Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 6
Modelado de canales

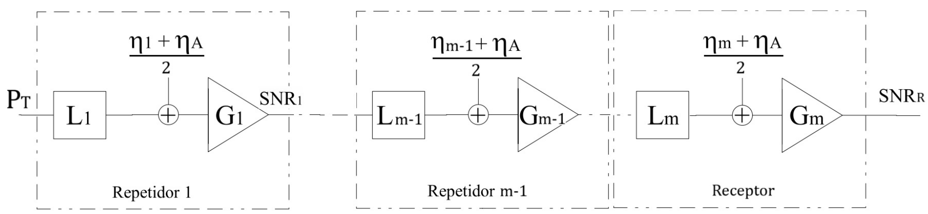
Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

★ Ejercicio 1 (3.3-3 [Car])

Un sistema de comunicación de longitud total 400 km utiliza $(m-1)$ repetidores para m secciones de cable con una atenuación de 0.4 dB/km. Los repetidores y el receptor tienen amplificadores idénticos con una ganancia máxima de 30 dB. Encontrar la cantidad mínima de repetidores m, con la mínima ganancia posible, para que la potencia de salida del sistema sea 50 mW cuando la potencia transmitida es $2W$.

★ Ejercicio 2

Dado un sistema en el cual tenemos fijos P_T, η y B_N, puede que la SNR_R no sea la requerida. Una posible solución es intercalar repetidores (según esquema de la figura).



Cada repetidor es un filtro y un amplificador no ideal que introduce ruido independiente de densidad espectral de potencia η_A. Suponer que se hace un diseño tal que los η_i son todos iguales. y que el ruido de los amplificadores predomina sobre otras fuentes de ruido. Suponer además que $\frac{G_i}{L_i} = 1\ \forall i$.

(a) En dicho caso calcular SNR_R en función de SNR_1.

(b) (Opcional) Para el caso en que el ruido introducido por el canal es mucho mayor que el ruido introducido por los amplificadores, comparar con el sistema sin repetidores.

(c) De ahora en más se supondrá que el ruido introducido por los repetidores es mucho mayor que el ruido introducido por el canal. Se va a transmitir una señal a 40 km, empleando una línea de transmisión cuya pérdida es de 3 dB/km; el receptor tiene temperatura absoluta $T_N = 10T_0$, donde la densidad espectral de potencia es $\eta_A = 4 \times 10^{-21} \frac{T_N}{T_0}$ y $B_N = 5kHz$.

Calcular $\eta_A B_N$ en dBw y encontrar el valor de P_T (en Watts) que se requiere para obtener $SNR_R = 50dB$. Repetir el segundo cálculo cuando existe un repetidor a la mitad de la trayectoria.

Nota: El dBw (decibel Watt) se define como:

$$P\ dBw = 10 \log_{10} \frac{P}{1\,Watt}$$

⋆ Ejercicio 3

Se desea transmitir una señal analógica de ancho de banda $B = 700\ kHz$ a través de un canal y obtener una $SNR_R = 60\ dB$. Para ello se utiliza un transmisor de potencia $P_T = 1\ Watt$ y un receptor de ancho de banda B. El receptor introduce ruido térmico de densidad espectral de potencia $\eta_A = kT$ con $k = 7 \times 10^{-16}\ \frac{Watt}{Hz°K}$ y tiene una ganancia tal que compensa las pérdidas en el canal. El canal es un cable cuya atenuación es $\alpha = 0.4\ dB/km$.

Nota: A lo largo del ejercicio se supondrá que el ruido introducido por el receptor es mucho mayor que el ruido introducido en el canal.

(a) Hallar la SNR_R en función de la temperatura del receptor T_{Rx} y el largo l del cable. Bosquejar la máxima distancia l_{max} a la que se puede obtener la SNR_R deseada en función de la temperatura del receptor.

