Series de Fourier

En este capítulo estudiaremos las series de Fourier con el fin de poder utilizarlas en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

0.1. Introducción

Así como ya han visto que podemos aproximar una función derivable con un polinomio (Taylor), la idea de las series de Fourier es aproximar una función con la suma de senos y cosenos. Las series de Fourier se utilizan mucho en varios campos de la tecnología, principalmente en la ingeniería eléctrica.

La motivación a encontrar una serie de senos y cosenos con la cual podamos describir una función, surgió gracias a la ecuación diferencial de calor en derivadas parciales. En este problema, que veremos en el siguiente capítulo, podremos encontrar una solución analítica a la misma si la condición inicial es suma de senos y cosenos.

Una aplicación sencilla de las series de Fourier es un cronómetro. Para medir el tiempo, la mayoría de los cronómetros utiliza un voltaje con forma de onda cuadrada. Esto es una onda que toma el valor A y $-A$ alternadamente. Cuando el valor del voltaje cambia, el cronómetro interpreta que ha transcurrido una unidad de tiempo. Lo que se hace normalmente para formar esta onda cuadrada, es sumar varios voltajes sinusoidales de distinta frecuencia y distinta amplitud.

En las imágenes de la figura (1) podemos ver como aproximar mediante senos una onda cuadrada con $A = 1$ y período 2π. De forma gruesa uno podría aproximar la onda por un único seno como se ve en la figura (1.a). En esta aproximación se observa que tenemos excedentes en los valores cercanos a $\pm\pi/2$ y déficit donde el seno se anula. Para compensar esto, podríamos sumar un seno de menor amplitud pero con el triple de frecuencia ($\text{sen}(3t)$), obteniendo un resultado como muestra la imagen (1.b). Nuevamente se tienen zonas de excedente y otras de deficit, que se pueden tratar de compensar sumando un $\text{sen}(5t)$ (1.c), luego de $\text{sen}(7t)$ (1.d), $\text{sen}(9t)$ (1.e) y así sucesivamente. A medida que vayamos sumando más términos (con la frecuencia y amplitud conveniente) nos iremos aproximando con mayor precisión a la onda cuadrada. La figura (1.f) se puede obtener haciendo la correcta combinación lineal de 20 senos de distintas frecuencias y amplitudes. A medida que aumentamos la frecuencia del seno, podemos compensar de forma más precisa los errores que van quedando al aproximar.

En este ejemplo, vemos gráficamente que esta suma de senos va convergiendo a la onda cuadrada. Esto será lo que trataremos de hacer. Encontrar la correcta combinación lineal de senos y cosenos con la que podamos escribir, en principio, cualquier función periódica.

0.2. Repaso de espacio vectorial real con producto interno

Como menciona el título, haremos un repaso de lo visto en álgebra lineal para espacios vectorial con producto interno y luego aplicaremos esto para las series de Fourier.
Consideremos V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$ y $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal de V. Recordemos que un conjunto es ortonormal si:

$$< \varphi_i, \varphi_k >= 0 \text{ si } i \neq k$$

$$||\varphi_i||^2 =< \varphi_i, \varphi_i >= 1 \text{ para todo } i = 1, ..., n.$$

En nuestro caso (para las series de Fourier), φ_k serán los senos y cosenos con distinta frecuencia y lo que queremos es encontrar la combinación lineal de los mismos que mejor aproxime una función f periódica. En el caso de un espacio con producto interno, esta combinación lineal era justamente la proyección de f en el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Esta combinación lineal expresada analíticamente es:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \tag{0.1}$$

donde definimos $c_k =< f, \varphi_k >$.

