Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 9
Ruido Pasabanda

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

✦ Ejercicio 1

Un ruido blanco de densidad espectral de potencia $\eta/2$ pasa por un filtro cuya respuesta se muestra en la Figura 1. Dibujar $S_{\eta i}(f)$ y $S_{\eta q}(f)$, las densidades espectrales de potencia de las componentes en fase y en cuadratura.

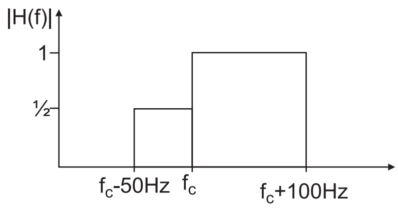


Figura 1: Respuesta del filtro. (Ejercicio 1)

✦ Ejercicio 2

Un sistema de AM con detector de envolvente tiene $SNR_D = 30dB$ con modulación de 100 % y la modulante es un tono puro de frecuencia 8 kHz. Si se aumenta el ancho de banda manteniendo fijos los demás parámetros, ¿cuándo alcanza el umbral?

★ Ejercicio 3

Un sistema de modulación en fase tiene $SNR_D = 30dB$. Se cambia a modulación en frecuencia manteniendo el ancho de banda de la señal transmitida y se agregan filtros de preénfasis y deénfasis

$$H_{pre}(f) = \left(1 + j\frac{f}{B_{de}}\right) \quad H_{de}(f) = \left(1 + j\frac{f}{B_{de}}\right)^{-1} \text{ con } W = 10B_{de}.$$

Hallar la nueva SNR_D.

⋆Ejercicio 4

Una onda modulada en AM, $x_c(t) = A_c(1 + \mu \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_c t)$ es interferida por una sinusoide $A_I \cos((\omega_c + \omega_I)t + \Phi)$ de amplitud débil. Hallar una expresión aproximada de la envolvente.

⋆Ejercicio 5

Una señal $x_c(t)$ modulada en banda lateral doble llega a un demodulador sincrónico con ruido aditivo $n(t)$(ver Figura 2). El oscilador local tiene error de fase θ. Hallar la SNR a la salida, y comparar con el caso ideal.

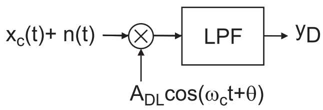


Figura 2: Demodulador sincrónico. (Ejercicio 5)

⋆Ejercicio 6

Se desea transmitir una señal utilizando un sistema de modulación FM con las siguientes caracterísitcas:

- $SNR_D \geq 50dB$,
- $P_x = \frac{1}{2}$,
- $W = 10kHz$,
- $\eta = 10^{-8}W/Hz$,

(a) Calcular la mínima potencia de transmisión P_T necesaria para cumplir con las mencionadas características.

(b) Repetir el cálculo si se realiza deénfasis, con $B_{de} = 2kHz$. (Se supone que el preénfasis-deénfasis no aumenta el ancho de banda.)

⋆Ejercicio 7

Un mensaje con $P_x = \frac{1}{2}$ se modula en AM con $\mu = 1$ y $SNR_D = 13dB$. Si se modula en FM sin deénfasis, aumentando el ancho de banda y transmitiendo con los demás parámetros fijos, hallar el mayor valor posible de D y la relación SNR_D para ese valor.

✷Ejercicio 8

Se procesa ruido pasabanda por medio de un dipositivo cuya salida $y(t)$ es el cuadrado de la envolvente de la entrada. Hallar la densidad de probabilidad de $y(t)$, su valor esperado y su valor cuadrático medio.

✷ Ejercicio 9

Se considera el transmisor y el receptor de la Figura 3, donde N mensajes $x_i(t)$ independientes, de ancho de banda $W = 5kHz$ y de potencia media $P_{x_i} = \frac{1}{2}$ se transmiten multiplexados en frecuencia. Se modulan en USSB (con $A_c = 1$)sobre subportadoras $f_{c_i} = (i-1)W$ y la banda base así generada se modula en frecuencia con portadora f_c. El canal tiene una atenuación $L = 20dB$ y ruido

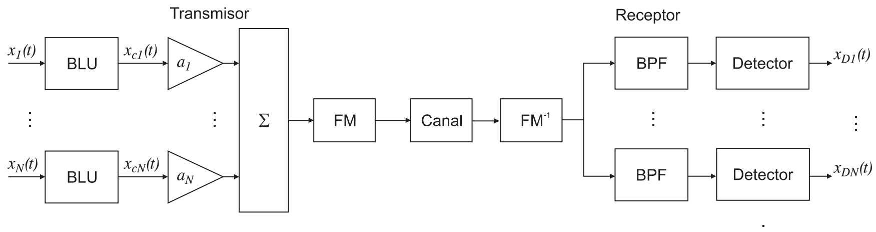


Figura 3: Transmisor y receptor. (Ejercicio 9)

blanco de potencia $10^{-9}W/Hz$ referido a la entrada del receptor. Los a_i se eligen tales que $P_x = 1$, donde x es la señal antes del modulador FM.