(b) Calcular la distancia máxima a la que se puede transmitir la señal si el receptor se encuentra a temperatura $T_{Rx} = 20°C\ (293°K)$.

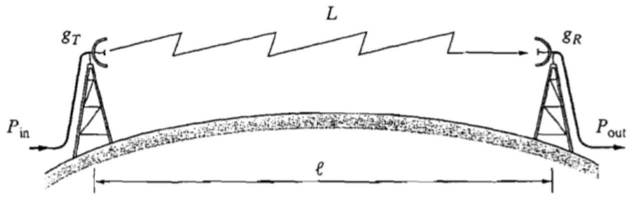
Con el objetivo de aumentar la distancia máxima a la que se puede transmitir la señal, se introduce un repetidor en la mitad del canal. Se supodrá que el repetidor está contruido igual al receptor y se encuentra operando a temperatura T_{Rp}.

(c) Hallar la nueva expresión de la SNR_R en función de la temperatura del receptor T_{Rx}, del repetidor T_{Rp} y el largo de canal l.

(d) Calcular la máxima distancia a la que se puede transmitir, si tanto el repetidor como el transmisor se encuentran operando a temperatura $T = 20°C$.

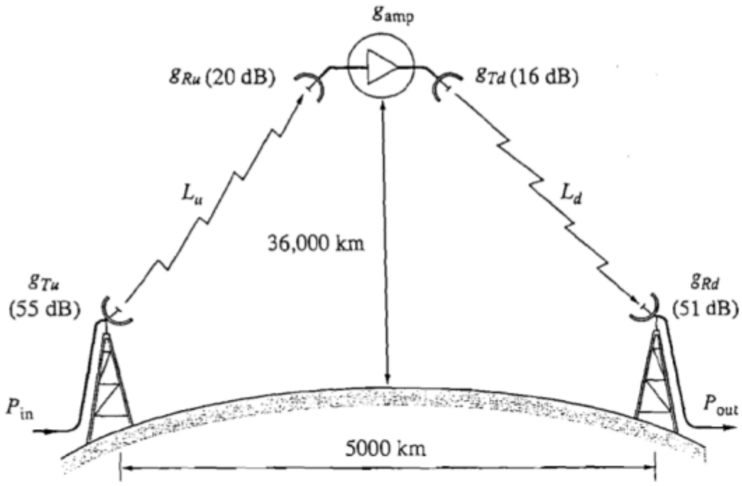
⋆ Ejercicio 4 (3.3-8 [Car])

El enlace inalámbrico de la figura opera a frecuencia 1 GHz y se utiliza para transmitir una señal de TV hacia una empresa de cable rural situada a 50 km. Suponer que se agrega un repetidor en la mitad del camino con ganancia g_{rpt} (incluyendo antenas y amplificador). Obtener la ganancia del repetidor g_{rpt} que genera un incremento en la potencia P_{out} del 20 %.



★ Ejercicio 5 (3.3-9 [Car])

Un sistema DBS (*direct broadcast satellite*) utiliza la frecuencia 17 GHz para el *uplink* y 12 GHz para el *downlink*. Usando los valores de las ganancias de los amplificadores del ejemplo 3.3-1 del libro (ver figura, $g_{amp} = 162$ dB), encontrar P_{out} asumiendo $P_{in} = 30$ dBW.



★ Ejercicio 6

Se desea comparar el modelo de pérdida en espacio libre con el modelo de atenuación de un cable coaxial de 1 cm de diámetro.
La atenuación del cable es:

Frec. (MHz)	1	3	10	100	200	500	700	900	1000
L máx. (dB/100m)	1.5	2	2.5	4.5	9	12	17	20	24

(a) Comparar con los valores correspondientes al modelo de espacio libre.

(b) Comparar la relación entre ambos a frecuencia 500 MHz cuando la distancia es de 200 m. ¿Aumenta o disminuye la relación entre ambos al aumentar la frecuencia?