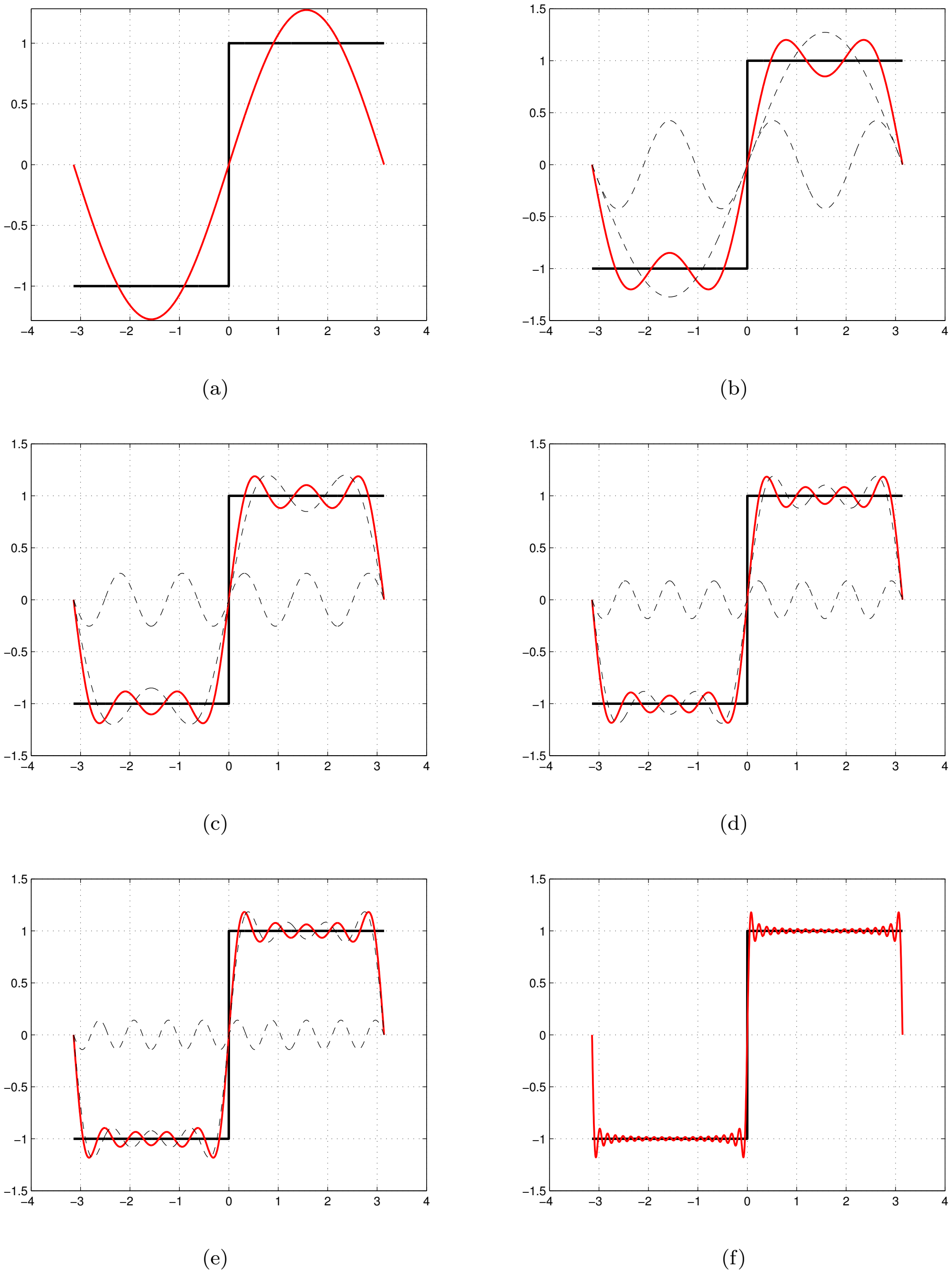


FIGURA 1. Aproximación con senos de la onda cuadrada

Proposición 0.1. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$. Entonces*

$f - S_n \perp \varphi_k$ (esto es $< f - S_n, \varphi_k >= 0$) para todo $k = 1, ..., n$.

Demostración:

Por propiedad del producto interno:

$$< f - S_n, \varphi_k >=< f, \varphi_k > - < S_n, \varphi_k >$$

Si sustituimos S_n y desarrollamos el segundo término a la derecha de la igualdad tenemos que:

$$< S_n, \varphi_k >=< \sum_{i=0}^{n} < f, \varphi_i > \varphi_i, \varphi_k >= \sum_{i=0}^{n} << f, \varphi_i > \varphi_i, \varphi_k >= \sum_{i=0}^{n} < f, \varphi_i >< \varphi_i, \varphi_k >$$

$$< S_n, \varphi_k >=< f, \varphi_k >< \varphi_k, \varphi_k >=< f, \varphi_k > .$$

Donde se utilizó propiedades del producto interno y que el conjunto S es ortonormal. Sustituyendo esto último en la primer ecuación obtenemos el resultado deseado. $\square$

Corolario 0.1. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, S el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$. Entonces para todo $s \in S$ se cumple que*

$$f - S_n \perp s.$$

La demostración es directa ya que todo $s \in S$ es combinación lineal de φ_k los cuales son perpendiculares a $f - S_n$. $\square$

En esta sección siempre que hablemos de la norma, será la norma asociada al producto interno, es decir $||f||^2 =< f, f >$.