(a) Elegir la constante de desviación de frecuencia (f_Δ) para maximizar el número N de canales que se pueden transmitir si la potencia del transmisor es $1W$ y se requiere una relación señal a ruido a la salida del discriminador de por lo menos $50dB$. Hallar N y el ancho de banda utilizado en la transmisión.

(b) Hallar los coeficientes a_i para que la relación señal a ruido en cada canal sea la misma. Hallarla.

(c) Rehacer la parte (a) si se instala un amplificador repetidor ideal en el centro del canal. La ganancia se ajusta para compensar la atenuación de un tramo.

✷ Ejercicio 10

Sea $n(t)$ ruido gaussiano pasabanda cuyo valor cuadrático medio N se detecta por medio de un detector cuadrático de envolvente. Ver la figura 4.

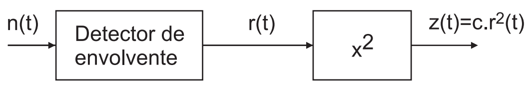


Figura 4: Detector. (Ejercicio 10)

(a) Calcular los valores máximos que se obtendrían al medir la salida del detector con:

- un medidor de tension DC de gran constante de tiempo frente a las variaciones de la señal,
- un medidor de RMS de gran constante de tiempo,
- un medidor igual a este último, precedido de un capacitor de bloqueo.

Verificar que en todos los casos se detecta N a menos de una constante.

(b) Se aplica al detector ruido pasabanda $n(t)$, con densidad espectral

$$S_n(f) = \begin{cases} \eta/2 & f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Encuentre la densidad espectral de potencia de ruido a la salida $z(t)$ y la función de correlación $R_z(\tau)$.

Nota: Para dos V.A. (X, Y) gaussianas, de medio nula y varianzas cualesquiera, vale la siguiente igualdad:

$$E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2) + 2E^2(XY)$$

(c) Repetir la parte (b) para el sistema de la Figura 5.

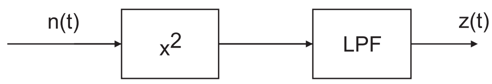
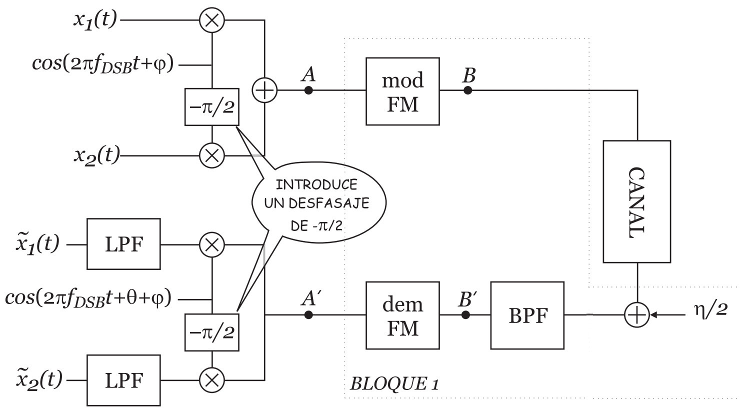


Figura 5: Sistema del ejercicio 10.

✷ Ejercicio 11

El sistema de la figura permite transmitir dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ modulándolas primero en DSB en cuadratura, y luego FM.



Para la parte a se considera el sistema *sin* los componentes del BLOQUE 1. A partir de la parte b, se *agrega* el BLOQUE 1.

Las señales x_1 y x_2 se modelan como procesos estocásticos independientes, estacionarios, de media nula, ancho de banda W Hz y potencias P_{x_1} y P_{x_2}, respectivamente. Además, φ es una variable aleatoria con distribución uniforme en 0 a 2π, independiente de x_1 y x_2. El canal tiene atenuación $L = 1$. Sabemos que $f_{\text{DSB}} > W$ y que $f_{\text{FM}} \gg f_{\text{DSB}}$.

(a) Hallar el espectro en el punto A. Considerando que las componentes de señal en los puntos A y A' son iguales y que no hay ruido presente, hallar las salidas $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$, y verificar que para $\theta = 0$ se pueden recuperar las señales x_1 y x_2.

A partir de esta parte se agrega el BLOQUE 1 al sistema; es decir, se considera la modulación FM y el canal introduce un ruido aditivo blanco y gaussiano de densidad espectral de potencia $\eta/2$. El modulador de FM toma como parámetros f_Δ y f_{FM} ($f_\Delta \gg f_{\text{DSB}}$).

(b) Hallar el espectro y la potencia del ruido en B'.

(c) Hallar el espectro y la potencia del ruido en A'.

