Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 8
Modulación Exponencial

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

★ Ejercicio 1 (7.1-1 [Car])

Mostrar que no es posible definir una onda modulada de FM en directa analogía con la de AM: $x_c(t) = A_c \cos\Big(\omega_c\big(1 + mx(t)\big)t\Big)$.
Sugerencia: Estudiar cómo quedaría la frecuencia instantánea si la modulante fuera un tono.

✦ Ejercicio 2

Calcule el ancho de banda de:

(a) Una portadora de 10MHz modulada en FM por una señal sinusoidal de 1 kHz. La amplitud de la moduladora es tal que produce una desviación máxima de frecuencia de 2 kHz.

(b) La señal de (a) con la frecuencia de la moduladora duplicada.

(c) La señal de (b) con la amplitud de moduladora duplicada.

★ Ejercicio 3

Un tono de 10 kHz modula una portadora de 100 Mhz. Un ingeniero diseñó el sistema razonando que podía disminuir el ancho de banda disminuyendo la amplitud del tono. Lo acomodó para una desviación de frecuencia máxima de 10 Hz y supuso que el ancho de banda sería de 20 Hz.

(a) ¿Cuál es el verdadero ancho de banda y cuál fue el error que cometió el ingeniero?

(b) Si la amplitud hubiera sido elegida para producir una desviación máxima de frecuencia de 1 MHz, verificar que en ese caso el ingeniero habría acertado a pesar de su razonamiento equivocado y explicar la diferencia con el caso anterior.

⋆ Ejercicio 4

Se aplica el mismo tono a un modulador de FM y a uno de PM con un defasaje tal que los espectros de salida son los mismos. Estudiar cómo cambiarán, en general, estos espectros si:

(a) la frecuencia del tono aumenta o disminuye.

(b) la amplitud del tono aumenta o disminuye.

⋆ Ejercicio 5

Se desea medir el f_Δ de un transmisor de FM. Un posible método es, usando como entrada una sinusoide de frecuencia conocida, aumentar la amplitud de la sinusoide desde cero hasta el valor máximo admitido a la vez que se observa el espectro de la señal modulada. Al variar la amplitud deben registrarse los valores para los que se anula la componente de frecuencia f_c del espectro.

(a) ¿Cómo se puede estimar f_Δ con los resultados de este experimento?

(b) Estime f_Δ cuando $f_m = 1kHz$ y las primeras 9 amplitudes encontradas fueron 115.5, 287.7, 444.0, 539.9, 734.0, 906.7, 1064.5, 1213.6 y 1377.6 mV.

✶ Ejercicio 6

Analizar el detector de FM balanceado de la Figura 1. T_d es tal que $w_c T_d = -\pi/2$.

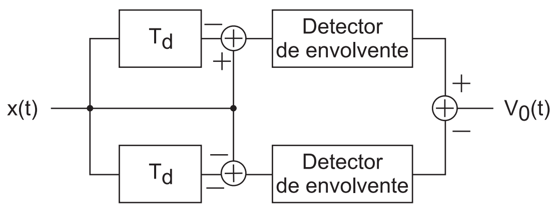

Figura 1: Detector balanceado. (Ejercicio 6)

✶ Ejercicio 7

Se consideran las señales:

1. $x_1(t)$ de ancho de banda W_1, $|x_1|_{max} = 1$, $< x_1^2 >= 1/2$, $< x_1 >= 0$

2. $x_2(t)$ de ancho de banda W_2, $|x_2|_{max} = 1$, $< x_2^2 >= 1/2$, $< x_2 >= 0$ Se desea trasmitir x_1 y x_2 multiplexados sobre un enlace en FM. Se plantean los 2 esquemas de la Figura 2:

(a) Hallar, en el punto A, la f_1 mínima para que se puedan recuperar x_1 y x_2; y el ancho de banda de la banda base (señal en el punto A, x_A).

(b) Hallar, en el punto A', la f_2 mínima para que se puedan recuperar x_1 y x_2, y ancho de banda de la banda base (señal en el punto A',$x_{A'}$). Graficar los espectros de las bandas base.