Corolario 0.2. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$. Entonces*

$$||f||^2 = ||f - S_n||^2 + ||S_n||^2.$$

Demostración:

Como $f - S_n$ es perpendicular a S_n, se cumple Pitágoras, de donde tenemos que:

$$||f||^2 = ||(S_n - f) - S_n||^2 = ||S_n - f||^2 + ||S_n||^2 \Rightarrow ||f||^2 = ||f - S_n||^2 + ||S_n||^2.$$

$\square$

Corolario 0.3. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$. Entonces*

$$||S_n|| \leq ||f||.$$

La demostración es directa del corolario anterior. $\square$

Además como $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, se cumple que

$$||S_n||^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k \right\|^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=} \sum_{k=0}^{n} || < f, \varphi_k > \varphi_k||^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} | < f, \varphi_k > |^2 ||\varphi_k||^2 \overset{||\varphi_k|| = 1}{=} \sum_{k=0}^{n} | < f, \varphi_k > |^2.$$

De donde se deduce, aplicando el corolario anterior, que

$$\sum_{k=0}^{n} | < f, \varphi_k > |^2 \leq ||f||^2. \tag{0.2}$$

En el siguiente teorema demostraremos que la mejor aproximación de f en el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es S_n.

Teorema 0.1. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $<,>$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} < f, \varphi_k > \varphi_k$. Si $T_n = \sum_{0}^{n} d_k \varphi_k$ con d_k cualesquiera, se cumple que:*

$$||f - S_n|| \leq ||f - T_n||.$$

Demostración: Sea S el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Como $S_n, T_n \in S$ entonces, por el Corolario 0.1, se tiene que $f - S_n \perp S_n - T_n$. Luego

$$||f - T_n||^2 = ||f - S_n + S_n - T_n||^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=} ||f - S_n||^2 + ||S_n - T_n||^2.$$

Entonces

$$||f - T_n||^2 \geq ||f - S_n||^2 \Rightarrow ||f - T_n|| \geq ||f - S_n||.$$

$\square$

0.3. Series de Fourier

Ahora si, llevaremos lo visto en la sección pasada a las series de Fourier. Consideremos el espacio de funciones:

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua a trozos y } 2\pi \text{ periódica}\}$$

Se recuerda que una **función continua a trozos** es una función que en cualquier intervalo cerrado es continua excepto en una cantidad finita de puntos, donde los límites laterales existen y son finitos. Una función 2π **periódica** significa que $f(x) = f(x + 2\pi)$. Observar que como el $sen(nx)$ y $cos(nx)$ son funciones 2π periódicas, la suma de cualquier combinación lineal de los mismos también será una función 2π periódica. En la figura (2) se pueden ver algunas posibles funciones que perteneces al conjunto V.

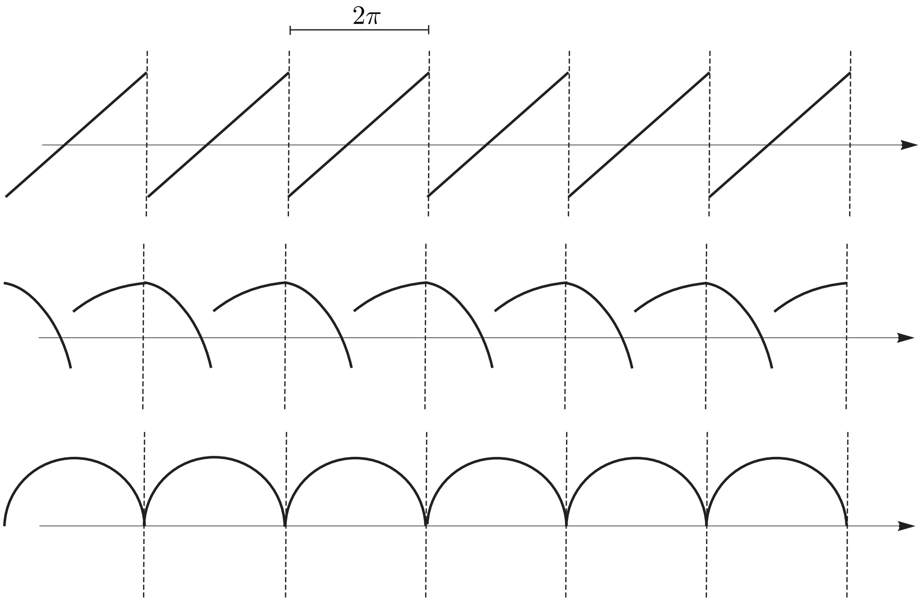


Figura 2. Funciones en el espacio V

Quizás recuerden de GAL, que un posible producto interno en un espacio de funciones continuas es:

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Si tratáramos de verificar que el mismo sea un producto interno para el espacio de funciones V, deberíamos verificar si cumple las propiedades del producto interno. Sea $u, w, z \in V$:

- $< u + w, z >=< u, z > + < w, z >$.
- $< au, z >= a < u, z >$, con $a \in \mathbb{R}$.
- $< u, z >=< z, u >$.
- $< u, u >\geq 0$ y $< u, u >= 0$ si y solo si $u = 0$.

Se puede demostrar rápidamente que verifica las primeras 3 propiedades. Sin embargo, no se verifica la última propiedad para el conjunto de las funciones continuas a trozos. Si consideramos una función nula entre $[-\pi, \pi]$ en todos lados salvo en un punto, el producto interno de esa función con sigo misma sería nulo aunque la función no sea nula. En consecuencia, esa operación no es un producto interno para el espacio vectorial V y no podríamos usar lo obtenido en la sección anterior. Hacemos notar que dentro de los teoremas que fueron demostrados no se utilizó esta propiedad por lo que los teoremas anteriores son válidos aunque $<, >$ no cumpla con todas las propiedades de un producto interno. Este problema se arregla definiendo una clase de equivalencia en V. Decimos que dos funciones $f, g \in V$ son equivalentes si f y g difieren en una cantidad finita de puntos. Aunque no haremos hincapié en este último concepto.

[1]

[1]El que tenga interés en comprobar esta valides puede dirigirse a https://www.fing.edu.uy/ omargil/ecdif/texto00

El primer conjunto S que uno pensaría en tomarse para desarrollar una función según senos y cosenos sería el siguiente:

$$S = \{1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \ldots\}.$$

Veamos si este conjunto es ortonormal. Es decir, que si consideramos dos funciones cualesquiera distintas del conjunto, el producto interno es nulo y si consideramos el producto interno de una función de S consigo misma da la unidad. Empecemos con la ortogonalidad:

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1.sen(nx)\ dx = 0$ por integrar una función impar.
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1.cos(nx)\ dx = sen(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx).sen(mx)\ dx = 0$ por integrar una función impar.

Para las siguientes integrales, recordar la igualdad trigonométrica:

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}\left(cos(b-a) + cos(b+a)\right)$$
$$sen(a)sen(b) = \frac{1}{2}\left(cos(b-a) - cos(b+a)\right)$$

- Con $n \neq m$:
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx).cos(mx)\ dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} cos(x(n-m))\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} cos(x(n+m))\ dx\right) = 0.$$
- Con $n \neq m$:
$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(mx)\ dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} cos(x(n-m))\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} cos(x(n+m))\ dx\right) = 0$$

Con estas cuentas hemos probado que el conjunto es ortogonal. Veamos ahora si es ortonormal.

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = 2\pi$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + cos(2nx)\ dx = \pi$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)\ dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - cos(2nx)\ dx = \pi$

Claramente el conjunto S no es ortonormal con el producto interno definido. Redefiniremos entonces el producto interno y el conjunto S.

$$< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx$$

$$S = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \ldots\}$$

Proposición 0.2.

El conjunto $S = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \ldots\}$ *es un conjunto ortonormal respecto al producto interno* $< f, g >= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx.$

Para la demostración basta volver a realizar las cuentas anteriores teniendo en cuenta estas modificaciones.

Llamaremos **serie parcial de Fourier** de f a:

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k sen(kx)$$

donde a_0, a_k y b_k son los coeficientes de Fourier que se definen como:

$$a_0 =< f, 1 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$a_k =< f, cos(kx) >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\ dx$$
$$b_k =< f, sen(kx) >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)\ dx.$$

Para la siguiente definición vamos asumir que dada f las series $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx)$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(kx)$ son convergentes.

Llamaremos **serie de Fourier** de f a:

$$S_{\infty(f)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(kx).$$

Tanto S_n como en S_∞ dependen de la función f. Esta dependencia la encontramos en los coeficientes a_0, a_k y b_k.

Para lo que resta de este capítulo, asumimos que $S_\infty(f)$ es una serie convergente.