★ Ejercicio 7

Usando el modelo de atenuación para oficinas ($\gamma = 3$, $L(1) = 0$ dB), determinar la potencia de transmisión necesaria para obtener una potencia de recepción $P_r = -110$ dBm para una transmisión de 100m que atraviesa tres pisos, con atenuaciones 15 dB, 10 dB y 6 dB, respectivamente, así como dos paredes de yeso (3.4 dB c/u).

Solución

Ejercicio 1

Llamemos P_T y P_R a las potencias transmitida y recibida respectivamente, con lo que se tiene la relación,

$$P_R = \frac{P_T g^m}{L}$$

donde g es la ganancia que tienen los $m-1$ repetidores y el receptor y L es la atenuación total del canal. Esta última se calcula simplemente,

$$L_{dB} = 400\ km \times 0.4\ dB/km = 160\ dB.$$

Despejando de la ecuación anterior, se tiene la igualdad

$$g^m = L\frac{P_R}{P_T},$$

que expresada en decibeles resulta,

$$mg_{dB} = L_{dB} - \left(\frac{P_T}{P_R}\right)_{dB} = 160\ dB - 16\ dB = 144\ dB.$$

Ahora queremos hallar los mínimos valores de g y m que cumplan,

$$mg_{dB} \leq 144\ dB.$$

Supongamos que g_{dB} toma su valor máximo, 30 dB. En ese caso, despejando de la ecuación anterior, se tiene que la igualdad se da para $m = 4.8$. Por lo tanto el número mínimo de repetidores que verifica la desigualdad es $m = 5$. Habiendo determinado el valor de m la ganancia por amplificador puede bajarse hasta que se verifique la igualdad siendo entonces $g_{dB} = 28,8\ dB$.

Ejercicio 2

(a) Para el calculo de la SNR_1 planteamos: $SNR_1 = \frac{P_{R_1}}{N_{R_1}}$
La potencia del ruido en un tramo es:

$$N_{R_1} = g_1 \int_{-B_N}^{B_N} \frac{\eta_1 + \eta_A}{2} df = g_1(\eta_1 + \eta_A)B_N = L^{1/m}(\eta_1 + \eta_A)B_N$$

Donde $\eta_1 = \eta(x = 1/m) = \eta\frac{L^{-1/m}-1}{L^{-1}-1}$ ya que los repetidores se encuentran equiespaciados (observar que por letra todos los tramos de canal tienen la misma densidad espectral de potencia de ruidoo η_i, con lo cual $x_i = 1/m$ para todo i).

Por otro lado, $P_D = P_T$ porque cada repetidor amplifica lo mismo que se atenua en el tramo inmediatemente anterior de canal. Con lo que SNR_1 queda:

$$SNR_1 = \frac{P_T}{\Big(\eta_A + \eta_1\Big)B_N L^{1/m}}$$

Así, la potencia del ruido en recepción, la podemos plantear como:

$$N_D = N_1 \frac{1}{L_2} G_2 \frac{1}{L_3} G_3 ... \frac{1}{L_m} G_m + N_2 \frac{1}{L_3} G_3 ... \frac{1}{L_m} G_m + ... + N_m$$

y como $N_i = N_1$ y $G_i = L_i$

$$N_D = N_1 m$$

con lo cual,

$$SNR_R = \frac{P_T}{\left(\eta_A + \eta_1\right) B_N L^{1/m} m} = \frac{SNR_1}{m}$$

(b) Por letra η_i es mucho mayor que η_A, entonces:

$$SNR_R = \frac{P_T}{\eta_1 B_N L^{1/m} m}$$

Si realizamos un razonamiento análogo al de la parte 1, pero si no existen repetidores tenemos:

$$SNR_{R_{sinrep}} = \frac{P_T}{\eta B_N L}$$

Planteando el cociente entre las SNR y sustituyendo η_1 se obtiene:

$$SNR_R / SNR_{R_{sinrep}} = \frac{1}{m} \frac{1 - L}{1 - L^{1/m}} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (L^{1/m})^i \geq 1$$

ya que en un sistema real $L \geq 1$ (observar que dado como se considero el modelo L representa la atenuación y no la ganancia del canal), por lo tanto $L^{i/m} \geq 1$ para todo i, y como consecuencia la suma de m términos mayores o iguales a 1 resulta mayor o igual a m, concluyendo la última desigualdad.

