Convergencia entre funciones

0.1. Convergencia de funciones

Para hablar de convergencia entre funciones será fundamental definir una distancia para las mismas. Comenzamos recordando la definición de norma y luego definiremos distancia entre dos elementos de un conjunto. Una gran diferencia que hay entre estos dos conceptos, es que las normas solo se pueden definir en un espacio vectorial y la distancia se pueden definir en cualquier conjunto. También, si tenemos definida una norma, a partir de ésta se puede definir una distancia, pero no toda distancia proviene de una norma.

Definition 0.1. Sea V un espacio vectorial. Una norma en V es una función $||.|| : V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$ para todo λ escalar y para todo $v \in V$.
2. $||v|| \geq 0$ para todo $v \in V$ y $||v|| = 0$ implica $v = 0$.
3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ para todo $v, w \in V$ (desigualdad triangular).

Definition 0.2. Una distancia en un conjunto M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que cumple con las siguientes propiedades:

1. $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$.
2. Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in M$.

No es difícil probar que si M es un espacio vectorial en el que está definida un norma $||.||$, la función d definida como:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{es una distancia en } M.$$

En los reales $\|x\| = |x|$, en $\mathbb{R}^2$ $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Una posible función distancia entre funciones, que será la que utilizaremos de aquí en adelante, es la distancia del supremo. Dada $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas la distancia del supremo entre ambas funciones está definida como:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}.$$

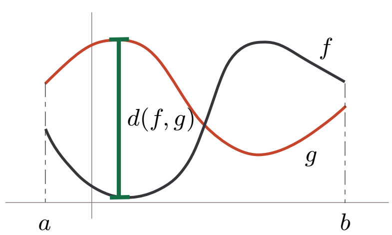


Figura 1. Distancia del supremo.

Como se recordó antes, la distancia entre dos elementos debe ser un real positivo y por lo tanto no puede ser infinito. Es por eso que se considera el conjunto cerrado $[a, b]$ y funciones continuas para asegurarnos de que exista el supremo, pero no es necesario que las funciones sean así para utilizar la distancia del supremo, basta con que el supremo exista.

Estudiaremos dos tipos de convergencia entre funciones que las introduciremos con un ejemplo. Consideremos la sucesión de funciones:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x/n$$

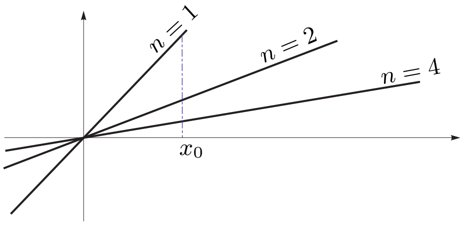


FIGURA 2. Sucesión $f_n(x) = x/n$.

Si graficamos algunas de estas funciones el resultado es el que se indica en la figura (2). Se puede ver que si nos paramos en un $x_0 \in \mathbb{R}$ particular se tiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = 0$$

A esta clase de convergencia se le llama convergencia puntual.

Convergencia puntual

Decimos que $f_n : M \to \mathbb{R}^n$ converge puntualmente (c.p.) a $f : M \to \mathbb{R}^n$ si:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall \ x \in M$$

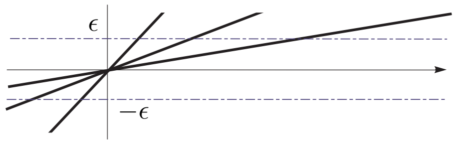
es decir:

$$\text{dado } x \in M \text{ y } \epsilon > 0, \ \exists \ n_0(x, \epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon.$$

Cuando una función converge puntualmente a otra utilizaremos la notación $f_n \xrightarrow{c.p} f$.

Para $f_n(x) = x/n$ tenemos que f_n c.p. a la función nula ($f(x) = 0$). Dado $\epsilon > 0$, tomando $n_0 > |x_0|/\epsilon$ se cumple que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, donde se ve claramente como n_0 depende de x_0 y ϵ.