Proposición 0.3.

$$||S_n(f)||^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Demostración:

$$||S_n(f)||^2 =< S_n, S_n >=< \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)), \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) >$$

Dado que el conjunto S es ortogonal, utilizando las propiedades del producto interno se llega a que:

$$||S_n(f)||^2 =< \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2} > + \sum_{k=1}^{n} < a_k cos(kx), a_k cos(kx) > + \sum_{k=1}^{n} < b_k sen(kx), b_k sen(kx) >$$
$$= \left|\left|\frac{a_0}{2}\right|\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ||cos(kx)||^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 ||sen(kx)||^2$$

Dado que S es ortonormal se cumple que $||cos(kx)|| = ||sen(kx)|| = 1$. A su vez, la norma de una constante con el producto interno definido es $||A||^2 = 2A^2$ obteniendo finalmente que:

$$||S_n||^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

□

Corolario 0.4 (Desigualdad de Bessel).

Sea $f \in V$ se cumple que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq ||f||^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

La demostración es inmediata de la proposición anterior (0.3) y el Corolario 0.3.

Corolario 0.5.

Las series reales $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ *y* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$ *son convergentes.*

Demostración:

Dado que la función f es continua a trozos, la integral del módulo de f es un número finito (no diverge). Utilizando el teorema anterior y esto último deducimos que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$ está acotado para cualquier n. Dado que $a_k^2 + b_k^2$ es siempre positivo, que esa sumatoria está acotada implica que sea convergente. □

Si bien ya hemos visto que S_n es la mejor aproximación de f en el subespacio generado por S, no sabemos si esta aproximación es buena. ¿A que nos referimos con que una aproximación sea buena?

Cuando hablemos de una buena aproximación nos estamos refiriendo a que S_n puede ser tan cercano a f como quisiéramos. En otras palabras, esto implica que $||f - S_n|| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Teorema 0.2.

S es completo en V. Es decir que dado $f \in V$ se cumple que:

$$||f - S_n(f)|| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Este teorema no será demostrado en el curso.

Observación:

- El hecho que $||f - S_n(f)|| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, NO implica que S_n tienda a f puntualmente.

Proposición 0.4 (Igualdad de Parseval).

Sea $f \in V$ se cumple que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = ||f||^2.$$

Aceptando el teorema anterior, esta igualdad se obtiene del Corolario 0.2 y de la igualdad (0.2).□

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos y 2π periódica. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ definimos:

$$f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ y } f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Teorema 0.3 (Dini).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos, 2π periódica y tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que existen y son finitos los siguientes límites:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \ y \ \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-.$$

Entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$S_\infty(f)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Cuando f es continua los puntos $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ coinciden. Por lo tanto tenemos el siguiente corolario:

Corolario 0.6.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en las hipótesis del Teorema de Dini. Entonces $S_n(f)$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}$. O lo que es equivalente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(kx).$$

Se recuerda que:

- Sea f una función impar y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.
- Sea f una función par y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.
- Sea f y g dos funciones pares (o impares) $\Rightarrow f.g(x)$ es una función par.
- Sea f una función par y g una función impar $\Rightarrow f.g(x)$ es una función impar.

En el siguiente ejemplo, hallaremos la serie de Fourier de una función continua a trozos. Y utilizaremos algunos de estos resultados.

***Ejemplo* 0.1.**

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periódica tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Para hallar la serie de Fourier debemos hallar los coeficientes de Fourier.

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = 0$ ya que f es impar.
- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx) = 0$ ya que $f(x)cos(kx)$ es impar.
- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} 1.sen(kx)$ por ser par la función $f(x)sen(kx)$. Luego:

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\frac{cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-cos(k\pi)}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 4/\pi k & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(kx) \overset{k=2i+1}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)}sen((2i+1)x).$$

Por el Teorema de Dini (0.3) podemos deducir que S_n converge puntualmente a:

$$S_n \xrightarrow{n\to+\infty} S_\infty = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 1 & \text{si } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases}$$

S_∞ coincide con f en los puntos donde f es continua pero no en los puntos de la forma $k\pi$. Vemos que como se mencionó antes, si bien $||f - S_n||$ tiende a cero cuando n tiende a infinito (resultado del teorema 0.2), $f - S_n$ no tiende a la función nula. ¿Puede S_n converger uniformemente? Si se recuerda el teorema del capítulo de convergencia este decía que si una sucesión de funciones continuas f_n convergía uniformemente a una función f, esta última debía ser continua. S_n es una sucesión de funciones continuas (el seno es una función continua) y converge puntualmente a una función discontinua S_∞. En consecuencia, S_n no puede converger uniformemente.

