Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 7
Modulación Lineal

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

✦ Ejercicio 1

La entrada de un sistema de AM con $\mu = 1$ es:

$$x(t) = k[2\cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_m t) + 3\cos(5\omega_m t)]$$

(a) Encontrar k para que $x(t)$ quede normalizada y bosquejar su espectro.

(b) Calcular P_{sb}/P_c y P_c/P_T.

✦ Ejercicio 2 **(6.2-9 [Car])**

Suponer que $x(t)$ es un proceso gaussiano de valor medio cero. En este caso no tiene sentido hablar de normalización. Se quiere modular $x(t)$ en AM con $\mu = 1$.

(a) Hallar el valor máximo de σ_x^2 tal que no haya sobremodulación durante más del 10 % del tiempo. ¿Qué hipótesis hay que asumir sobre el proceso $x(t)$?

(b) Calcular $2P_{sb}/P_T$ en el caso anterior.

★ Ejercicio 3

Sea una tono $x(t) = \cos(\omega_m\, t)$ modulado en DSB, $x_{DSB}(t) = x(t)\cos(\omega_c\, t)$. Estudiar qué sucede si se realiza una detección sincrónica con las siguientes señales:

(a) $d_1(t) = cos(\omega_c\, t + \phi)$

(b) $d_2(t) = cos\big((\omega_c + \omega_c')\, t\big)$

Repetir en el caso que se trate de un tono modulado en SSB,

$$x_{SSB}(t) = x(t)\cos(\omega_c\, t) \mp \hat{x}(t)\sin(\omega_c\, t)$$

Interpretar los resultados.

⋆ Ejercicio 4 **(6.5-3 [Car])**

El sistema de la Figura 1 se usa para enmascarar señales de voz.

(a) Analice su funcionamiento.

(b) Encuentre un sistema que sirva para desenmascarar la señal.

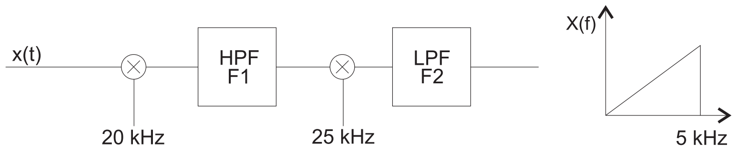


Figura 1: Sistema para enmascaramiento de voz.(Ejercicio 4)

F1 es un pasa-altos de frecuencia de corte $f_{c_1} = 20kHz$ y F2 es un pasabajos de frecuencia de corte $f_{c_2} = 25kHz$.
Sugerencia: Hacer el estudio para la señal cuyo espectro se da en la Figura 1.

✶ Ejercicio 5

Construir el diagrama fasorial y encontrar $x_i(t)$, $x_q(t)$ y $R(t)$ para una señal de AM cuya modulante es un tono cuando:

(a) Se atenúa la banda lateral superior en 1/2.

(b) Se le da a la banda lateral superior un corrimiento de fase de 180 grados.

(c) Se elimina la banda lateral superior.

✶ Ejercicio 6

Considerar el sistema de la figura 2.

(a) Demostrar que permite trasmitir dos señales diferentes a la misma frecuencia portadora y recuperarlas por detección sincrónica. ¿Cuál debe ser el valor de θ? Hallar la amplitud de las señales recuperadas.

(b) Averiguar si es posible detectar con una onda cuadrada en lugar de sinusoidal.

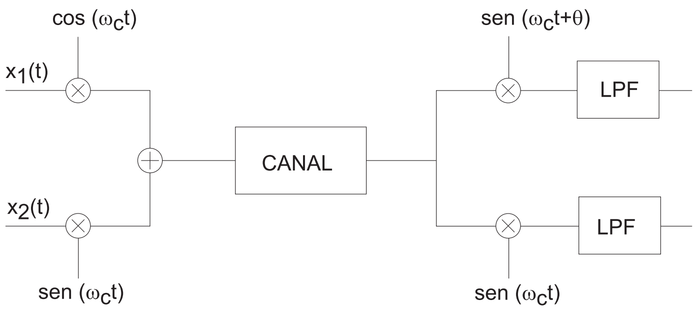


Figura 2: Sistema del Ejercicio 6.