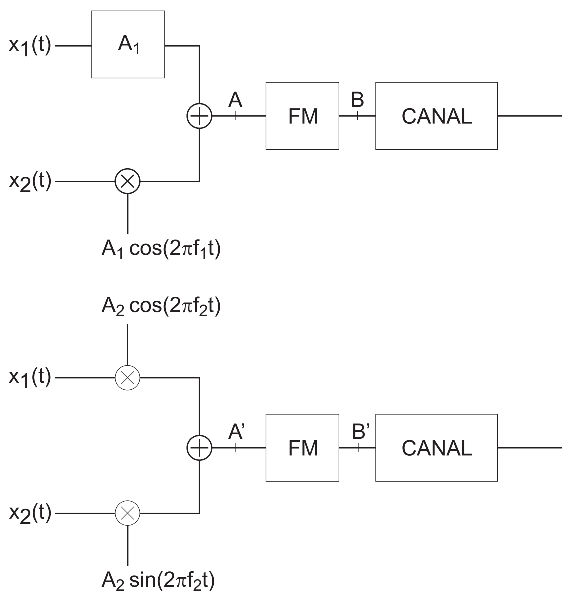

Figura 2: Sistema el Ejercicio 7.

El modulador de FM tiene portadora f_c y relación de desviación de frecuencia D.

(c) Hallar A_1 y A_2 para que en los 2 casos la señal de banda base x_A y $x_{A'}$ tengan valor máximo 1. Hallar su valor cuadrático medio.

(d) Hallar el ancho de banda de la señal modulada en FM en ambos casos. Comparar.

(e) Dar un esquema de los receptores respectivos indicando los anchos de banda de los filtros. Mostrar que se puede recuperar las señales.

Solución

Ejercicio 1

Tomamos x(t) como un tono, es decir:

$$x(t) = A_m \sin(\omega_m t)$$

La señal transmitida es entonces:

$$x_c(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t + m\omega_c A_m \sin(\omega_m t)t}_{\phi(t)})$$

La frecuencia instantánea es $\frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t)$:

$$\frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) = f_c + f_c m A_m \operatorname{sen}(\omega_m t) + f_c m A_m t \omega_m \cos(\omega_m t)$$
$$\frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) = f_c(1 + mA_m \operatorname{sen}(\omega_m t) + mA_m t\omega_m \cos(\omega_m t))$$

Es decir que la frecuencia instantánea obtenida no corresponde a la señal que se desearía detectar, $x(t)$.

Ejercicio 2

(a) La señal modulada en FM es

$$x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda) d\lambda\right)$$

por lo que la frecuencia instantánea es

$$f_c + f_\Delta x(t) = f_c + f_\Delta A_m \cos(2000\pi t)$$

La máxima desviación de frecuencia es

$$f_\Delta A_m$$

que sabemos que es 2kHz. El ancho de banda de una señal modulada en FM es

$$B_T = 2M(\beta) f_m \approx 2(\beta + \alpha)$$

donde se toma $\alpha \approx 1$ si $\beta \ll 1$, y $\alpha \approx 2$ si $\beta \gg 1$. En este caso $\beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m} = 2000/1000 = 2$ y está justo en el límite de validez de ambas aproximaciones; para $\beta > 1$ es una mejor estimación usar $\alpha = 2$. Por lo tanto,

$$B_T \approx 2(\beta + 2) f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m) = 2(2 + 2)kHz = 8kHz$$

(b) Si la frecuencia de la moduladora, f_m, se duplica, tenemos que:

$$\beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m} = \frac{2000}{2 \cdot 1000} = 1$$

Nuevamente, el valor de β está en el límite, y tomamos por lo tanto $\alpha = 2$. Luego:

$$B_T \approx 2(\beta + 2) f_m = 2(1 + 2) 2 \cdot 1kHz = 12kHz$$

(c) Si ahora se duplica el valor de A_m, y se mantiene la máxima desviación en frecuencia, tenemos que el valor de β no cambia respecto al caso anterior, y por lo tanto el valor del ancho de banda tampoco, ya que en sí lo único que hace variar A_m es el valor de la máxima desviación en frecuencia.
Sin embargo, si permitimos que esta desviación varíe, entonces en este caso tendremos que:

$$\beta = \frac{A'_m f_\Delta}{f_m} = \frac{2A_m f_\Delta}{f_m} = 2$$

Tomando $\alpha = 2$, llegamos a que:

$$B_T \approx 2(\beta + 2)f_m = 2(2+2)2kHz = 16kHz$$

Ejercicio 3

(a) Cálculo de B_T:

$$\beta = \frac{f_\Delta A_m}{f_m}$$

$$D = \frac{f_\Delta}{f_m} = \frac{10Hz}{10kHz} \ll 1$$

Por lo que:

$$B_T = 2(\beta + 1)f_m$$

Entonces $B_T \approx 2W = 20kHz$.
El error estuvo en no llamar a un técnico.

(b) Si $f_\Delta = 1MHz$, $D = \frac{1MHz}{10kHz} = 100$ entonces

$$B_T = 2(D+1)W = 2(101)10kHz = 2,02MHz$$

En este caso no se equivocó porque no era necesario llamar a un técnico.