Saber la convergencia puntual de S_n puede ser útil para averiguar cuanto valen algunas series reales. Por ejemplo en $x = \pi/2$ tenemos que:

$$S_\infty = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)}sen\left(\frac{(2i+1)\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)}(-1)^i = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)}(-1)^i = \frac{\pi}{4}$$

Otra forma de obtener el resultado de series reales es con la igualdad de Parseval (0.4). Esta proposición nos decía que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = ||f||^2 \Rightarrow \frac{16}{\pi^2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

○

El teorema de Dini (0.3) nos permite hablar de la convergencia puntual de S_n pero no de la convergencia uniforme. Para ver la convergencia uniforme, utilizaremos un resultado visto en el capítulo de convergencia llamado el Criterio del Mayorante de Weierstrass.

Teorema 0.4.

Sea $f \in V$, continua, derivable a trozos y de período 2π, tal que sus coeficientes de Fourier cumplen que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k| \ \textit{converge} \Rightarrow S_n \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración:

El criterio del Mayorante (ver capítulo convergencia uniforme) nos dice que si tenemos una sucesión de funciones de la forma $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ y una sucesión real A_k que verifique que $|f_k(x)| < A_k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $k \geq 1$, si $\sum_{k=0}^{n} A_k$ converge entonces la sucesión s_n converge uniformemente. En particular para las series de Fourier si se encuentra una sucesión real A_k que cumpla:

$$|a_k cos(kx) + b_k sen(kx)| \leq A_k$$

con $\sum_{k=0}^{n} A_k$ convergente S_n convergería uniformemente a S_∞. Como se cumple que:

$$|a_k cos(kx) + b_k sen(kx)| \leq |a_k cos(kx)| + |b_k sen(kx)| \leq |a_k| + |b_k|$$

si consideramos $A_k = |a_k| + |b_k|$ se sabe por hipótesis que la serie de A_k converge, y por lo tanto S_n converge uniformemente. Por el Teorema de Dini S_n converge a f. $\square$

***Ejemplo* 0.2.**

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π periódica tal que $f(x) = |x|$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Hallemos la serie de Fourier de esta función.

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\ dx = \pi$
- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\ dx = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcos(kx)\ dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{xsen(kx)}{k} + \dfrac{cos(kx)}{k^2}\right)\Big|_0^{\pi}.$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\frac{cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 4/\pi k^2 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)\ dx = 0.$

Como f es continua y derivable a trozos se cumple que:

$$S_n(f) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}cos(kx) \xrightarrow{n\to+\infty} S_\infty(f) = f(x)$$

Tenemos que S_n converge puntualmente a f. Veamos si converge uniformemente.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right| < \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{n} 2/k^2$ converge también lo hará $\sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k|$. De modo que f se encuentra en las hipótesis del teorema 0.4 y por lo tanto converge uniformemente a f. En este caso la serie de Fourier es una excelente aproximación de f. En la figura 3 se puede ver como la sucesión $S_n(f)$ tiende a f muy rápidamente. $\bigcirc$

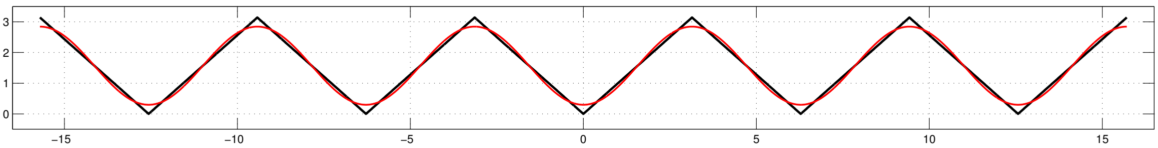
Proposición 0.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, de período 2π y su derivada continua a trozos. Sean $a_n(f)$ y $b_n(f)$ los coeficientes de Fourier de f y $a_n(f')$ y $b_n(f')$ los coeficientes de Fourier de f'. Entonces:*

- $a_0(f') = 0.$
- $a_k(f') = kb_k(f).$
- $b_k(f') = -ka_k(f).$

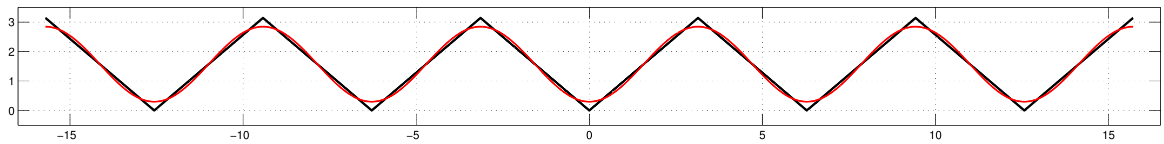
Demostración:

$$a_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0 \ \ \text{(por ser f de período } 2\pi\text{).}$$