✶Ejercicio 7

Sea $x(t)$ una señal de voz con $X(f) = 0$ si $|f| < 200Hz$ o $|f| > 3.2khz$. Demostrar que el sistema de la Figura 3 produce banda lateral única y hallar los valores posibles de f_{c1} y f_{c2} si los filtros pasa-altos deben cumplir $2\beta \geq 0.1 f_c$ siendo f_c su frecuencia de corte y 2β el ancho de su zona de transición.

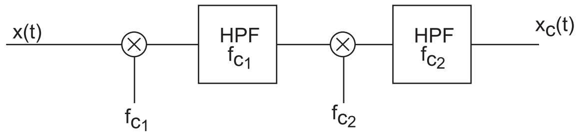


Figura 3: Sistema del Ejercicio 7.

Receptor Superheterodino

✦Ejercicio 8

La banda de emisión de AM es de 540 kHz a 1600 kHz. Una frecuencia intermedia usual es de 450 kHz.

(a) Comparar la relación f_{max}/f_{min} que debe tener el oscilador local si se toma:

1. $f_0 = f_c - f_1$
2. $f_0 = f_c + f_1$

(b) Analizar si es posible diseñar un receptor heterodino tal que la frecuencia imagen esté siempre fuera de la banda de AM. Estudiar la frecuencia intermedia y el rango del oscilador local necesarios.

✶Ejercicio 9 (6.1-4 [Car])

Se tiene un receptor superheterodino que se utilizará para detectar una señal AM con $\mu = 1$. El rango de frecuencias de portadoras a detectar es (f_L = 600kHz, f_H = 2000kHz).

(a) Dar un diagrama de bloques del receptor. Explicar qué es la frecuencia imagen, cuándo aparece y cómo logra evitarse, dando criterios de diseño.

(b) Hallar los rangos válidos de frecuencia del oscilador local. ¿Qué criterio usaría para seleccionar uno de ellos? ¿Por qué?

Para mejorar la eliminación de canales adyacentes, se utiliza un filtro de frecuencia intermedia a frecuencias menores lo que no siempre es constructivamente posible con un solo oscilador local. Una solución es utilizar un receptor de doble conversión, similar al receptor superheterodino, pero con dos osciladores locales y dos filtros de frecuencia intermedia.

(c) ¿Cómo se modifica el diagrama de la primera parte?

(d) Diseñar la frecuencia intermedia de la primera etapa f_{IF_1} para tener un rechazo definido según:

$$RR = \left| \frac{H_{RF}(f_c)}{H_{RF}(f_c')} \right|^2 \geq 60dB$$

donde f_c es la frecuencia central de la señal a detectar y f_c' es la frecuencia imagen. Se considera que el filtro de recepción es un filtro de primer orden:

$$H_{RF}(f) = \frac{\sqrt{g_{RF}}}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)} \qquad Q = 50$$

Se desea diseñar el sistema de recepción de forma tal que la señal de audio $x(t)$ se detecte con una amplificación constante, A_I, sin importar las condiciones de trasmisión (potencia trasmitida y distancia entre el trasmisor y el receptor). Esto se logra ajustando la ganancia del filtro H_{RF}, g_{RF}.

(e) Determinar el valor de la ganancia necesaria en función de los parámetros del sistema.

(f) ¿Qué parámetro de la señal recibida permite ajustar la ganancia? ¿Cómo lo implementaría?

Fórmulas trigonométricas de utilidad

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$
$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$
$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$

Solución

Ejercicio 1

(a) El máximo que alcanza $|x(t)|$ es 6, por lo que para que no haya sobremodulación $k = \frac{1}{6}$.

(b) $P_c = \frac{1}{2}A_c^2$ y $P_{sb} = \frac{1}{2}\mu^2 P_x P_c$ La potencia de la señal es $P_x = 7k^2$. Para el $k = \frac{1}{6}$ elegido para que no hubiera sobremodulación: $P_{sb} = \frac{7}{72}P_c$ por lo que $P_{sb}/P_c = \frac{7}{72}$ y $P_c/P_T = \frac{P_c}{P_c+2P_{sb}} = \frac{36}{43}$.