(d) Con $\theta = 0$, hallar SNR_{D_1} y SNR_{D_2}, relaciones señal a ruido a las salidas del sistema. ¿En qué puntos del esquema introduciría filtros de pre-énfasis y de-énfasis para mejorar la relación señal a ruido?

Solución

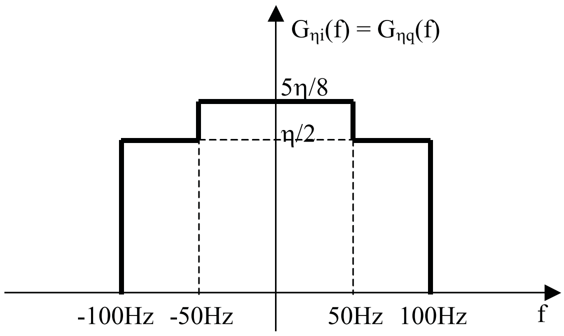
Ejercicio 1

Sabemos que:

$$S_{\eta_i}(f) = S_{\eta_q}(f) = S_\eta(f+f_c)u(f+f_c) + S_\eta(f-fc)\left(1-u(f-f_c)\right)$$

Por otro lado, sabemos que $S_\eta(f) = |H(f)|^2 \cdot \frac{\eta}{2}$.

Luego de trasladar este espectro y multiplicarlo por los escalones, se llega a que la forma de las densidades espectrales de potencia de $n_i(t)$ y $n_q(t)$, que es la misma, es igual a la de la siguiente figura.



Ejercicio 2

En este caso:

$$\left(\frac{P}{N}\right)_D = \frac{P_x}{1+P_x}\gamma = \frac{P_x}{1+P_x}.\frac{P_R}{\eta B_T} = 30dB = 1000$$

$$P_x = \frac{1}{2}$$

$$B_T = 2 \times 8kHz = 16kHz$$

Entonces:

$$\frac{P_R}{\eta} = 4,8 \times 10^7 Hz$$

En el umbral:

$$\gamma_{umbral} = \frac{P_R}{\eta B_T^{umbral}} = 20$$

$$B_T^{umbral} = \frac{P_R}{20\eta}$$

$$B_T^{umbral} = 2,4MHz$$

Ejercicio 3

El sistema de PM tiene una relación señal a ruido en detección igual a:

$$SNR_D^{\text{PM}} = \Phi_\Delta^2 P_x \gamma$$

Por otro lado, el sistema de FM con pre/de-énfasis tiene una relación señal a ruido en detección igual a:

$$SNR_D^{\text{FM}_{de}} = D^2 P_x \gamma \frac{W^2}{B_{de}^2}$$

Como se mantiene el ancho de banda, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} B_{T_{\text{PM}}} & = & 2(\Phi_\Delta + 1)W \\ B_{T_{\text{FM}}} & = & 2(D+1)W \end{array}\right\} \Rightarrow D = \Phi_\Delta$$

Por otro lado, sabemos que:

$$SNR_{D_{\text{PM}}} = 10^{30/10} = 1000 \Rightarrow \Phi_\Delta^2 P_x \gamma = 1000$$

Entonces, se cumplirá que:

$$SNR_D^{\text{FM}_{de}} = D^2 P_x \gamma \frac{W^2}{B_{de}^2} = \Phi_\Delta^2 P_x \gamma \frac{W^2}{B_{de}^2} = 1000 \cdot \frac{100 B_{de}^2}{B_{de}^2} = 100000$$

En conclusión, tenemos que:

$$SNR_D^{\text{FM}_{de}} = 100000 = 50dB$$

Ejercicio 4

La señal recibida $v(t)$ será de la forma:

$$v(t) = x_c(t) + x_I(t) = A_c(1 + \mu\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t) + A_I \cos((\omega_c + \omega_I)t + \Phi)$$

Sea $\theta_I(t) = \omega_I(t) + \Phi$. Luego, tendremos que:

$$\begin{array}{rcl} v(t) & = & A_c(1 + \mu\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t) + A_I\cos(\omega_c t + \theta_I(t)) \\ & = & [A_c(1 + \mu\cos(\omega_m t)) + A_I\cos(\theta_I(t))]\cos(\omega_c t) - A_I\sin(\theta_I(t))\sin(\omega_c t) \end{array}$$

Entonces, el detector de envolvente devolverá la señal:

$$\begin{array}{rcl} A_v(t) & = & \sqrt{[A_c(1 + \mu\cos(\omega_m t)) + A_I\cos(\theta_I(t))]^2 + [A_I\sin(\theta_I(t))]^2} \\ & = & \sqrt{A_c^2(1 + \mu\cos(\omega_m t))^2 + 2A_c A_I A_I(1 + \mu\cos(\omega_m t))\cos(\theta_I(t)) + A_I^2\cos^2(\theta_I(t)) + A_I^2\sin^2(\theta_I(t))} \\ & = & A_c\sqrt{(1 + \mu\cos(\omega_m t))^2 + 2\frac{A_I}{A_c}(1 + \mu\cos(\omega_m t))\cos(\theta_I(t)) + \frac{A_I^2}{A_c^2}} \end{array}$$

Si llamamos ρ al cociente A_I/A_c, que cumple $\rho \ll 1$ pues A_I es débil, podemos aproximar la envolvente detectada por:

$$A_v(t) \approx A_c\sqrt{(1 + \mu\cos(\omega_m t))(1 + \mu\cos(\omega_m t) + 2\rho\cos(\theta_i(t)))}$$

Ejercicio 5

Tenemos que $x_c(t) = A_c x(t)\cos(\omega_c t)$, con lo cual $P_R = \frac{A_c^2 P_x}{2}$.