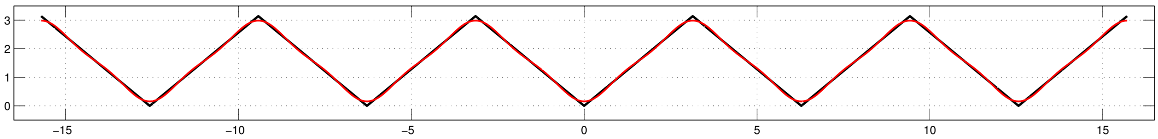
$$a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos(kx)dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}f(x)cos(kx)\,\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx = kb_k(f).$$



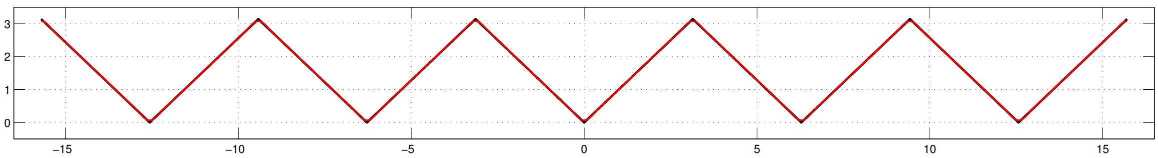
(a) $S_1(f)$



(b) $S_2(f)$



(c) $S_3(f)$



(d) $S_{10}(f)$

FIGURA 3. Serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ con $x \in [-\pi, \pi]$.

$$b_k(f^{'}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{'}(x)sen(kx)dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}f(x)sen(kx)\,|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = -ka_k(f).$$

Criterio: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge. Demostración:

Usando que $(|a_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ se tiene que $a_n^2 + \frac{1}{n^2} \geq 2\frac{|a_n|}{n}$. Luego por criterios de comparación se cumple que $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge.

Proposición 0.6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua, de período 2π. Entonces*

$$S_n \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración: Por la proposición 0.4 basta con probar que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|$ converge.

Por la desigualdad de Parseval sabemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2(f^{'})+b_k^2(f^{'})$ converge. Luego por el criterio de arriba se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k(f^{'})|}{k} + \frac{|b_k(f^{'})|}{k}$ converge. Por la proposición 0.5 se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|$ converge.

0.4. Series de Fourier para funciones $2L$ periódicas

Hasta ahora hemos trabajamos con funciones de período 2π. Sin embargo se puede razonar de forma análoga para funciones de período $2L$, con L cualquier real. Más genéricamente, nos consideraremos el espacio vectorial real:

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \text{ es continua a trozos y } 2L \text{ periódica}\}$$

con el producto interno

$$< f, g >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\ dx.$$

Para formar funciones $2L$ periódicas, ahora debemos considerar el conjunto ortonormal:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), sen\left(\frac{\pi}{L}x\right), cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), sen\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \ldots \right\}.$$

Se puede verificar rápidamente que las funciones $sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ y $cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ son $2L$ periódicas.

La serie de Fourier para una función $2L$ será:

$$S_\infty(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 =< f, 1 >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx$$

$$a_k =< f, cos(kx) >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx$$

$$b_k =< f, sen(kx) >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx.$$

Todos los teoremas y corolarios vistos siguen siendo válidos para funciones $2L$ periódicas.

0.5. Extensiones pares e impares.

Se desea escribir la función $f(x) = x(x-\pi)$ con $x \in [0,\pi]$ como una suma infinita de senos y cosenos. Si consideramos cualquier función periódica continua y derivable a trozos definida en todo $\mathbb{R}$ que valga $x(x-\pi)$ en $[0,\pi]$ sabemos que en ese intervalo convergerá puntualmente a f (teorema de Dini 0.3). Consideremos las siguientes funciones de la imagen 4.