Ejercicio 2

(a) Con $\mu = 1$ hay sobremodulación si $x(t) > 1$. Queremos, entonces, que $x(t) \leq 1$ el 90 % del tiempo. Suponiendo que $x(t)$ es ergódica, hay que elegir σ_x para que la $P(|x(t)| > 1) \leq 0.1$. Esto nos lleva a:

$$< x^2(t) >\leq 0.36$$

(b) La señal transmitida tiene la forma $A(t) = A_c[1 + \mu x(t)]$. La potencia de esta señal es $P_T = \frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 P_x)$ es decir $P_T = P_c+2P_{sb}$ donde $P_{sb} = \frac{1}{4}A_c^2\mu^2 P_x$ Por lo tanto:

$$2P_{sb}/P_T = \frac{\mu^2 P_x}{1 + \mu^2 P_x} = \frac{P_x}{1 + P_x}$$

Sustituyendo el valor máximo de P_x:

$$2P_{sb}/P_T \approx 0.26$$

Ejercicio 3

(a) La señal detectada es:

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \cos(\omega_m\, t)\cos(\omega_c\, t) cos(\omega_c\, t + \phi) \\ &= \cos(\omega_m\, t)\frac{1}{2}[\cos(\phi) + cos(2\omega_c\, t + \phi)] \end{aligned}$$

que luego del pasabajos en la detección queda:

$$x_d(t) = \frac{1}{2}\cos(\phi)\cos(\omega_m\, t)$$

Es decir que el error de la fase ϕ en el detector produce una atenuación de la señal por un factor de $\cos(\phi)$.

(b) La señal detectada es:

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \cos(\omega_m\, t)\cos(\omega_c\, t) cos((\omega_c + \omega_c')\, t) \\ &= \cos(\omega_m\, t)\frac{1}{2}[\cos(\omega_c'\, t) + cos((2\omega_c + \omega_c')\, t + \phi)] \end{aligned}$$

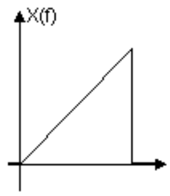
que luego del pasabajos en la detección queda:

$$\cos(\omega_m\, t)\frac{1}{2}\cos(\omega_c'\, t)$$

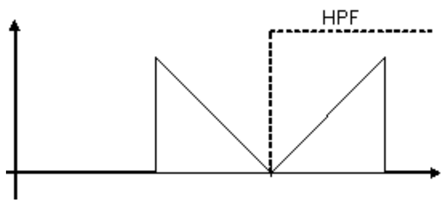
Siendo ω_c' suficientemente baja, se produce en detección un batido con la señal deseada.

Ejercicio 4

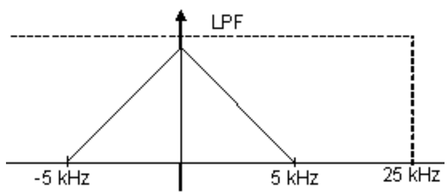
(a) Supongamos que el sistema trabaja con la señal cuyo espectro se muestra en la siguiente figura (notar que únicamente se muestra para las frecuencias positivas, ya que el espectro es simétrico respecto a la recta $f = 0$).



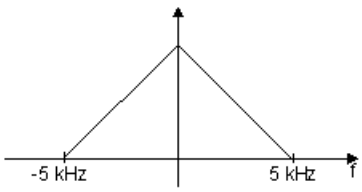
Luego, al multiplicar por la portadora de frecuencia $f_{c1} = 20\ kHz$, se obtiene:



Finalmente, al multiplicar nuevamente por una portadora, esta vez de frecuencia $f_{c2} = 25\ kHz$, se tiene:



En conclusión, luego del filtrado, lo que se tiene es la señal con el espectro "dado vuelta":



(b) Para desenmascarar la voz, se puede seguir el proceso inverso:
La elección de f_{c1} y f_{c2} fue hecha arbitrariamente, existen diversos pares de valores para estas variables que logran desenmascarar la señal.

Ejercicio 5

(a)

$$x_c(t) = A\left[1 + \frac{m}{2}\cos(w_n t)\right]\cos(\omega_c t)$$

$$= A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[\underbrace{\cos((\omega_c + w_n)t)}_{USB} + \underbrace{\cos((\omega_c - w_n)t)}_{LSB}\right]$$

$$= A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[\underbrace{\cos(\omega_c t)\cos(w_n t) - \sin(\omega_c t)\sin(w_n t)}_{USB} + \underbrace{\cos(\omega_c t)\cos(w_n t) + \sin(\omega_c t)\sin(w_n t)}_{LSB}\right]$$

