beta}\beta_x + U_{\beta\beta}\beta_x = U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + U_{\alpha\beta} + U_{\beta\alpha}.$$

Si buscamos soluciones de clase C^2 podemos utilizar que $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$ obteniendo:

$$U_{xx} = U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + 2U_{\alpha\beta}.$$
$$U_t = U_\alpha \alpha_t + U_\beta \beta_t = c(U_\alpha - U_\beta)$$
$$U_{tt} = c(U_{\alpha\alpha}\alpha_t + U_{\beta\alpha}\alpha_t + U_{\alpha\beta}\beta_t + U_{\beta\beta}\beta_t) = c^2(U_{\alpha\alpha} - 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta}).$$

Dado que queremos buscar soluciones estas deben satisfacer la ecuación de la cuerda.

$$U_{tt} = c^2 U_{xx} \Rightarrow c^2(U_{\alpha\alpha} - 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta}) = c^2(U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + 2U_{\alpha\beta}) \Rightarrow U_{\alpha\beta} = 0.$$

Realizando este cambio de variable, la ecuación en derivadas parciales obtenida ($U_{\alpha\beta} = 0$) es significativamente más sencilla.

$$U_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow U_\alpha = f(\alpha) \Rightarrow U(\alpha,\beta) = F(\alpha) + G(\beta)$$

La primera deducción se realiza ya que si la derivada de U_α respecto a β es cero, la función U_α no depende de β. Luego si integramos U_α respecto a α no quedará una primitiva de $f(\alpha)$ más una constante respecto a α (que no dependa de α), pero si podría depender de β. Hasta ahora hemos obtenido que nuestra solución tendría la forma:

$$U(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{0.12}$$

donde F y G son funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, a las cuales les pediremos que sean de clase C^2 para que U sea de clase C^2. Recordar que esta hipótesis la usamos al establecer que $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$.

Tratemos de darle un sentido físico a esto último. Tanto F como G son funciones que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, con sus respectivos gráficos en el plano. Si en particular estudiamos F, en el tiempo cero se tiene que $\alpha = x$ por lo tanto en el instante cero la función $F(x)$ tiene el mismo gráfico que $F(\alpha)$. Si ahora lo estudiamos en el tiempo $t = 1$ tendríamos que $F(x + c)$, lo que representa la función anterior corrida según el eje x. En otras palabras, el gráfico de F tiene siempre la misma forma pero se va corriendo a medida que pasa el tiempo. La velocidad a la que se mueve la onda, es justamente la constante c.

Ocurre exactamente lo mismo con G, la diferencia es que a medida que aumenta el tiempo el gráfico de G se moverá en sentido contrario. La interpretación a esto, es que cualquier solución se puede considerar como la combinación de dos ondas moviéndose en sentido contrario. Por esta razón es que a este método se lo conoce como método de propagación de ondas.

Que la velocidad a la que se mueva la onda sea c no es casualidad. Cuando se trabaja con una onda como lo es el sonido, la constante c es justamente la velocidad a la que se propaga la onda en ese medio donde se esté trabajando (depende si es el aire, agua, etc). Cuando se trabaja con la luz, esa constante c representa la velocidad de la luz.

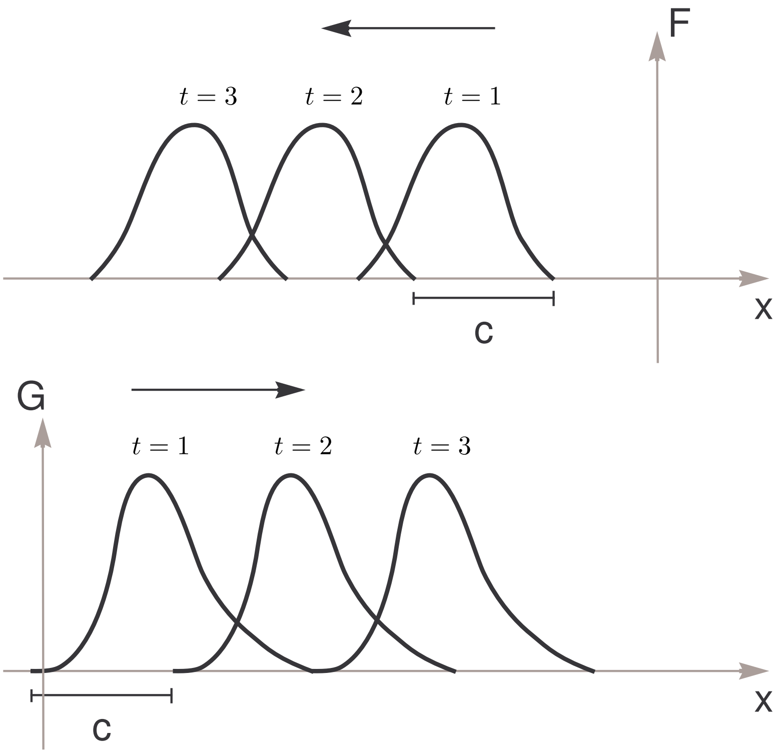

Figura 2. Interpretación de la solución a la ecuación de ondas

0.3.3. Cuerda infinita con condiciones iniciales

Hemos encontrado una solución genérica para las ecuación en derivadas parciales de la onda. Veamos que paso si le agregamos condiciones iniciales.

Teorema 0.6.

Sea el problema:

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ U(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ U_t(0,x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.13}$$

con $u_0 \in C^2$ y $v_0 \in C^1$, entonces:

$$U(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_(s)\ ds$$

es una solución al problema (0.13).