Sin embargo dado un $\epsilon > 0$, si quisiéramos encontrar un n_0 de forma que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo x, vemos que esto no es posible. Para cualquier n_0 se puede escoger un x lo suficientemente grande tal que $x/n_0 > \epsilon$ y por lo tanto $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$. Por esta razón diremos que f_n no converge uniformemente a f.



Convergencia uniforme

Decimos que $f_n : M \to \mathbb{R}^n$ converge uniformemente (c.u.) a $f : M \to \mathbb{R}^n$ si:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \ \exists \ n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon, \ \forall \ x \in M$$

o lo que es lo mismo:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \ \exists \ n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

La notación usada cuando f_n c.u. a f será $f_n \xrightarrow{c.u} f$.

Si $f_n : M \to \mathbb{R}$ c.u. a f tenemos que para $n \geq n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall \ x \in M$$

o equivalentemente:

$$-\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon, \quad \forall \ x \in M$$

lo que es lo mismo que:

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon, \quad \forall \ x \in M$$

Gráficamente esto implica que si f_n c.u. a f, a partir de cierto n_0, f_n deberá encontrarse en una banda de espesor 2ϵ alrededor de f, como indica la figura siguiente.

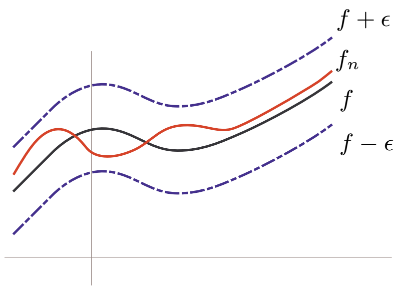


FIGURA 3. Convergencia uniforme.

En el ejemplo que estábamos trabajando de las rectas, que converja uniformemente a la función nula implicaría que f_n este en una banda $(-\epsilon, \epsilon)$ lo cual es imposible ya que las rectas de la sucesión no están acotadas.

Proposición 0.1.

Una sucesión de funciones $f_n : M \to \mathbb{R}^n$ c.u. a $f : M \to \mathbb{R}^n$ si y solo si:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in M} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

La demostración sale directo de la definición de límite. En la práctica, se suele utilizar esta proposición para estudiar la convergencia uniforme de una función.

Si ahora consideráramos la misma sucesión de funciones pero en el dominio cerrado $[a, b]$ con a y b reales, es decir:

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = x/n$$

La sucesión sigue convergiendo puntualmente a cero, pero veamos la convergencia uniforme. En este caso, sabemos que al f_n ser continua en un dominio cerrado $|f_n(x)|$ tiene un máximo en $[a, b]$ alcanzado en uno de sus extremos ya que la función es creciente. Suponiendo que $|a| < |b|$, el máximo se daría en b por lo que:

$$\sup_{x\in[a,b]} |x/n - 0| = \sup_{x\in[a,b]} |x/n| = |f(b)| = \frac{|b|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

en conclusión, por la proposición 0.1, f_n converge puntual y uniformemente en este dominio. Podemos concluir que **la convergencia depende del dominio de las funciones**. Esta dependencia vale tanto para la convergencia puntual como la convergencia uniforme.

Observación:

Es evidente por las definiciones que si $f_n \xrightarrow{c.u} f(x)$ también $f_n \xrightarrow{c.p} f(x)$, pero como ya vimos no vale el recíproco. En particular, si $f_n \xrightarrow{c.p} f(x)$, f_n no puede converger uniformemente a una función que no sea f.

Vemos ahora otro ejemplo. Sea:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$$

Si estudiamos la convergencia puntual de f_n tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Por lo que:

$$f_n \xrightarrow{c.p} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para ver si la misma converge uniformemente podemos ver que dado un $\epsilon < 1$ la función siempre tendrá que salir de la banda para llegar hasta el 1, por lo que no converge uniformemente. Más formalmente podemos calcular el supremo. Dado que $f_n(1) = f(1)$ el supremo de la diferencia se dará en $x \in [0, 1)$.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = \lim_{x\to1} x^n = 1$$

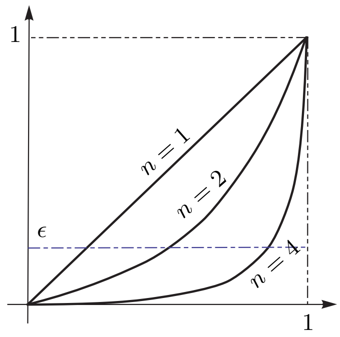


FIGURA 4. Sucesión $f_n = x^n$.