En este caso la banda lateral superior está atenuada en $1/2$, es decir:

$$x_c(t) = A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[\frac{USB}{2} + LSB\right]$$

$$x_c(t) = A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[\frac{3}{2}\cos(\omega_c t)\cos(w_n t) + \frac{1}{2}\sin(\omega_c t)\sin(w_n t)\right]$$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{Am}{2}\cos(w_n t) + \frac{A_m}{4}\cos(w_n t) + A \\ &= \frac{3Am}{4}\cos(w_n t) + A \\ x_q &= \left(\frac{Am}{4} - \frac{Am}{2}\right)\sin(w_n t) \\ &= -\frac{Am}{4}\sin(w_n t) \end{aligned}$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left[-\frac{-m\sin(w_n t)}{4 + 3m\cos(w_n t)}\right] \\ R^2 &= A^2\left[1 + \frac{3}{2}m\cos(w_n t) + \frac{9}{16}m^2\cos^2(w_n t) + \frac{m^2}{16}\sin^2(w_n t)\right] \end{aligned}$$

(b) En este caso, se tiene que:

$$x_c(t) = A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[-USB + LSB\right]$$

$$x_c(t) = A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\left[2\sin(\omega_c t)\sin(w_n t)\right]$$

$$\begin{aligned} x_i &= A \\ x_q &= -Am\sin(w_n t) \\ R &= A\sqrt{1 + m^2 sin^2(w_n t)} \\ \theta &= \arctan(m\sin(w_n t)) \end{aligned}$$

(c) En este caso, se verifica:

$$x_c(t) = A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\,[LSB]$$

$$= A\cos(\omega_c t) + A\frac{m}{2}\,[\cos(\omega_c t)\cos(w_n t) + \sin(\omega_c t)\sin(w_n t)]$$

$$\begin{aligned} x_i &= A + \frac{Am}{2}\cos(w_n t) \\ x_q &= -\frac{Am}{2}\sin(w_n t) \\ R^2 &= A^2 + \frac{A^2m^2}{4} + Am\cos(w_n t) \end{aligned}$$

Ejercicio 6

(a) La señal a transmitir por el canal, $x_c(t)$, es de la forma:

$$x_c(t) = x_1(t)\cos(\omega_c t) + x_2(t)\sin(\omega_c t)$$

Luego, al multiplicar esta señal por $\sin(\omega_c t + \theta)$, queda:

$$\begin{aligned} x_c(t)\sin(\omega_c t + \theta) &= x_1(t)\cos(\omega_c t)\sin(\omega_c t + \theta) + x_2(t)\sin(\omega_c t)\sin(\omega_c t + \theta) \\ &= \frac{x_1(t)}{2}[\sin(\theta) + \sin(2\omega_c t + \theta)] + \frac{x_2(t)}{2}[\cos(\theta) - \cos(2\omega_c t + \theta)] \end{aligned}$$

Observando este resultado, si aplicamos el LPF (de frecuencia de corte menor que $2f_c - W$, donde W es el máximo entre los anchos de banda de x_1 y x_2), se obtiene $\frac{x_1(t)\sin(\theta)+x_2(t)\cos(\theta)}{2}$. Por ende, si $\theta = 90°$, recupero $\frac{x_1(t)}{2}$, es decir, obtengo la señal a menos de una constante.

Por otro lado, al multiplicar $x_c(t)$ por $\sin(\omega_c t)$ queda:

$$\begin{aligned} x_c(t)\sin(\omega_c t) &= x_1(t)\cos(\omega_c t)\sin(\omega_c t) + x_2(t)\sin(\omega_c t)\sin(\omega_c t) \\ &= \frac{x_1(t)}{2}\sin(2\omega_c t) + \frac{x_2(t)}{2}[1 - \cos(2\omega_c t)] \end{aligned}$$

En este caso, a la salida del LPF se obtiene $\frac{x_2(t)}{2}$ (si la frecuencia de corte es menor que $2f_c - W$). Así, puedo recuperar $x_2(t)$ (a menos de una constante).

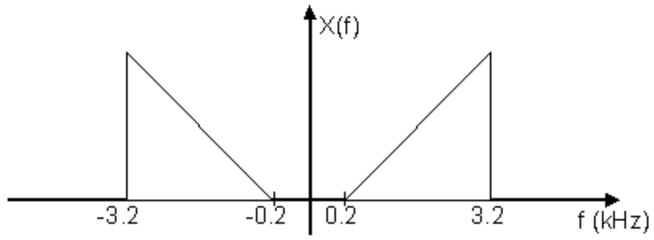
En conclusión, se debe cumplir que $\theta = 90°$, y la amplitud de la señal recuperada será igual a la mitad de la amplitud de la señal original.