Por otro lado, modelamos el ruido en fase y cuadratura, es decir $n(t) = n_i(t)\cos(\omega_c t) - n_q(t)\sin(\omega_c t)$.

Entonces, $x_c(t) + n(t) = [A_c x(t) + n_i(t)]\cos(\omega_c t) - n_q(t)\sin(\omega_c t)$.

Luego, si llamamos $y_A(t)$ a la señal a la salida del multiplicador, se cumple que:

$$y_A(t) = \{[A_c x(t) + n_i(t)]\cos(\omega_c t) - n_q(t)\sin(\omega_c t)\}A_{DL}\cos(\omega_c t + \theta)$$
$$= A_C A_{DL} x(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t + \theta) + A_{DL}\left[n_i(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t + \theta) - n_q(t)\sin(\omega_c t)\cos(\omega_c t + \theta)\right]$$
$$= A_C A_{DL} x(t)\left[\frac{\cos(2\omega_c t + \theta) + \cos(\theta)}{2}\right] +$$
$$+ A_{DL}\left\{n_i(t)\left[\frac{\cos(2\omega_c t + \theta) + \cos(\theta)}{2}\right] - n_q(t)\left[\frac{\sin(2\omega_c t + \theta) + \sin(\theta)}{2}\right]\right\}$$

Por lo tanto, a la salida del pasabajos, la señal que se tendrá (y que llamaremos $y_D(t)$) será:

$$y_D(t) = \underbrace{\frac{A_C A_{DL}}{2}\cos(\theta)x(t)}_{\text{mensaje}} + \underbrace{\frac{A_{DL}}{2}\cos(\theta)n_i(t) - \frac{A_{DL}}{2}\sin(\theta)n_q(t)}_{\text{ruido}}$$

(notar que se eliminaron los términos a frecuencia $2\omega_c$).

Una vez identificadas la componente de mensaje y la componente de ruido a la salida del sistema, estamos en condiciones de hallar la potencia de señal y de ruido en detección, que serán:

$$\begin{aligned}
P_D &= \frac{A_C^2 A_{DL}^2}{4}\cos^2(\theta)P_x \\
N_D &= \frac{A_{DL}^2}{4}\cos^2(\theta)\eta 2W + \frac{A_{DL}^2}{4}\sin^2(\theta)\eta 2W \\
&= \frac{A_{DL}^2 \eta W}{2}
\end{aligned}$$

(la potencia del ruido fue calculada teniendo en cuenta que $n_i(t)$ y $n_q(t)$ son independientes).

El cociente de estas potencias será igual a la relación señal a ruido en detección:

$$\begin{aligned}
SNR_D &= \frac{A_C^2\cos^2(\theta)}{2}\frac{P_x}{\eta W} \\
&= \cos^2(\theta)\frac{P_R}{\eta W} \\
&= \cos^2(\theta)\gamma
\end{aligned}$$

En el caso ideal, $\theta = 0$ y por consiguiente $SNR_D = \gamma$. Como $\cos^2(\theta) \leq 1$, se cumple que $SNR_D^{con\,error} \leq SNR_D^{sin\,error} = \gamma$.

Ejercicio 6

(a)

$$SNR_D = 3D^2 P_x \gamma = 3\frac{f_\Delta^2}{W^2} P_x \frac{P_R}{\eta W} = 10^5$$

$$\Rightarrow f_\Delta^2 \cdot \underbrace{P_R}_{=P_T(L=1)} = \frac{10^5 \eta W^3}{P_x} = \frac{10^5 10^{-8} (10 \times 10^3)^3}{3/2} \approx 0.667 \times 10^9 \ Hz^2 Watt$$