Ejercicio 4

(a) Las señales moduladas son, en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{PM}: &\quad x_{\text{PM}}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + \phi_\Delta x_1(t)\right) \\ \text{FM}: &\quad x_{\text{FM}}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x_2(\lambda) d\lambda\right) \end{aligned}$$

Para que los espectros sean iguales puede tomarse $x_1(t) = A_m \cos(\omega_m t)$ y $x_2(t) = A_m \sin(\omega_m t)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{PM}: &\quad x_{\text{PM}}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + \phi_\Delta A_m \sin(\omega_m t)\right) \\ \text{FM}: &\quad x_{\text{FM}}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + \tfrac{A_m f_\Delta}{f_m} \sin(\omega_m t)\right) \end{aligned}$$

En ambos casos el espectro será un tren de delats centrados en las frecuencias de la forma $f_c + nf_m$, con n entero, ponderados por los coeficientes de Bessel $J_n(\beta)$. Se tiene $\beta = A_m f_\Delta / f_m$ en el caso de FM y $\beta = A_m f_\Delta$ para PM. De aquí resulta claro que si f_m aumenta (disminuye), la separación entre los deltas en ambos casos también aumenta (disminuye). Falta analizar como cambian los coeficientes $J_n(\beta)$ al variar f_m. Analizaremos como varía la cantidad de coeficientes de Bessel relevantes en el espectro, lo que determina el ancho de banda del mismo. El siguiente análisis se basa en la fórmula de Carlson que nos premite expresar de forma más conveniente el ancho de banda de dichos espectros,

$$B_T = 2(\beta + \alpha) f_m$$

donde α toma los valores 0,1 o 2 de acuerdo al valor que tome β.
En el caso de PM el ancho de banda varía siempre de la misma forma que lo hace el parámetro f_m por ser éste proporcional. En tanto que para el caso de FM el análisis debe hacerse teniendo en cuenta el valor numérico de β. Si β no es mucho mayor que 1, el ancho de banda también aumenta (disminuye) conforme lo hace f_m, mientras que en caso contrario, el ancho de banda resulta independiente de f_m.

(b) Si ahora es A_m quien aumenta (disminuye), tenemos que este cambio afecta de la misma forma ambos espectros: en ambos casos, si β no es mucho menor que 1, el ancho de banda también aumenta (disminuye).

Ejercicio 5

(a) Sabemos que la señal modulada se puede escribir de la forma:

$$x_c(t) = A_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos\left(\omega_c t + n\omega_m t\right)$$

Como $\beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m}$, si varía A_m varía también el valor de β. Por lo tanto cambiarán también los valores de $J_n(\beta)$, funciones de Bessel. Como miramos solo la componente en f_c, solo importa el caso en que $n = 0$, es decir, $J_0(\beta)$. Sabemos en qué valores de β esta función presenta ceros, e igualando dichos valores a $\frac{A_m f_\Delta}{f_m}$, obtenemos varios posibles valores de f_Δ. Haciendo un promedio, llegamos al valor de f_Δ buscado.

(b) Considerando las nueve primeras raíces de $J_0(\beta)$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{lll}
\beta_1 = 2.4048 & \Rightarrow & f_{\Delta 1} = 2.08 \cdot 10^{-2} \\
\beta_2 = 5.5201 & \Rightarrow & f_{\Delta 2} = 1.92 \cdot 10^{-2} \\
\beta_3 = 8.6537 & \Rightarrow & f_{\Delta 3} = 1.949 \cdot 10^{-2} \\
\beta_4 = 11.7915 & \Rightarrow & f_{\Delta 4} = 2.18 \cdot 10^{-2} \\
\beta_5 = 14.9309 & \Rightarrow & f_{\Delta 5} = 2.03 \cdot 10^{-2} \\
\beta_6 = 18.0711 & \Rightarrow & f_{\Delta 6} = 1.99 \cdot 10^{-2} \\
\beta_7 = 21.2116 & \Rightarrow & f_{\Delta 7} = 1.99 \cdot 10^{-2} \\
\beta_8 = 24.3525 & \Rightarrow & f_{\Delta 8} = 2.01 \cdot 10^{-2} \\
\beta_9 = 27.4935 & \Rightarrow & f_{\Delta 9} = 1.996 \cdot 10^{-2}
\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{f_\Delta} = 2.02 \cdot 10^{-2} kHz$$