$$SNR_1 = \frac{P_T}{\eta \frac{L^{-1/m} - 1}{L^{-1} - 1} B_N L^{1/m}}$$

Si planteamos el cociente SNR:

$$\frac{SNR_R}{SNR_1} = \frac{P_T}{\eta B_N L} \frac{\eta B_N}{P_T} = \frac{1 - L^{1/m}}{1 - L} < 1$$

Como era de esperar $SNR_R < SNR_1$.

(c)

$$\log_{10} \frac{\eta B_N}{1\, Watt} = \log_{10} 4 \times 10^{-21} \frac{T_N}{T_0} 5kHz = \log_{10} 2 \times 10^{-16} = -15.7 dBW$$

En el caso en que no hay repetidores, la SNR queda:

$$SNR_R = \frac{P_T}{\eta B_N L}$$

con el ηB_N ya calculado y $L = 40Km \times 3 \frac{dB}{KM} = 120dB$ Sustituyendo:

$$P_T = 10^5 2 \times 10^{-16} 10^{12} = 20W$$

Par el caso en que se coloca un repetidor, tenemos que: $SNR_R = \frac{P_T}{\eta_A B_N L^{1/m} m}$ con $m = 2$. Haciendo cuentas:

$$P_T = 4 \times 10^{-5} W$$

Sustituyendo en las expresiones calculadas en las partes anteriores, obtenemos $P_{T_{sinrep}} = 20\ W$ y $P_{T_{con1rep}} = 4 \times 10^{-5}\ W$

Ejercicio 3

(a) Para calcular la SNR_R debemos calcular la potencia de recepción P_R y el ruido en recepción N_R. Además sabemos que el canal cumple las hipótesis de canal rígido de sección constante y física uniforme, por lo que $L = 10^{\frac{\alpha l}{10}}$ siendo α la atenuación en dB/km.

$$P_R = P_T \frac{1}{L} g = P_T$$

Ya que se supuso que la ganancia del receptor g es igual a la atenuación L introducida en el canal.

El ruido N_R,

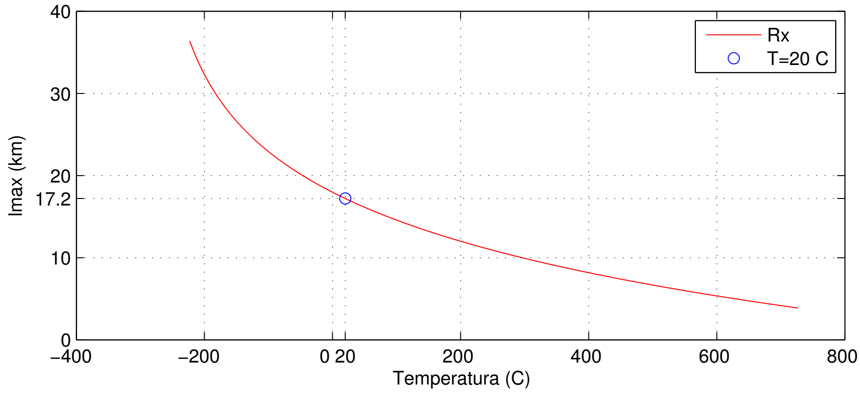
$$N_R = g \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) df = g \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\eta_A(T_{Rx})}{2} df = gB\eta_A(T_{Rx}) = gBkT_{Rx} = 10^{\frac{\alpha l}{10}} BkT_{Rx}$$

con lo cual,

$$SNR_R = \frac{P_T}{10^{\frac{\alpha l}{10}} BkT_{Rx}}$$

El objetivo es obtener una $SNR \geq SNR_{min}$ por lo que, despejando l:

$$l \leq \frac{10}{\alpha} \log_{10} \frac{P_T}{kT_{Rx} BSNR_{min}}$$



(b) Despejando de la ecuación encontrada en la parte anterior: $l_{max} = 17.2\ km$ si el receptor está a $T_{Rx} = 293°K$.