Trabajar en el umbral implica que $SNR_R = 10$, por lo que:

$$\frac{P_R}{\eta B_T} = \frac{P_R}{\eta 2(D+2)W} = 10$$

$$\Rightarrow P_R = 20\eta W(D+2) = 20\eta(f_\Delta + 2W)$$

$$\Rightarrow \frac{0.667 \times 10^9}{f_\Delta^2} = 20\eta(f_\Delta + 2W) \Rightarrow 0.667 \times 10^9 = 20\eta(f_\Delta^3 + 2W f_\Delta^2)$$

$$\Rightarrow f_\Delta^3 + 20 \times 10^3 f_\Delta^2 - 3.33 \times 10^{15} = 0$$

$$\Rightarrow f_\Delta = 143 \ kHz; \qquad P_T = 32.6 \ mWatt$$

Calculo el ancho de banda de transmisión:

$$B_T = 2(f_\Delta + 2W) = 326 \ kHz$$

(b) Para el caso **con deénfasis**, se tiene:

$$SNR_D = D^2 P_x \gamma \frac{W^2}{B_{de}^2} = D^2 P_x \gamma \frac{10^2}{2^2} = 25 D^2 P_x \gamma$$

$$\Rightarrow f_\Delta^2 P_R = 80 \times 10^6 \ Hz^2 Watt$$

$$\Rightarrow f_\Delta^3 + 20 \times 10^3 f_\Delta^2 - \frac{80 \times 10^6}{20\eta} = 0$$

$$\Rightarrow f_\Delta = 67.6 \ kHz; \qquad P_T = 17.5 \ mWatt$$

El ancho de banda de transmisión es:

$$B_T = 175.2 \ kHz$$

Ejercicio 7

Para la señal AM, con $\mu = 1$, se tiene que $SNR_D = \frac{P_x}{1+P_x}\gamma$. Por lo tanto, sustituyendo los valores de P_x y SNR_D, se llega a que $\gamma \approx 59.9$.

Por otro lado, para FM sin deénfasis, $SNR_D = 3D^2 P_x \gamma$. Pero para que esto se cumpla, debo garantizar que estoy sobre el umbral, es decir, que $SNR_R \geq 10$. En consecuencia, se tiene que:

$$SNR_R = \frac{P_R}{\eta B_T} = \frac{P_R}{\eta 2(D+2)W} = \frac{\gamma}{2(D+2)} \geq 10$$

$$\Rightarrow D \leq \frac{\gamma}{20} - 2 \approx 0.993$$

$$\Rightarrow D_{máx} \approx 0.993; \qquad SNR_D \approx 20 \ dB$$

(notar que se consideró $P_R = P_T$, es decir, que el canal no introduce atenuación).

Ejercicio 8

Dada una variable aleatoria X, con función de distribución $F_X(\alpha)$, se tiene que $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha)$.

Sea $Y = X^2$; entonces:

$$F_Y(\alpha) = P(Y \leq \alpha) = P(X^2 \leq \alpha) = P(X \leq \sqrt{\alpha}) = F_X(\sqrt{\alpha})$$

Luego, la densidad de probabilidad de Y será:

$$p_Y(\alpha) = \frac{dF_Y}{d\alpha}(\alpha) = \frac{dF_X}{d\alpha}(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}F'_X(\sqrt{\alpha})$$

Si consideramos a X como la envolvente del ruido pasabanda, sabemos que su densidad de probabilidad es:

$$p_X(\alpha) = F'_X(\alpha) = \frac{\alpha}{N_R}e^{\frac{-\alpha^2}{2N_R}}u(\alpha)$$

$$\Rightarrow p_Y(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.\frac{\sqrt{\alpha}}{N_R}e^{\frac{-(\sqrt{\alpha})^2}{2N_R}}\underbrace{u(\sqrt{\alpha})}_{=1}$$

$$\Rightarrow p_Y(\alpha) = \frac{1}{2N_R}e^{\frac{-|\alpha|}{2N_R}}$$

Ésta última es entonces la densidad de probabilidad del cuadrado de la envolvente del ruido pasabanda. Cabe notar que tiene la forma de la densidad de probabilidad correspondiente a una distribución de Laplace.

Al ser una función par, se tiene que el valor esperado de la envolvente será nulo.

En cuanto a su valor cuadrático medio, éste será igual a:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha^2} &= 2\int_0^\infty \alpha^2 \frac{1}{2N_R}e^{\frac{-\alpha}{2N_R}}d\alpha \\
&= \frac{1}{N_R}\int_0^\infty 4N_R^2u^2e^{-u}2N_Rdu \\
&= 8N_R^2\underbrace{\int_0^\infty u^2e^{-u}du}_{=2} \\
&= 16N_R^2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 9

(a) La SNR_D mínima aceptada es 50dB, la SNR_D para nuestro transmisor es:

$$SNR_D = 3\gamma P_x D^2$$

con

$$\gamma = \frac{P_T}{\eta LNW}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{3P_T D^2}{\eta LNW} \geq 10^5$$

Todo esto es válido si estamos trabajando sobre el umbral de FM, por lo que debemos imponer esta condición:

$$SNR_R = \frac{P_T}{\eta L B_T} \geq 10$$

donde

$$B_T = 2(D+2)NW$$

Eliminando B_T de las últimas dos expresiones obtenemos la siguiente desigualdad:

$$D \leq \frac{P_T}{20\eta LWN} - 2$$

Tenemos entonces que:

$$10^5 \leq \frac{3P_T D^2}{\eta LNW} \leq \frac{3P_T(\frac{P_T}{20\eta LWN} - 2)^2}{\eta LNW}$$