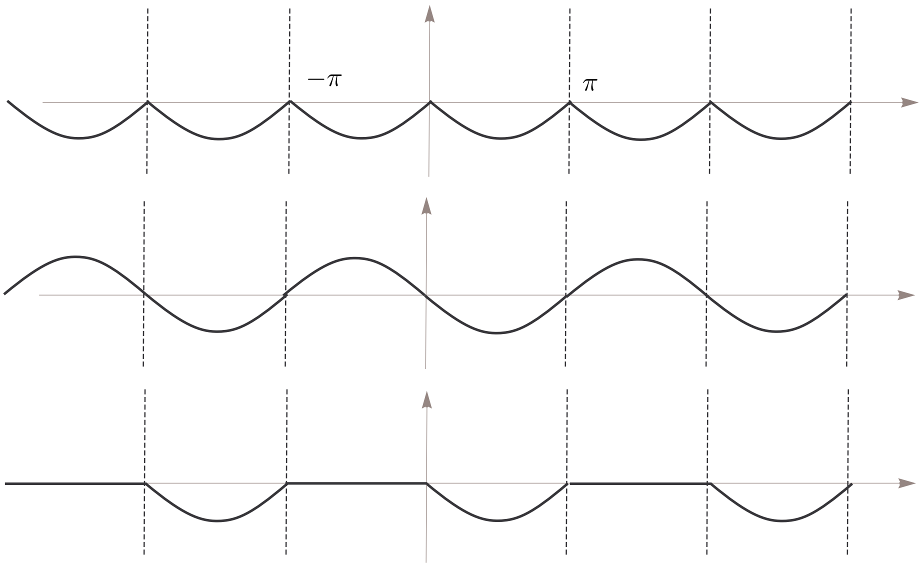


FIGURA 4. Posibles extensiones de la función $x(x-\pi)$ con $x \in [0,\pi]$.

Todas las funciones valen $x(x-\pi)$ cuando $x \in [0,\pi]$. La primera función, es la repetición de $x(x-\pi)$ con $x \in [0,\pi]$ en todos los reales. La segunda es una extensión impar de f en $[-\pi,\pi]$ y la repetición de este intervalo. La tercera es la función nula entre $[-\pi,0)$ y la repetición del intervalo $[-\pi,\pi]$.

Todas estas funciones se encuentran en las hipótesis del corolario del teorema de Dini y por lo tanto se cumple que su serie de Fourier converge puntualmente a las funciones representadas. Las series de Fourier de estas funciones serán distintas ya que las funciones son distintas. Sin embargo, todas las series de Fourier deberán converger puntualmente a $f(x) = x(x-\pi)$ cuando $x \in [0,\pi]$. Así como consideramos esas tres extensiones periódicas, continuas y derivables a trozos de f, podríamos haber considerado infinitas extensiones periódicas más. No es necesario que tenga periodo 2π, basta con que la función sea periódica. En otras palabras, tenemos infinitas formas distintas de escribir $f(x) = x(x-\pi)$ con $x \in [0,\pi]$ como una suma infinita de senos y cosenos.

Si queremos escribir f como una función infinita de cosenos (con $b_k = 0$) basta con tomar una extensión par, como la primera función de la figura. Si consideramos esta función:

- $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(x-\pi) = -\dfrac{\pi^2}{3}$.
- $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(x-\pi)cos(kx) = 2\dfrac{1-cos(k\pi)}{k^2} = 2\dfrac{1-(-1)^k}{k^2}$.
- $b_k = 0$.

Finalmente:

$$x(x-\pi) = -\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2}cos(kx), \quad x \in [0,\pi].$$

Si ahora quisiéramos escribir a f como una suma de senos, ahora deberíamos tomar una extensión impar, como la segunda función de la figura. En este caso:

- $a_0 = 0$.
- $a_k = 0$.
- $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(x-\pi)sen(kx) = 4\dfrac{cos(kx)-1}{\pi k^3} = 4\dfrac{(-1)^k-1}{\pi k^3}$.

La serie que obtenemos ahora es:

$$x(x-\pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^k-1}{\pi k^3}sen(kx), \quad x \in [0,\pi].$$

Observación:

Notar que tanto la extensión par como la impar, la fórmula analítica de la función es $x(x-\pi)$ SOLO en el intervalo $x \in [0,\pi]$. Si fuera del intervalo se tuviera la misma fórmula, el gráfico sería la parábola. Fuera de este intervalo, la función tiene otra fórmula que no fue necesario calcular para realizar la serie de Fourier. Considerando la extensión par o impar, está MAL decir que:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(x-\pi)cos(kx)\ dx \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(x-\pi)sen(kx)$$

ya que la extensión no tiene ese fórmula en el intervalo $[-\pi, 0)$. Si esto fuera cierto, la serie de Fourier sería la misma independientemente de la extensión que hagamos. Esto no puede suceder ya que las series de Fourier de las distintas extensiones deben converger a cosas distintas. $\bigcirc$