Ejercicio 6

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

donde $\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t x(t)dt$

$$u(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) - A_c \cos(\omega_c (t - T_d) + \phi(t - T_d))$$

$$v(t) = -A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) - A_c \cos(\omega_c (t - T_d) + \phi(t - T_d))$$

y como $\omega_c T_d = -\frac{\pi}{2}$

$$u(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) + A_c \sin(\omega_c t + \phi(t - T_d))$$

$$u(t) = A_c (\cos(\omega_c t + \phi(t)) + \sin(\omega_c t + \phi(t - T_d)))$$

$$u(t) = A_c (\cos(\omega_c t)\cos(\phi(t)) - \sin(\omega_c t)\sin(\phi(t))) + \sin(\omega_c t)\cos(\phi(t - T_d)) + \cos(\omega_c t)\sin(\phi(t - T_d)))$$

$$u(t) = A_c [\cos(\omega_c t)(\cos(\phi(t)) + \sin(\phi(t - T_d))) + \sin(\omega_c t)(\cos(\phi(t - T_d)) - \sin(\phi(t)))]$$

Análogamente:

$$v(t) = A_c [\cos(\omega_c t)(-\cos(\phi(t)) + \sin(\phi(t - T_d))) + \sin(\omega_c t)(\cos(\phi(t - T_d)) + \sin(\phi(t)))]$$

Y luego del detector de envolvente:

$$\hat{u}(t) = A_c \sqrt{(\cos(\phi(t)) + \sin(\phi(t - T_d)))^2 + (\cos(\phi(t - T_d)) - \sin(\phi(t)))^2}$$

$$\hat{v}(t) = A_c \sqrt{(-\cos(\phi(t)) + \sin(\phi(t - T_d)))^2 + (\cos(\phi(t - T_d)) + \sin(\phi(t)))^2}$$

$$\hat{u}(t) = A_c \sqrt{2 + 2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t - T_d)) - 2\cos(\phi(t - T_d))\sin(\phi(t))}$$

$$\hat{v}(t) = A_c \sqrt{2 + 2\sin(\phi(t))\cos(\phi(t - T_d)) - 2\sin(\phi(t - T_d))\cos(\phi(t))}$$

Operando:

$$\hat{u}(t) = A_c \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}$$

$$\hat{v}(t) = A_c \sqrt{2}\sqrt{1 + \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}$$

$$\hat{u}(t) - \hat{v}(t) = A_c \sqrt{2}[\sqrt{1 - \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))} - \sqrt{1 + \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}]$$

Multiplicando y dividiendo por:

$$[\sqrt{1 - \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))} + \sqrt{1 + \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}]$$

Se obtiene:

$$\hat{u}(t) - \hat{v}(t) = \frac{A_c \sqrt{2}(-2)\sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}{\sqrt{1 - \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))} + \sqrt{1 + \sin(\phi(t) - \phi(t - T_d))}}$$

Si T_d es pequeño, entonces el denominador puede aproximarse por 2 y $\sin(\phi(t) - \phi(t - T_d)) \approx \phi(t) - \phi(t - T_d)$ Entonces:

$$\hat{u}(t) - \hat{v}(t) = -A_c \sqrt{2}(\phi(t) - \phi(t - T_d)) = -A_c \sqrt{2} T_d (\frac{\phi(t) - \phi(t - T_d)}{T_d})$$

Y volviendo a considerar que T_d es pequeño

$$\hat{u}(t) - \hat{v}(t) \approx -A_c \sqrt{2} T_d \dot{\phi}(t)$$

como

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t x(t)dt$$

tenemos que

$$\hat{u}(t) - \hat{v}(t) \approx -A_c \sqrt{2} T_d 2\pi f_\Delta x(t)$$

Ejercicio 7

(a) La señal en el punto A es de la forma:

$$x_A(t) = A_1 x_1(t) + A_1 x_2(t)\cos(2\pi f_1 t)$$

Luego, la densidad espectral de potencia de esta señal es:

$$S_{x_A}(f) = A_1 S_{x_1}(f) + \frac{A_1}{4}\left(S_{x_2}(f - f_1) + S_{x_2}(f + f_1)\right)$$

El espectro entonces queda:
Así, para poder recuperar $x_1(t)$ y $x_2(t)$, se debe cumplir que:

$$f_1 \geq W_1 + W_2 \Rightarrow f_{1,min} = W_1 + W_2$$

El ancho de banda de la señal a transmitir es:

$$W_A = f_1 + W_2$$

(b) La señal en el punto A' es:

$$x_{A'}(t) = A_2 x_1(t)\cos(2\pi f_2 t) + A_2 x_2(t)\sin(2\pi f_2 t)$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de esta señal es:

$$S_{x_{A'}}(f) = \frac{A_2}{4}\left(S_{x_1}(f - f_2) + S_{x_1}(f + f_2) + S_{x_2}(f - f_2) + S_{x_2}(f + f_2)\right)$$