Sustituyendo los datos y operando, llegamos a la expresión cúbica en N:

$$8,33N^3 - N^2 + 50N - 625 \leq 0$$

Y así, sabemos que $N \leq 3,78$. Por lo que obtenemos un $N_{máx} = 3$.
El valor de D es entonces:

$$D_{máx} = \frac{P_T}{20\eta LWN_{máx}} - 2 = 14,66$$

$$D = \frac{f_\Delta}{NW}$$

$$f_{\Delta_{máx}} = D_{máx} N_{máx} W$$

El ancho de banda resulta ser:

$$B_T \approx 500kHz$$

(b) La potencia del ruido detectado en el canal i es:

$$N_D^i = 2\int_{(i-1)W}^{iW} \frac{\eta f^2}{2P_R} = \frac{\eta W^3}{3P_R}(i^3 - (i-1)^3)$$

La potencia de la señal detectada en el canal i es:

$$P_D^i = f_\Delta^2 a_i^2 P_{x_i} = \frac{1}{2} f_\Delta^2 a_i^2$$

Por lo tanto:

$$SNR_D^i = \frac{3P_T f_\Delta^2 a_i^2}{2\eta LW^3(i^3 - (i-1)^3)}$$

Deseamos que para todo i, j se cumpla $SNR_D^i = SNR_D^j$, esto implica:

$$a_1^2 = \frac{a_i^2}{i^3 - (i-1)^3} = \frac{a_j^2}{j^3 - (j-1)^3}$$

La potencia de cada señal SSB es:

$$E\left\{x_{SSB}(t)\right\} = \frac{A_c^2}{8}$$

Como $A_c = 1$, resulta:

$$\sum a_i^2 = 8$$

Por tanto:

$$\sum a_i^2 = 8 = a_1^2 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3)$$

$$\sum a_i^2 = N^3 a_1^2$$

$$a_i = \sqrt{\frac{8(3i^2 - 3i + 1)}{N^3}}$$

$$SNR_D^i = \frac{12 P_T f_\Delta}{\eta L W^3 N^3}$$

Ejercicio 11

(a) En el punto A tenemos la señal

$$x_A(t) = x_1(t)\cos(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi) + x_2(t)\sin(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi).$$

Su espectro es la transformada de Fourier de su autocorrelación.

$$R_A(t, t+\tau) = E\left\{ \begin{array}{l} [x_1(t)\cos(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi) + x_2(t)\sin(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi)] \cdot \\ \cdot [x_1(t+\tau)\cos(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau) + \varphi) + x_2(t+\tau)\sin(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau) + \varphi)] \end{array} \right\}$$

Operando y aplicando la linealidad del valor esperado y la independencia de φ con $x_1(t)$ y $x_2(t)$, encontramos

$$\begin{aligned} R_A(t, t+\tau) = \;& E\left\{x_1(t)x_1(t+\tau)\right\} E\left\{\cos(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi)\cos(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau)\right\} + \\ & + E\left\{x_2(t)x_2(t+\tau)\right\} E\left\{\sin(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi)\sin(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau) + \varphi)\right\} + \\ & + E\left\{x_1(t)x_2(t+\tau)\right\} E\left\{\cos(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi)\sin(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau) + \varphi)\right\} + \\ & + E\left\{x_2(t)x_1(t+\tau)\right\} E\left\{\sin(\omega_{\text{DSB}} t + \varphi)\cos(\omega_{\text{DSB}}(t+\tau)\right\} \end{aligned}$$

Como x_1 y x_2 son independientes y tienen media nula los valores esperados de estos procesos cruzados valen cero.
Utilizando la definición de autocorrelación y algunas propiedades trigonométricas reducimos la expresión aún más.

$$\begin{aligned} R_A(t, t+\tau) = \;& R_{x_1}(\tau) \cdot E\left\{\frac{\cos(\omega_{\text{DSB}}\tau) + \cos(\omega_{\text{DSB}}(2t+\tau) + \varphi)}{2}\right\} + \\ & + R_{x_2}(\tau) \cdot E\left\{\frac{\cos(\omega_{\text{DSB}}\tau) - \cos(\omega_{\text{DSB}}(2t+\tau) + \varphi)}{2}\right\} \end{aligned}$$

Los valores esperados de las sinusoides con fase aleatoria φ se anulan ya que

$$E\{\cos(\text{algo}+\varphi)\} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\text{algo}+\varphi)}{2\pi} d\varphi = 0$$

dado que la integral de una sinusoide en un período es nula.
Descartando estos términos no queda ninguna dependencia con el tiempo, por lo que x_A es estacionario (tampoco la media depende del tiempo pues $E\{x_A(t)\} = E\{x_1(t)\}E\{\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\} + E\{x_2(t)\}E\{\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\} = 0$).
Finalmente obtenemos la autocorrelación:

$$R_A(\tau) = R_{x_1}(\tau)\frac{\cos(\omega_{\text{DSB}}\tau)}{2} + R_{x_2}(\tau)\frac{\cos(\omega_{\text{DSB}}\tau)}{2}$$

