Modelado de Canales y Ruido

Sistemas de Comunicación

Facundo Mémoli*

Versión v.1
Junio, 2001

*memoli@iie.edu.uy

Índice General

Nota

Sugerencias sobre el material así como comentarios y/ críticas constructivas se deberán hacer llegar al autor y serán bienvenidas. A lo largo del repartido, así como en la sección §6, se propone ejercicios de diferente nivel de dificultad que tienen como objetivo facilitar la compresión del tema. Los ejercicios más difíciles serán marcados con dos asteriscos (**), los de nivel medio con uno solo (*), y los ineluctables y sencillos sin ninguna marca especial. Más ejercicios (obligatorios) se encontrarán en el curso práctico de la materia.

1 Preliminares

En esta sección del presente trabajo revisaremos algunos conceptos que son importantes para la compresión del tema que nos ocupa.

1.1 Probabilidades de Error en Sistemas M-arios Banda Base

INCOMPLETA

1.2 Interpretación de la Potencia de Procesos Estocásticos

1.2.1 Definiciones

La Potencia de un proceso estocástico estacionario en Sentido Amplio (WSS) se define como el valor esperado de su cuadrado, simbólicamente:

$$P_x = \mathbf{E}(x^2(t))$$

Esta definición debería condecirse con la intuición física que tiene asociada la palabra Potencia. Más precisamente, la potencia es para nosotros la capacidad de una señal de cambiar con el tiempo. Señales de mayor potencia deberían ser capaces de cambiar más entre dos instantes dados, que una señal de menos potencia.

Se tiene además la dificultad de estar trabajando con señales aleatorias, para las cuales la noción de cambio se debe establecer en términos medios, es decir, teniendo en cuenta la estadística que gobierna la realización de los procesos. Para nosotros, la medida de cambio será el valor esperado cuadrático medio de la diferencia. Más precisamente, si los instantes entre los cuales se está midiendo la diferencia del proceso estocástico $x(t)$ son t_1 y t_2 (tales que $|t1 - t2| = \tau$), entonces, denotando con Δ_τ a esa diferencia[1] se tendrá como definición:

[1] La diferencia ha de depender nada más que de la distancia entre los instantes, y no de cuales sean estos, en virtud de la WSS.

$$\Delta_\tau[x] = \mathbf{E}\left(|x(t_1) - x(t_2)|^2\right)$$

Operando se encuentra facilmente que:

$$\Delta_\tau[x] = 2P_x \cdot (1 - \frac{R_x(\tau)}{P_x})$$

lo que además de ser una verificación de que el salto sólo depende de la distancia de los instantes, lo relaciona con la autorrelación del proceso en consideración.

En lo que sigue asumiremos que el proceso estocástico $x(t)$ es de Banda Limitada W, es decir que el soporte de su Densidad Espectral de Potencia está dentro del intervalo $[-W, W]$.

1.2.2 Acotación de $\Delta_\tau[x]$

Es fácil probar que $1 - cos\omega\tau = 2sen^2\frac{\omega\tau}{2} \leq \frac{\omega^2\tau^2}{2}$. Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned}
R_x(0) - R_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(\omega)(1 - cos\omega\tau)d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(\omega)\frac{\omega^2\tau^2}{2}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} G_x(\omega)\frac{\omega^2\tau^2}{2}d\omega \\
&\leq \frac{W^2\tau^2}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} G_x(\omega)d\omega \\
&= \frac{W^2\tau^2}{2}P_x
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\Delta_\tau[x] \leq W^2\tau^2 \cdot P_x$$

La conclusión de esta observación es que para procesos de Banda Limitada, la potencia, tal cual se ha definido para Procesos Estocásticos, es coherente con la intuición. De la expresión precedente se puede ver que la variación del proceso $x(t)$ entre dos instantes separados τ está mayorada por la potencia P_x, además, claro está, por una función creciente de τ y por el (cuadrado del) Ancho de Banda del proceso (un proceso de ancho de banda nulo, según nuestra intuición no debería ser otra cosa que constante).