El espectro es de la forma:
Se puede ver que si bien los espectros de ambas señales se superponen, en el tiempo las mismas son ortogonales, ya que una es multiplicada por un coseno y la otra por un seno. Luego, se transmiten en cuadratura, y entonces siempre es posible recuperar las señales originales en el destino (asumiendo detección sincrónica sin errores), siempre y cuando se cumpla que:

$$f_2 \geq \text{máx}(W_1, W_2) \Rightarrow f_{2,min} = \text{máx}(W_1, W_2)$$

El ancho de banda de la señal resultante es:

$$W_{A'} = f_2 + \text{máx}(W_1, W_2)$$

(c)

- *Caso x_A:*

$$|x_A(t)| = A_1|x_1(t)+x_2(t)\cos(2\pi f_1 t)| \leq A_1\left(\underbrace{|x_1(t)|}_{\leq 1}+\underbrace{|x_2(t)|}_{\leq 1}\underbrace{|\cos(2\pi f_1 t)|}_{\leq 1}\right)$$

$$\Rightarrow |x_A(t)| \leq 2A_1 \Rightarrow 2A_1 = 1 \Rightarrow \boxed{A_1 = \tfrac{1}{2}}$$

El valor cuadrático medio de $x_A(t)$ es:

$$< x_A^2 >= E\left[x_A^2(t)\right] = E\left[A_1^2\left(x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)\cos(2\pi f_1 t) + x_2^2(t)\cos^2(2\pi f_1 t)\right)\right]$$

Suponiendo x_1 y x_2 independientes entre sí, se tiene que:

$$< x_A^2 >= A_1^2\left(\underbrace{< x_1^2 >}_{=1/2}+2\underbrace{< x_1 >}_{=0}\underbrace{< x_2 >}_{=0}\underbrace{< \cos(2\pi f_1 t)}_{=0} > + \underbrace{\frac{< x_2^2 >}{2}}_{=1/4}\right) = \frac{3A_1^2}{4}$$

Como $A_1 = 1/2$, sustituyendo en la igualdad tenemos que:

$$\boxed{< x_A^2 >= \tfrac{3}{16}}$$

- *Caso $x_{A'}$:*

$$|x_{A'}(t)| = A_2|x_1(t)\cos(2\pi f_2 t)+x_2(t)\sin(2\pi f_2 t)| = A_2\sqrt{\underbrace{x_1^2(t)}_{\leq 1}+\underbrace{x_2^2(t)}_{\leq 1}} \leq A_2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

El valor cuadrático medio de $x_{A'}(t)$ es:

$$< x_{A'}^2 >= E\left[A_2^2\left(x_1^2(t)\cos^2(2\pi f_2 t) + 2x_1(t)x_2(t)\cos(2\pi f_2 t)\sin(2\pi f_2 t) + x_2^2(t)\sin^2(2\pi f_2 t)\right)\right]$$

Suponiendo x_1 y x_2 independientes entre sí, se tiene que:

$$< x_{A'}^2 >= A_2^2 \left(\underbrace{\frac{< x_1^2 >}{2}}_{=1/4} + 2 \underbrace{< x_1 >}_{=0} \underbrace{< x_2 >}_{=0} < \cos(2\pi f_2 t) \sin(2\pi f_2 t) > + \underbrace{\frac{< x_2^2 >}{2}}_{=1/4} \right) = \frac{A_2^2}{2}$$

Como $A_2 = 1/\sqrt{2}$, sustituyendo en la igualdad tenemos que:

$$\boxed{< x_{A'}^2 >= \frac{1}{4}}$$

(d) Sabemos que el ancho de banda de una señal modulada en FM es $B_T = 2(D+2)W$.

Por lo tanto, para cada caso se tendrá que:

$$B_{T,A} = 2(D+2)W_A = 2(D+2)(f_1+W_2)B_{T,A'} = 2(D+2)W_{A'} = 2(D+2)(f_2+\text{máx}(W_1, W_2)$$

Como $f_{1,min} = W_1+W_2$ y $f_{2,min} = \text{máx}(W_1, W_2)$, entonces $W_{A,min} = W_1+2W_2$ y $W_{A',min} = 2\,\text{máx}(W_1, W_2)$.

Comparando estos dos valores, se tiene que:

$$\begin{cases} B_{T,A'} < B_{T,A} & \text{si } W_1 < 2W_2 \\ B_{T,A'} > B_{T,A} & \text{si } W_1 > 2W_2 \end{cases}$$

(e)