(c) Siguiendo el mismo razonamiento que para el caso anterior, pero observando que en este caso tenemos dos tramos de canal con atenuaciones L_1 y L_2 respectivamente y ganancias de repetidor y receptor g_1 y g_2 respectivamente, se obtiene:

$$P_R = P_T \frac{1}{L_1} g_1 \frac{1}{L_2} g_2 = P_T$$

El ruido total en recepción es la suma de los ruidos introducidos en cada etapa de amplificación (ya que los mismos son no correlacionados) con lo cual,

$$\begin{aligned} N_R &= g_1 \frac{1}{L_1} g_2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\eta_A(T_{Rp})}{2} df + g_2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\eta_A(T_{Rp})}{2} df \\ &= g_2 B(\eta_A(T_{Rp}) + \eta_A(T_{Rx})) = g_2 Bk(T_{Rx} + T_{Rp}) = 10^{\frac{\alpha l}{2\times 10}} Bk(T_{Rx} + T_{Rp}) \end{aligned}$$

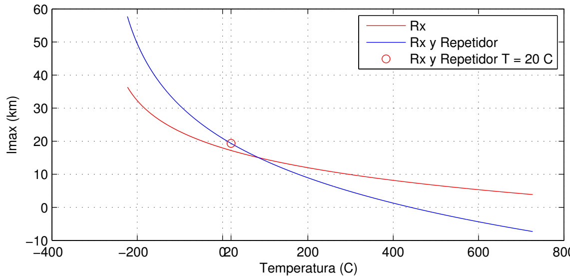
Siendo la SNR_R en este caso:

$$SNR_R = \frac{P_T}{10^{\frac{\alpha l}{20}} Bk(T_{Rp} + T_{Rx})}$$

Si consideramos que tanto el receptor como el repetidor se encuentran operando a una temperatura T se obtiene que el largo del cable l_2 para poder cubrir la SNR_R deseada debe cumplir:

$$l_2 \leq \frac{20}{\alpha} \log_{10} \frac{P_T}{2kTBSNR_{min}}$$

En el gráfico a continuación se observa una comparación con el caso sin repetidor. Se aprecia que existe una máxima temperatura, para la cual introducir un repetidor perjudica al sistema con respecto al caso sin repetidor.



(d) Despejando de la ecuación encontrada en la parte anterior: $l = 19.4\ km$ si el receptor está a $T_{Rp} = T_{Rx} = 293°K$. Se observa que dado que el ruido introducido por el repetidor es bastante importante (repetidor y receptor de mala calidad) no se logra una mejora tan significativa.

Ejercicio 4

Con repetidor:

$$P_{out} = P_{in} \frac{g_T g_R g_{rpt}}{L_1 L_2}$$

Sin repetidor:

$$P_{out} = P_{in} \frac{g_T g_R}{L}$$

Aumentar el 20 % implica:

$$\frac{g_T g_R g_{rpt}}{L_1 L_2} = 1.2\frac{g_T g_R}{L} \to g_{rpt} = 1.2\frac{L_1 L_2}{L}$$

$$L_1^{dB} = 92.4 - 20 \cdot \log_{10} f_{GHz} + 20 \cdot \log_{10} 25 \text{ km} = 120 + 20 \cdot \log_{10} \mathrm{f_{GHz}}$$

$$L_2 = L_1$$

$$L = 92.4 - 20 \cdot \log_{10} f_{GHz} + 20 \cdot \log_{10} 50 \text{ km} = 126 + 2 - \log_{10} \mathrm{f_{GHz}}$$