1.3 Relaciones Señal-Ruido

Para medir la performance de sistemas de comunicación frente al ruido se utiliza una medida conocida como **Relación Señal Ruido** (SNR). Esta medida, que enseguida definiremos, se calcula en un *determinado punto* del sistema. Pasemos ahora a definir esta cantidad. Para ello se precisa hacer algunas hipótesis. Estas son que la señal de interés $x(t)$ y el ruido $n(t)$ (de media nula) que se le **suma** son procesos estocásticos no correlacionados[2]. Se calcula entonces la potencia de la señal **total** $\tilde{x}(t)$, suma de ambas señales:

$$P_{\tilde{x}} = \mathbf{E}(\tilde{x}^2(t)) = \mathbf{E}(x^2(t) + 2x(t)n(t) + n^2(t)) = P_x + 2 \cdot R_{xn}(0) + P_n$$
$$= P_x + P_n = (1 + \frac{P_x}{P_n})P_n$$

siendo el penúltimo paso justificado por haber asumido la no-correlación de ambas señales (y usando que el ruido tiene media nula). Ahora, se define:

$$SNR = \frac{P_x}{P_n}$$

una cantidad que "mide" la predominancia en el proceso de salida de la señal frente al ruido, en términos de potencia (estadística) media.

1.4 Desigualdad entre Media Geométrica y Media Aritmética

En las próximas secciones se va a necesitar el resultado a continuación:

Sean $z_1, z_2, ..., z_n$ n números $\in [0, +\infty)$, entonces se cumple:

$$\frac{z_1 + ... + z_n}{n} \geq [z_1....z_n]^{\frac{1}{n}}$$

dándose la igualdad $\Longleftrightarrow z_1 = z_2 = ... = z_n$.

Ejercicio(*) Demostrar esta desigualdad.

[2]En algunas situaciones se tendrá una hipótesis que es más fuerte: La independencia entre ambos procesos.

2 Introducción

Cuando se pretende transmitir una cierta señal a través de un determinado medio (Canal) esta sufre:

- Atenuación-distorsión-retardo, debidas a la física del Canal.
- Contaminación por otras señales que se introducen (o generan) dentro del medio (se habla de ruido e interferencia)

Sea $H_c(f)$ la respuesta del Canal (Se asume que el Canal es un "filtro", y que además es causal (LTI)). Se puede entonces tolerar

$$x(t) \to k \cdot x(t - t_d)$$

entonces si W es el ancho de banda de la señal (banda base) que se quiere transmitir a través del Canal de banda pasante B_T (banda base), la transferencia del Canal debe satisfacer:

$$H_c(f) = k. \exp(-j2\pi t_d f).\Pi(f/(2B_T))$$

con $B_T \geq W$.

Eso nunca sucede, se opera a la inversa en la realidad: conocida $H_c(f)$ se modifica la señal para que se adecúe a las características del Canal (por ejemplo, códigos de línea). Esto tiene sus problemas: la transferencia tiene comportamiento variable con el tiempo (por ejemplo, llueve y las microondas disipan su energía en las gotas de agua).

Sobre el ruido, (proceso estocástico ergódico) supondremos que este es modelado matemáticamente de la siguiente forma:

- Aditivo e Independiente de la señal.
- Gaussiano de media 0.
- Blanco.

Ahora bien, *Ruido y Canal* están relacionados por la forma en que el primero se *genera/introduce* dentro del segundo. Al respecto haremos las siguientes hipótesis:

- El Canal tiene características uniformes:
    1. Es un medio de longitud y sección constante (por ejemplo una guía de ondas).

2. Tiene una física uniforme: densidad de masa uniforme , temperatura uniforme, exposición uniforme a fuentes de perturbación, etc.

- El Ruido que se *genera/introduce* en el Canal lo hace de manera uniforme a lo largo de este: tramos distintos (que no se solapen) de igual longitud introducen ruidos estadísticamente independientes de la misma densidad espectral de potencia (plana). Ruidos generados en tramos distintos son independientes y blancos, asimismo.

Observación: *El modelo del Ruido que hemos supuesto es sustentable en el caso de que el canal sea un medio como un cable o una guía de ondas. En el caso de transmisión por aire, la situación es un poco diferente ya que el ruido que se percibe en el receptor nada tiene que ver con el camino que hayan atravesado las señales que este esté pretendiendo detectar. Por el momento asumiremos que el canal satisface hipótesis que sustentan el modelo presentado. Más adelante en el curso trataremos de analizar sistemas de Modulación de Onda continua y recién allí deberemos tener en cuenta la presente observación.*

En la figura 2 se puede ver la forma en que se esquematiza el modelo del Canal+Ruido.

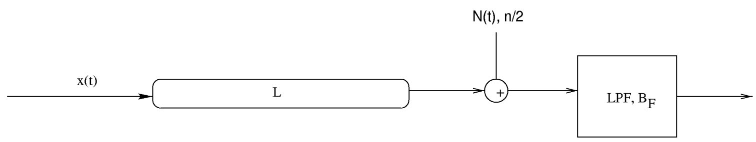


Figura 1: Modelo del Canal y Ruido.

3 El Modelado

Observación: los retardos, mientras sean iguales en todo el espectro no importan en nuestro modelo.