Donde dijimos que el supremo se da cuando x tiende a 1 ya que la función es creciente. Por la proposición 0.1 f_n no converge uniformemente. Tener en cuenta que el supremo vale 1 y no tiende a 1, lo cual podría generar problemas en el límite cuando n tiende a infinito para utilizar la proposición 0.1, donde quedaría un límite indeterminado.

Uno podría pensar que el problema es el 1, por lo que si uno quiere que converja uniformemente debe considerar el dominio $[0, 1)$, donde tendríamos que la sucesión f_n c.p. a la función nula. Sin embargo, esto no funcionaría ya que lo hecho en la parte anterior para calcular el supremo sigue siendo válido. De modo que si uno quisiera que converja uniformemente debería tomar el dominio $[0, 1-\delta]$ donde $\delta \in (0, 1)$. En este caso:

$$\sup_{x\in[0,1-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1-\delta]} |x^n| = f_n(1-\delta) = (1-\delta)^n$$

Por último:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} (1-\delta)^n = 0$$

ya que $(1-\delta)$ es menor que 1. En este dominio, la sucesión de funciones si converge uniformemente.

El nombre de la convergencia puntual puede engañar un poco y generar algunas confusiones. Si bien el límite para hallar la función a la que podría converger f_n se hace fijando un x, este límite debe existir y no ser infinito para todos los x del dominio. Esta mal decir que una función converge puntualmente en unos puntos del dominio y no en otros. Con que exista un número del dominio donde el límite no exista o de infinito ya alcanza para que la sucesión de funciones no converja puntualmente.

En este último ejemplo si el dominio hubiera sido [-1,1] la sucesión no hubiera convergido puntualmente ya que el límite de $f_n(-1)$ no existe. Análogamente si el dominio hubiera considerado números mayores a 1 o menores a -1 donde $f_n(x) = x^n$ tendería a infinito, por ende tampoco puede converger puntualmente.

Algo que se logra ver en este ejemplo es que dada una sucesión de funciones continua la misma no tiene por que converger puntualmente a una función continua.

En el siguiente teorema veremos que esto no sucede en la convergencia uniforme, si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente, deberá converger a una función continua.

Teorema 0.3.

Sea $f_n : M \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una sucesión de funciones continua en $a \in M$. Si $f_n \xrightarrow{c.u} f$ entonces f es continua en a.

Demostración:

Debemos probar que dado $a \in M$ se cumple que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

o lo que es equivalente:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ \delta \text{ tal que si } \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Por convergencia uniforme sabemos que:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fijando un $m \geq n_0$ y manteniendo el ϵ de la convergencia uniforme, tenemos por continuidad de f_m que:

$$\exists\ \delta(\epsilon) \text{ tal que si } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f_m(x) - f_m(a)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dado x tal que $\|x - a\| < \delta$ se cumple que:

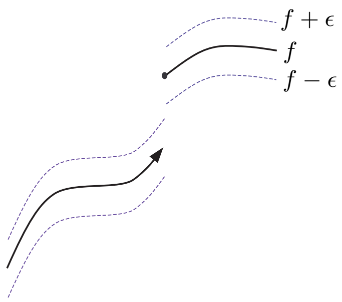
$$\|f(x) - f(a)\| = \|f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)\|$$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(a)\| + \|f_m(a) - f(a)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}.$$

Lo que muestra que $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

Por lo que queda demostrado. □

Este teorema se puede visualizar en la imagen siguiente. Si una sucesión de funciones continuas f_n c.u. a una función f discontinua la misma debería estar, a partir de cierto n_0, en la banda $f - \epsilon,\ f + \epsilon$. Sin embargo, escogiendo un ϵ suficientemente chico donde la banda queda como en la figura, f_n no puede pasar de un lado de la discontinuidad al otro sin salir de la banda.