Siendo $f = 1$ GHz queda:

$$L1 = L2 = 120dB \to 10^{12}$$

$$L = 126 \text{ dB} \to 3.98 \cdot 10^{12}$$

$$g_{rpt} = 1.2\frac{10^{12} \cdot 10^{12}}{3.98 \cdot 10^{12}} = 0.3 \cdot 10^{12} = 115 \text{ dB}$$

Ejercicio 5

$$L_u = 92.4 + 20 \cdot \log_{10} 17 + 20 \cdot \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 208$$

$$L_d = 92.4 + 20 \cdot \log_{10} 12 + 20 \cdot \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 205$$

$$P_{sat_{in}} = 30 \text{ dBW} \to \mathrm{Psat_{in}} = 30 + 55 - 208 + 20 = -103 \text{ dBW}$$

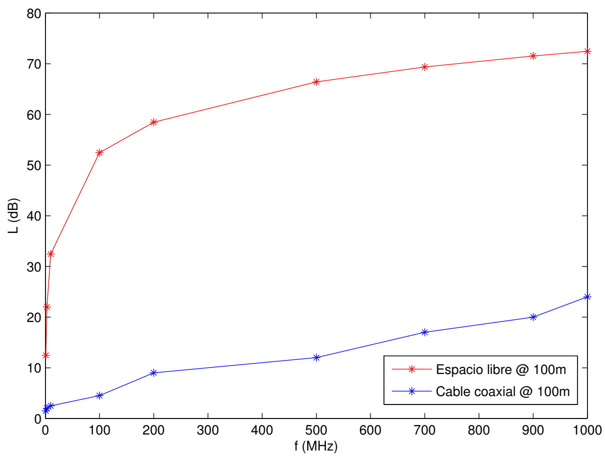
Tomando los datos del ejemplo 3.3-1: $g_{amp} = 18 + 144 = 162$ dB

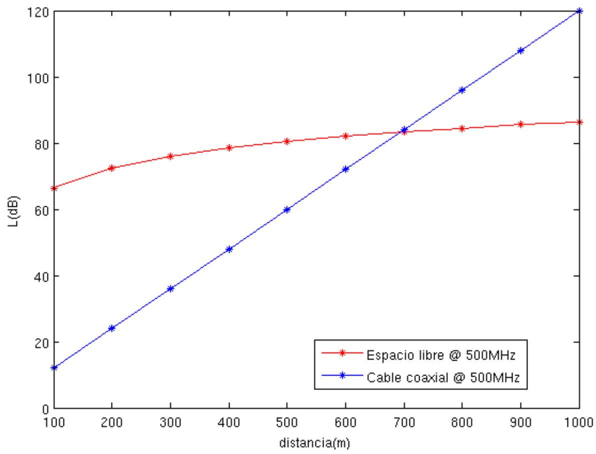
$$Psat_{out} = -103 + 162 = 59 \text{ dBW}$$

$$P_{out} = 59 + 16 - 205 + 51 = -79 \text{ dBW} \to 1.26 \times 10^{-8} \text{ W}$$

Ejercicio 6

(a)





(b) A 100m y frecuencia 500 MHz: $L_{EL} = 66.4$ y $L_{coax} = 12$.
A 200m y frecuencia 500 MHz: $L_{EL} = 72.4$ y $L_{coax} = 24$.
Mientras la pérdida de camino aumenta un factor de 4 (2^2), la atenuación del cable aumenta casi $\times 16$.

Ejercicio 7

$P_t = P_r + L(1)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma} + L_1 + L_2 + L_3 + 2L_p$.
$P_t = -110 \text{ dBm} + 10 \cdot \gamma \cdot \log_{10} \mathrm{x} + 15 + 10 + 6 + 2 \cdot 3.4 = -12.2 \text{ dBm}$.