(b) Si quiero detectar con una onda cuadrada, debo estudiar cómo es ésta en frecuencia. Podemos descomponer la onda en series de Fourier, y encontramos que como el valor medio es cero, entonces no tiene componente de continua. Además, al tratarse de una señal par (o impar, según como tomemos el "origen"), sabemos que puede descomponerse únicamente en cosenos (o senos).
Por lo tanto, al detectar, estoy convolucionando en frecuencia por un tren de deltas de frecuencias nf_c con $n \in \mathbb{Z}$.

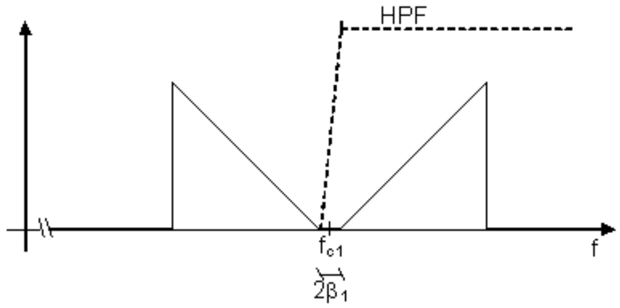
Si quiero detectar entonces tengo que multiplicar por una onda par en un caso, y por una onda impar en el otro, lo cual será equivalente a multiplicar por un coseno o por un seno respectivamente. Debo también ver que el LPF tenga una frecuencia de corte tal que sólo deje pasar lo que interesa (o sea, que elimine los resultados de convolucionar con las deltas si $n > 1$).

Ejercicio 7

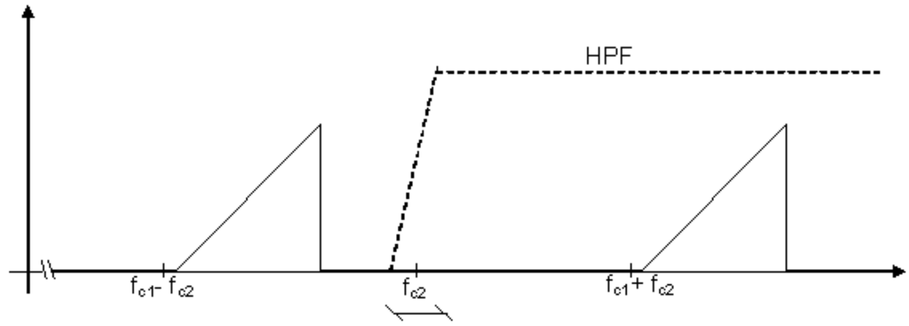
Supongamos que la señal de voz tiene un espectro de la forma:



Luego de multiplicar por la primera portadora, y aplicar el primer filtro pasaaltos, queda:



Luego de multiplicar por la segunda portadora, y de filtrar con el segundo pasaaltos, lo que se obtiene tiene la forma:



Entonces, las condiciones para f_{c1} y f_{c2} son:

- $$2\beta_1 \leq 400\ Hz \Rightarrow \beta_1 \leq 200\ Hz \Rightarrow f_{c1} \leq \frac{2\beta_1}{0.1} \leq \frac{400\ Hz}{0.1} = 4\ kHz$$

- $$f_{c1}-f_{c2}+3.2\ kHz \leq f_{c2} - \underbrace{\beta_2}_{\geq \frac{0.1 f_{c2}}{2}} \leq f_{c2} - 0.05 f_{c2} = 0.95 f_{c2} \Rightarrow f_{c2} \geq \frac{f_{c1}+3.2\ kHz}{1.95}$$