En consecuencia, si una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una discontinua, la misma no converge uniformemente. Esta es otra forma de demostrar que la sucesión $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0, 1]$ no converge uniformemente. ¿Una sucesión de funciones discontinua podrá converger uniformemente a una función continua? Esto si puede suceder, un ejemplo sencillo es la sucesión:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1/n, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

que converge puntual y uniformemente a la función nula.

0.1.1. Convergencia, integración y derivación

Empecemos hablando de la integración. Uno podría imaginarse que si una sucesión f_n de funciones converge a f, cuando n es suficientemente grande la integral de f_n se parecería a la de f, es decir:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Pero, ¿en que clase de convergencia? Un ejemplo donde se puede ver que la convergencia puntual no alcanza para que la igualdad anterior se cumpla es:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } x \in (0, 1/n] \\ 0, & \text{si } x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

donde $f_n \xrightarrow{c.p} 0$ y $\int_0^1 f_n(x)\ dx = 1 \neq \int_0^1 f(x)\ dx = 0$. Si no está claro porque la sucesión de funciones converge puntualmente a cero, observar que dado $x_0 \in (0, 1]$:

$$\exists\ n_0 /\ n \geq n_0 \Rightarrow x_0 > \frac{1}{n}.$$

A partir de ese n_0 tenemos que $f_n(x_0) = 0$, por lo que el límite cunado n tiende a infinito da cero y por lo tanto converge puntualmente a la función nula. Veamos que pasa con la convergencia uniforme.

Teorema 0.4.

Sea un sucesión de funciones continuas $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sean $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F_n(x) = \int_a^x f_n(s)\ ds$ y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(s)\ ds$. Entonces:

1. *F_n converge uniformemente a F.*
2. *$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$.*

Demostración del item 1.:

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x f_n(s)\ ds\ - \int_a^x f(s)\ ds \right| \le \int_a^x |f_n(s) - f(s)|\ ds \le \int_a^b |f_n(s) - f(s)|\ ds \le$$

$$\int_a^b \sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f(s)|\ ds \le (b-a) \sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f(s)|.$$

Por hipótesis f_n converge uniformemente a f. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_0$ se tiene que $(b-a)\sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$. Por lo tanto, para $n \ge n_0$ se cumple que $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ y para todo $x \in [a,b]$. Lo que muestra que F_n converge uniformemente a F.
Demostración del item 2.:
Como F_n converge uniformemente a F, entonces hay convergencia puntual. Por lo tanto $F_n(b)$ converge a $F(b)$. Luego

$$F_n(b) = \int_a^b f_n(x)\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\ dx = F(b).$$

□

Es importante notar que el teorema no es un si solo si, es decir, se puede cumplir la igualdad sin que la sucesión f_n converja uniformemente. Un ejemplo donde esto sucede es el caso que ya estudiamos $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0,1]$, esta sucesión no converge uniformemente, pero verifica la igualdad. Otro detalle, es que el intervalo debe ser acotado. Si estamos trabajando con funciones donde su dominio no esta acotado este teorema no vale.

Ejercicio: considerar la sucesión

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que f_n c.u. a la función nula pero que $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \ne 0$.

Veremos ahora que podemos decir de la derivada. El resultado más agradable, sería que si una sucesión de funciones converge uniformemente a otra, las derivadas hagan lo mismo. Consideremos la sucesión de funciones:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ f_n(x) = \frac{x}{n^2x^2 + 1}$$

Realizando las derivadas para hacernos una idea de como son las gráficas de la sucesión obtenemos:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(n^2x^2 + 1)^2}$$