Haciendo la transformada de Fourier encontramos la densidad espectral de potencia.

$$S_A(f) = S_{x_1}(f) * \frac{\delta(f-f_{\text{DSB}})+\delta(f+f_{\text{DSB}})}{4} + S_{x_2}(f) * \frac{\delta(f-f_{\text{DSB}})+\delta(f+f_{\text{DSB}})}{4}$$

Y el espectro es:

$$S_A(f) = \frac{1}{4}\Big(S_{x_1}(f-f_{\text{DSB}}) + S_{x_1}(f+f_{\text{DSB}}) + S_{x_2}(f-f_{\text{DSB}}) + S_{x_2}(f+f_{\text{DSB}})\Big)$$

Si las señales en A y A' son iguales,

$$x_{A'}(t) = x_A(t) = x_1(t)\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi) + x_2(t)\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi).$$

La salida $\tilde{x}_1$ se obtiene filtrando pasabajo la señal

$$x_{p1}(t) = x_{A'}(t)\cdot\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi)$$

$$x_{p1}(t) = x_1(t)\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi) + x_2(t)\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi)$$

$$x_{p1}(t) = \frac{x_1(t)}{2}\left[\cos(\theta)+\cos(2\omega_{\text{DSB}}t+\theta+2\varphi)\right] + \frac{x_2(t)}{2}\left[\sin(\theta)+\sin(2\omega_{\text{DSB}}t+\theta+2\varphi)\right]$$

Filtrando con el filtro pasabajos de $W < f_{\text{DSB}}$ eliminamos las componentes moduladas a $2\omega_{\text{DSB}}$ y obtenemos

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}\left[x_1(t)\cos(\theta) + x_2(t)\sin(\theta)\right]$$

Lo mismo se puede hacer para $\tilde{x}_2$,

$$x_{p2}(t) = x_{A'}(t)\cdot\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi)$$

$$x_{p2}(t) = x_1(t)\cos(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi) + x_2(t)\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\varphi)\sin(\omega_{\text{DSB}}t+\theta+\varphi)$$

$$x_{p2}(t) = \frac{x_1(t)}{2}\left[\sin(\theta)+\sin(2\omega_{\text{DSB}}t+\theta+2\varphi)\right] + \frac{x_2(t)}{2}\left[\cos(\theta)+\cos(2\omega_{\text{DSB}}t+\theta+2\varphi)\right]$$

Filtrando con el filtro pasabajos de $W < f_{\text{DSB}}$ eliminamos las componentes moduladas a $2\omega_{\text{DSB}}$ y obtenemos

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2}\left[x_1(t)\sin(\theta) + x_2(t)\cos(\theta)\right]$$

Cuando $\theta = 0$ obtenemos $\tilde{x}_1(t) = \frac{x_1(t)}{2}$ y $\tilde{x}_2(t) = \frac{x_2(t)}{2}$. Si $\theta = \pi/2$ encontramos $\tilde{x}_1(t) = \frac{x_2(t)}{2}$ y $\tilde{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{2}$. Entonces θ debe ser un múltiplo de $\pi/2$ para poder recuperar los mensajes, en caso contrario los mensajes se mezclan y la recuperación no es posible.
Si θ es pequeño

$$\tilde{x}_1(t) \approx x_1(t) + \theta \cdot x_2(t)$$
$$\tilde{x}_2(t) \approx \theta \cdot x_1(t) + x_2(t)$$

y se recuperarán las señales, con algo de interferencia.
Hemos estudiado las señales en forma temporal y encontramos valores de θ con los que se puede recuperar ambas señales transmitidas. Esto podría parecer incompatible con el resultado de la parte anterior, donde encontramos que las densidades espectrales de potencia correspondientes a cada mensaje tienen iguales propiedades estadísticas (si lo tenían x_1 y x_2), ocupan igual sector del espectro y se suman, sin que podamos luego distinguir los aportes de cada una. Sin embargo, no existe incompatibilidad ya que los dos enfoques no muestran la misma información. La densidad espectral de potencia muestra información estadística. Estas dos señales tienen iguales propiedades estadísticas cuando las analizamos cada una por separado. Sin embargo, temporalmente siempre están desfasadas 90 grados, por lo tanto son ortogonales y se pueden separar usando un detector adecuado.