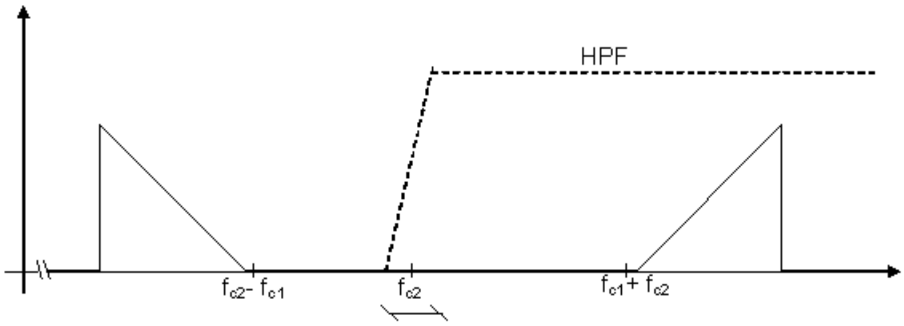
- $$\beta_2 \leq f_{c1} + 200\ Hz \Rightarrow 0.05 f_{c2} \leq f_{c1} + 200\ Hz \Rightarrow f_{c2} \leq \frac{f_{c1}+200\ Hz}{0.05}$$

  $$\Rightarrow \frac{f_{c1}+200}{0.05} \geq \frac{f_{c1}+3200}{1.95} \Rightarrow f_{c1} \geq -121\ Hz$$

  Observamos que esta condición se cumple siempre.

Así, tomando $f_{c1} = 3.5\ kHz$ y $f_{c2} = 4\ kHz$ se cumplen todas las condiciones.

Si ocurriese que $f_{c1} - f_{c2} < 0$, lo que se ve en las frecuencias positivas tiene la forma:



Luego, debe cumplirse que $f_{c2} > f_{c2} - f_{c1}$, lo cual se cumple siempre.

Ejercicio 8

(a)

(b) Ver teórico

Ejercicio 9

(a) Ver teórico.

(b) Hay dos posibles elecciones para la frecuencia intermedia: f_{IF} y $-f_{IF}$. Los rangos de variación de f_{OL} serán $[f_L - f_{IF}, f_H - f_{IF}]$ y $[f_L + f_{IF}, f_H + f_{IF}]$. La elección del segundo rango tiene una menor variación relativa de la variación de la frecuencia del oscilador local, haciendo más barata su implementación.

(c)

(d) Si tenemos que f_{IF_1} es la frecuencia intermedia, la frecuencia imagen será $-f_{IF_1}$, entonces la frecuencia imagen estará a una distancia $2f_{IF_1}$ del centro del filtro.
Sustituyendo en la ecuación tenemos que:

$$RR = \left| \frac{H_{RF}(f_c)}{H_{RF}(f_c + 2f_{IF_1})} \right|^2$$

$$RR = \left| \frac{1 + j\left(\frac{f_c + 2f_{IF_1}}{f_c} - \frac{f_c}{f_c + 2f_{IF_1}}\right) Q}{1} \right|^2$$

$$RR = \left| 1 + j50 \frac{4f_c f_{IF_1} + 4f_{IF_1}^2}{f_c(f_c + 2f_{IF_1})} \right|^2 = 10^6$$

Podemos despreciar la parte real ya que es mucho menor que el módulo. Entonces:

$$50 \frac{4f_c f_{IF_1} + 4f_{IF_1}^2}{f_c(f_c + 2f_{IF_1})} \approx 10^3$$

$$f_c f_{IF_1} + f_{IF_1}^2 \approx 5f_c(f_c + 2f_{IF_1})$$

Entonces:

$$f_{IF_1} \approx 9.5 f_c$$

Para que la condición se cumpla para todo el rango de frecuencias entre f_L y f_H, alcanza con cumplir la condición con f_H:

$$f_{IF_1} = 9.5 f_H$$

Verifiquemos que la condición más restrictiva es en f_H.

(e) La señal luego del filtro FI tiene la siguiente expresión

$$x_I(t) = \frac{A_c}{2} \sqrt{\frac{g_{\text{FI}}}{L^x}} \Big(1 + \mu x(t)\Big) \cos(\omega_{FI} t)$$

La amplificación que recibe la señal que deseamos igualar a A_I es:

$$\frac{A_c}{2} \sqrt{\frac{g_{\text{FI}}}{L^x}} \mu = A_I$$

La ganancia del filtro FI debe ser

$$g_{\text{FI}} = \left(\frac{2A_I}{\mu A_c} \right)^2 L^x$$

(f) La estimación de la ganancia se podría hacer directamente a partir del nivel de portadora a la entrada del filtro FI, que es

$$\frac{A_c}{2}\sqrt{\frac{1}{L^x}}$$

En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de portadora a la salida del filtro de FI. Esto es lo que se llama control automático de volumen.