Demostración:

Considerando que la forma de la solución será como la ecuación (0.12), las condiciones iniciales implican que:

$$U(0,x) = F(x) + G(x) = u_0(x) \tag{0.14}$$

$$U_t(t,x) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct) \Rightarrow U_t(0,x) = c(F'(x) - G'(x)) = v_0(x).$$

Integrando la última ecuación obtenemos que:

$$\frac{1}{c} \int_0^x v_0(s)\ ds + K = F(x) - G(x) \tag{0.15}$$

Si sumamos las ecuaciones (0.14) y (0.15) obtenemos que:

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s)\ ds + C$$

Restando las mismas ecuaciones se obtiene que:

$$G(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)\ ds - C$$

Las condiciones de u_0 y v_0 son necesarias ya que para que la función (0.12) sea solución F y G debían ser de clase C^2.

$$\Rightarrow U(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\ ds.$$

$\square$

0.3.4. Ecuación de Laplace.

Daremos un ejemplo (examen de diciembre de 2015) para mostrar como se resuelven este tipo de ecucaciones.

Se considera la ecuación:

$$(*)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{para todo } (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(0,y)=0 \text{ y } u(\pi,y)=0 \quad \text{para todo } y\in[0,\pi], \\ u(x,\pi)=0 \quad \text{para todo } x\in[0,\pi] \\ u(x,0)=x(\pi-x) \quad \text{para todo } x\in[0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,\pi]. \end{cases}$$

Buscando soluciones de la forma $X(x)Y(y)$ hallar un candidato a solución u de $(*)$ de la forma

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y).$$

Luego, probar que el candidato a solución u hallado, verifica todas las condiciones enunciadas en $(*)$.

Buscando soluciones de la forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, la condición $u_{xx}+u_{yy}=0$ implica $X^{''}(x)Y(y)+X(x)Y^{''}(y)=0$. Por lo tanto

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)}=-\frac{Y^{''}(y)}{Y(y)}=\lambda\ (cte).$$

Entonces hay que resolver las ecuaciones $X^{''}(x)-\lambda X(x)=0$ y $Y^{''}(y)+\lambda Y(y)=0$. La condición $u(0,y)=0$ implica $X(0)=0$ y $u(\pi,y)=0$ implica $X(\pi)=0$. Por lo tanto hay que resolver

$$X^{''}-\lambda X=0 \text{ con las condiciones } X(\pi)=X(0)=0.$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos que $X(x)=A_n sen(nx)$ y que $\lambda=-n^2$ con $n\in\mathbb{N}$.

La ecuación $Y^{''}(y)-n^2Y(y)=0$ tiene como solución $Y(y)=B_ne^{ny}+C_ne^{-ny}$. La condición $u(x,\pi)=0$ implica $Y(\pi)=0$, por lo tanto $Y(\pi)=B_ne^{n\pi}+C_ne^{-n\pi}=0$ implica que $B_n=-C_ne^{-2n\pi}$. Entonces

$$Y(y)=-C_ne^{-2n\pi}e^{ny}+C_ne^{-ny}=C_n(-e^{n(y-2\pi)}+e^{-ny}).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$u_n(x,y)=sen(nx)D_n(-e^{n(y-2\pi)}+e^{-ny}) \text{ donde } D_n=A_nC_n.$$

Si consideramos $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$ entonces la condición $u(x,0)=x(\pi-x)$ implica que

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n(1-e^{-2n\pi})sen(nx)=x(\pi-x).$$

Por lo que $D_n(1-e^{-2n\pi})$ debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de la función $f(x)=x(\pi-x)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Por lo tanto

$$D_n(1-e^{-2n\pi})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)sen(nx)dx=\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)$$

Entonces el candidato a solución es

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)\frac{1}{(1-e^{-2n\pi})}sen(nx)(-e^{n(y-2\pi)}+e^{-ny})$$

Vamos a probar que u verifica la condición $u_{xx}+u_{yy}=0$ ya que las demás condiciones son muy fáciles de verificar. Lo difícil es probar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_n(x,y)}{\partial x^2} \text{ y que } \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_n(x,y)}{\partial y^2}.$$

Si asumimos esto último, vale entonces

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Probemos que $\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}$ ya que las igualdades

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}$$

se demuestran en forma análoga.

Para esto necesitamos de los siguientes resultados:

Proposición 0.6. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:*

- $|u_n(x)| \leq M_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in X$,
- *la serie* $\sum M_n$ *es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a u.

Proposición 0.7. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifica:*

- *Existe $x_0 \in X$ tal que $\sum u_n(x_0)$ es convergente.*
- *la serie $\sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x)$ converge uniformemente a una función v.*

Entonces $\frac{\partial}{\partial x}\sum u_n(x) = \sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x)$ y $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a una función u que cumple que $u^{'} = v$.

En nuestro caso, tenemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)\frac{1}{(1-e^{-2n\pi})} n cos(nx)(-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}),$$

Sea $\delta > 0$ y consideremos los puntos (x,y) dentro del rectángulo $[0,\pi]\times[\delta,\pi]$. Como $y \geq \delta$, tenemos que

$$e^{-ny} \leq e^{-n\delta}.$$

A su vez, como $y \leq \pi$, tenemos que $y - 2\pi \leq -\pi$, por lo que

$$e^{n(y-2\pi)} \leq e^{-n\pi}.$$

Luego, podemos acotar de la siguiente manera

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)\frac{1}{(1-e^{-2n\pi})}\right| n(e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) \leq \frac{16}{\pi n^2}(e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) = M_n.$$

Como M_n es convergente, podemos aplicar las Proposiciones 0.6 y 0.7. Finalmente, dado $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$ consideramos $\delta > 0$ tal que $y > \delta > 0$. Haciendo el razonamiento anterior, tenemos probado que $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$. Por lo tanto, esta última igualdad está probada para todo $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$.