Se puede observar que la función es impar y por el signo de la derivada alcanza su máximo en $1/n$ que vale:

$$f_n(1/n) = \frac{1/n}{2} = \frac{1}{2n}$$

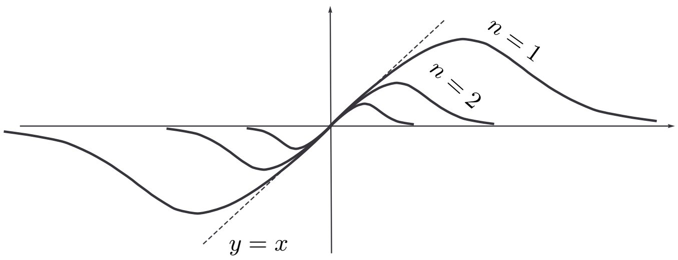
Con esta información, podemos ver que estas sucesiones tendrán la forma de la imagen siguiente.

donde se tuvo en cuenta que $f_n'(0) = 1$ para cualquier n. Si estudiamos la convergencia puntual de esta función tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

por lo que $f_n \xrightarrow{c.p} 0$. Para la convergencia uniforme:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$



Nuevamente por la proposición 0.1, $f_n \xrightarrow{c.u} f(x) = 0$. Podemos ver que $f_n'(0) \neq f'(0)$. Por lo que ni pidiendo la convergencia más fuerte entre f_n y f (la convergencia uniforme) podemos concluir algo de las derivadas. Para poder concluir algo acerca de las derivadas de una sucesión de funciones, tendremos que exigirle condiciones a f_n'.

Teorema 0.5.

Sea $f_n : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 y una función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si se cumple que:

1. $f_n' \xrightarrow{c.u} g$
2. $\exists\ x_0 \in (a,b)/\ \{f_n(x_0)\}$ *converge.*

Entonces existe $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f_n \xrightarrow{c.u} f$ y $f' = g$

Demostración:

Podemos escribir $f_n(x)$ como:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\ ds.$$

Del teorema 0.4 de las integrales tenemos que:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(s)\ ds \ \xrightarrow{c.u} \int_{x_0}^{x} g(s)\ ds$$

utilizando esto último sumado a que $f_n(x_0)$ converge a un número que llamaremos c:*

$$f_n \xrightarrow{c.u} c + \int_{x_0}^{x} g(s)\ ds.$$

Llamando f a la función a la que converge f_n se obtiene que:

$$f_n(x) \xrightarrow{c.u} f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(s)\ ds.$$

Derivando f obtenemos efectivamente que $f' = g$, por lo que queda demostrado. □

* Ejercicio: demostrar que si $f_n \xrightarrow{c.u} f$ y $g_n \xrightarrow{c.u} g$ entonces $f_n + g_n \xrightarrow{c.u} f + g$ (esto fue utilizado en la demostración de este último teorema).

Uno podría pensar que si f_n' c.u. ya alcanzaría para demostrar que f_n también lo hace. Sin embargo sin la segunda condición el teorema no es cierto, se puede ver en el siguiente ejemplo. Sea

$$f_n(x) = n + \frac{sen(x)}{n},\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

tenemos que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ se va a infinito para cualquier valor de x, por lo que f_n no converge puntualmente y por lo tanto tampoco uniformemente. Sin embargo $f_n'(x) = \dfrac{cos(x)}{n}$ converge uniformemente a cero. Sin la segunda condición, tendríamos que f_n debería converger uniformemente, lo cual no es cierto.

0.2. Sucesiones de Cauchy

Se recuerda que:

- Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

  o lo que es lo mismo:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow d(a_{n+k}, a_n) < \epsilon$$

  A partir de cierto momento todos los elementos de la sucesión están arbitrariamente cerca.
- Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es convergente $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

En el conjunto de las funciones la distancia que utilizaremos será la distancia del supremo, de donde tenemos la siguiente definición.

Decimos que $f_n : M \to \mathbb{R}$ es de Cauchy si:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+k} - f_n\|_\infty < \epsilon$$

es decir:

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{x\in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

A continuación veremos un teorema que nos ayudará a demostrar el teorema de Picard, el cual es parecido al segundo punto de lo que se recordó recientemente pero en sucesiones de funciones.

Teorema 0.6.