(b) La densidad espectral de potencia en el punto B' es

$$S_{n_{B'}}(f) = \frac{\eta}{2}\left[\Pi\left(\frac{f - f_{\text{FM}}}{W_{\text{FM}}}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_{\text{FM}}}{W_{\text{FM}}}\right)\right]$$

donde W_{FM} es el ancho de banda de la señal FM.
La potencia es la integral de la densidad espectral de potencia, por lo que es

$$\sigma_{n_{B'}} = \eta W_{\text{FM}}.$$

(c) Nuevamente apelamos a resultados teóricos. Sabemos que si estamos sobre el umbral de FM, la componente de ruido a la salida es

$$n_{A'}(t) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{2P_B}}\dot{n}_{B'_q}(t)$$

donde P_B es la potencia de la señal de FM transmitida, y $\dot{n}_{B'_q}(t)$ es la componente en cuadratura de ruido en B'. La derivación se puede implementar con un filtro de transferencia $2\pi f$, por lo que el espectro es

$$S_{n_{A'}}(f) = \frac{f^2}{2P_B}S_{n_{B'_q}}(f) = \frac{\eta f^2}{2P_B}\Pi\left(\frac{f}{W_{\text{FM}}}\right)$$

ya que

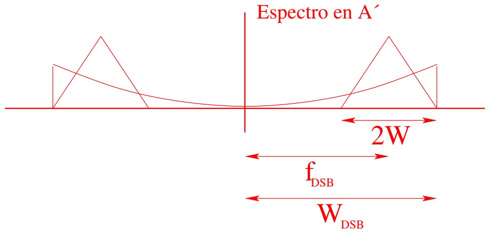
$$S_{n_{B'_q}}(f) = \frac{1}{2}\big[(1 + \text{signo}(f + f_{\text{FM}}))S_{n_{B'}}(f + f_{\text{FM}}) +$$
$$+ (1 - \text{signo}(f - f_{\text{FM}}))S_{n_{B'}}(f - f_{\text{FM}})\big] = \eta\Pi\left(\frac{f}{W_{\text{FM}}}\right)$$

La potencia la encontramos integrando en la banda que presenta ruido.

$$\sigma_{n_{A'}} = \int_{-W_{\text{DSB}}}^{W_{\text{DSB}}} \frac{\eta f^2}{2P_B}\Pi\left(\frac{f}{W_{\text{FM}}}\right) df = \frac{\eta W_{\text{FM}}^3}{3P_B}$$

Es importante notar que en el caso que trabajamos, arriba del umbral, el ruido a la salida del detector de FM es la componente en cuadratura del ruido recibido pasado por un filtro lineal. El ruido recibido es gaussiano, por lo que también lo es la componente en cuadratura, entonces, el ruido en A' es gaussiano, WSS y de media luna.

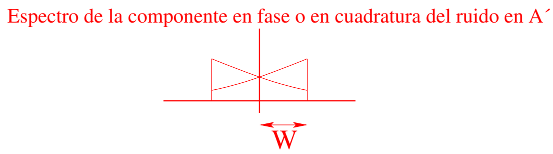
(d) El espectro en A' es como vemos, esquemáticamente, en la siguiente figura.



Como $\theta = 0$, en $\tilde{x}_1$ obtendremos la componente en fase del ruido en A', filtrada con el filtro pasabajos de banda W. Análogamente, $\tilde{x}_2$ tendrá la componente en cuadratura del ruido, filtrada.
Como el ruido es gaussiano y WSS, sabemos que lo podemos descomponer en componentes de fase y cuadratura con las siguientes características:

$$\begin{aligned} S_{n_{A'_i}}(f) = S_{n_{A'_q}}(f) = \; & \tfrac{1}{2}\big[(1+\text{signo}(f+f_{\text{FM}}))S_{n_{A'}}(f+f_{\text{FM}})+ \\ & +(1-\text{signo}(f-f_{\text{FM}}))S_{n_{A'}}(f-f_{\text{FM}})\big] \end{aligned}$$

El espectro quedará:



La potencia del ruido es

$$\sigma^2_{n_{\tilde{x}_i}} = 2\int_{f_{\text{DSB}}-W}^{f_{\text{DSB}}+W} S_{n_{A'}}(f)df = 2\int_{f_{\text{DSB}}-W}^{f_{\text{DSB}}+W} \frac{\eta f^2}{2P_B}\Pi\left(\frac{f}{W_{\text{FM}}}\right) df$$

$$\sigma^2_{n_{\tilde{x}_i}} = \frac{2\eta}{3P_B}\left(3Wf_{\text{DSB}}^2 + W^3\right)$$

Al usar $\theta = 0$ los mensajes se recuperan perfectamente, por lo que las relaciones señal a ruido son las siguientes:

$$SNR_{D_1} = \frac{3P_BP_{x_1}}{2\eta\left(3Wf_{\text{DSB}}^2 + W^3\right)} \qquad SNR_{D_2} = \frac{3P_BP_{x_2}}{2\eta\left(3Wf_{\text{DSB}}^2 + W^3\right)}$$

El filtro de pre-énfasis debe colocarse en el punto A y el de de-énfasis en el punto A'.