Sea una sucesión de funciones $f_n : M \to \mathbb{R}$:

$$f_n \text{ es de Cauchy} \Leftrightarrow \text{existe una función } f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f_n \xrightarrow{c.u} f.$$

Demostración:

Comencemos con la demostración directa, es decir, sabiendo que es una sucesión es de Cauchy demostrar que converge uniformemente. Dado que es de Cauchy tenemos que a partir de cierto n_0:

$$\sup_{x\in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \text{con } n \geq n_0,\ k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia:

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall\ x \in M \tag{0.1}$$

lo que implica que la sucesión real $f_n(x)$ es de Cauchy y por lo tanto convergente, para todo $x \in M$. Por ende, f_n converge puntualmente a una función que llamaremos f. Si ahora fijamos n y x y realizamos el límite cuando k tiende a infinito de la ecuación (0.1) obtenemos que:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \quad \forall\ x \in M$$

Dado que este resultado es para todo $x \in M$, tenemos que para todo $n \geq n_0$ se cumple que:

$$\sup_{x\in M} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

es decir, $f_n \xrightarrow{c.u} f$.

Ahora iremos con el recíproco. Debemos demostrar que si $f_n \xrightarrow{c.u} f$ entonces es una sucesión de Cauchy. Por ser una sucesión que converge uniformemente tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces:

$$\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si quisiéramos estudiar la diferencia entre f_n y f_{n+k}, donde $k \in \mathbb{N}$, dado un $x \in M$ tenemos que:

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| = |f_{n+k}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+k}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|, \quad \forall\ x \in M.$$

Por lo tanto:

$$\sup_{x\in M}|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\leq \sup_{x\in M}|f_{n+k}(x)-f(x)|+\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}$$

Por último:

$$\sup_{x\in M}|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

llegando a la definición de una sucesión uniformemente de Cauchy. □

0.3. Series de funciones

Por último hablaremos brevemente de las series de funciones. Dada una sucesión de funciones $f_n : M \to \mathbb{R}$ tenemos asociada una serie

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

la cual no es más que una sucesión de funciones definida como la suma de otra sucesión. Por lo tanto, todo lo visto hasta ahora sigue valiendo para las series de funciones. Veremos un teorema que sirve para probar que una serie converge uniformemente apoyándonos en el teorema visto recientemente (teorema 0.6).

Teorema 0.7 (Criterio del mayorante de Weierstrass). *Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Si existe una sucesión A_n de números reales tal que:*

$$|f_n(x)|\leq A_n,\ \forall\ x\in M,\ \forall\ n\geq 1$$

y $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge entonces la serie $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ converge uniformemente.

Demostración:

Trataremos de probar que la serie es una sucesión de Cauchy y por lo tanto gracias al teorema anterior la misma convergerá uniformemente. En primer lugar dado que $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge, la sucesión real $b_n=\sum_{i=1}^{n} A_i$ es convergente y por lo tanto de Cauchy. Es decir, dado $\epsilon>0$ existe un n_0 tal que si $n\geq n_0$ y $k\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$|b_{n+k}-b_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} A_i\right|=\sum_{i=n+1}^{n+k} A_i<\epsilon$$

donde en la última igualdad se usó que A_n es siempre positivo, ya que $|f_n(x)|\leq A_n$. Veamos ahora que pasa con la serie s_n.

$$|s_{n+k}(x)-s_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x)\right|\leq\sum_{i=n+1}^{n+k}|f_i(x)|\leq\sum_{i=n+1}^{n+k} A_i<\epsilon,\ \forall x\in M$$

por lo que queda demostrado. □

Tanto este último teorema como el teorema 0.5 de las derivadas se utilizarán mucho en los últimos capítulos, cuando estudiemos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Ejemplo:
Probar que las siguientes series convegen uniformemente.

1. $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{sen(nx)}{n^2}$.
2. $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2}$.

1. Como $\left|\frac{sen(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge. Entonces por el Criterio del mayorante de Weierstrass se tiene que $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{sen(nx)}{n^2}$ convege uniformemente.
2. Como

$$0\leq\frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2}\leq\frac{1}{n^2+x^2}\leq\frac{1}{n^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}\text{ y }\forall n\in\mathbb{N},$$

entonces $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2}$ converge uniformemente.