Importa conocer más a fondo la relación **Señal-Ruido** sobre el Canal, y como obtener mejoras (aumento)[3] sobre esta. A veces se estima conveniente instalar en algún lugar entre el Transmisor y el Receptor, un **Retransmisor**[4]. Se precisa entonces poder modelar el Canal partido en tramos.

En la figura 3 se denota con x a la distancia normalizada (respecto al largo máximo del Canal) medida desde el extremo izquierdo del mismo.

[3]Recordar que la probabilidad de error en sistemas M-arios (equiprobables) es de la forma $P_e \propto \mathbf{Q}(constante \cdot \sqrt{SNR_R})$.

[4]O también un Regenerador.

Para el caso en que se tiene 2 tramos de Canal en serie y admitiendo lo dicho en las hipótesis (uniformidad), se escribe a los ruidos ($N_x(t)$ y $N_{1-x}(t)$) modelados (en el dibujo) como introducidos al final de cada tramo. Además como sólo dependientes del tiempo y de la longitud del tramo dentro del cual se generaron o introdujeron. Por otro lado sus densidades espectrales de potencia se escriben como $\frac{\eta(x)}{2}$ y $\frac{\eta(1-x)}{2}$, respectivamente. Análogas consideraciones permiten escribir a la atenuación como independiente de la posición sobre el Canal, y sólo variando esta con la distancia que la señal recorre sobre el Canal[5].

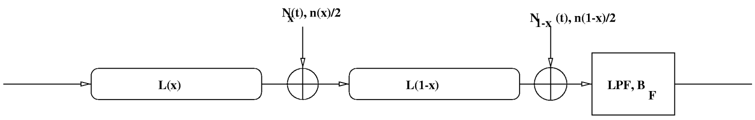


Figura 2: Esquema de la situación cuando se tiene 2 tramos.

Se debe hallar para cada $x \in [0,1]$: $L(x)$ y $\frac{\eta(x)}{2}$ en función de L,η y x, donde L es la atenuación total (**en Potencia**) impuesta por el Canal, y η es la Densidad Espectral de Potencia del ruido introducido *por todo* el Canal.

Es claro que se cumple[6]:

$$L(x)L(1-x) = L.$$

También es claro que se debe cumplir la siguiente expresión:

$$\frac{\eta(x)}{2.L(1-x)} + \frac{\eta(1-x)}{2} = \frac{\eta}{2}$$

siendo ambas expresiones válidas $\forall x \in [0,1]$. Si el origen de esta última expresión no fuera claro se sugiere tener en cuenta que la señal de ruido a la salida del Canal es $N(t) = \frac{N_x(t)}{\sqrt{L(1-x)}} + N_{1-x}(t)$ y calcularle a ese proceso la densidad espectral de potencia, recordando las hipótesis hechas.

Resumiendo, las ecuaciones de las que se dispone son las siguientes (válidas $\forall x \in [0,1]$):

$$L(x)L(1-x) = L$$

$$L(0) = 1, L(1) = L$$

$$\frac{\eta(x)}{L(1-x)} + \eta(1-x) = \eta$$

$$\eta(0) = 0, \eta(1) = \eta.$$

[5]Se tiene entonces que se escribe $L(x)$ y $L(1-x)$.

[6]En general: $L(x)L(y) = L(x+y)$ si x e y son longitudes de tramos disjuntos de canal.

Como si $x \in [0,1]$ entonces $(1-x) \in [0,1]$, eso permite hacer la sustitución $(x) \leftrightarrow (1-x)$, en particular en la última de las ecuaciones:

$$\frac{\eta(x)}{L(1-x)} + \eta(1-x) = \eta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\eta(1-x)}{L(x)} + \eta(x) = \eta$$

Usando todo lo anterior se obtiene:

$$\eta(x) = \eta \frac{L(x)^{-1} - 1}{L^{-1} - 1}.$$

Resta ahora encontrar $L(x)$ $\forall x \in [0,1]$. Asumiremos que la función $L(\cdot) \in C^1((0,1))$. Sea $\beta(x) = \ln L(x)$ (esta función también será continuamente diferenciable hasta primer orden en $(0,1)$), entonces por definición de derivada

$$\begin{aligned}\beta'(x) &= \lim_{dx\downarrow 0} \frac{\beta(x+dx) - \beta(x)}{dx} \\ &= \lim_{dx\downarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{L(x+dx)}{L(x)}\right)}{dx} \\ &= \lim_{dx\downarrow 0} \frac{\ln L(dx)}{dx}.\end{aligned}$$

Esta última igualdad se obtiene de utilizar la hipótesis de uniformidad. Ahora como hemos asumido que el límite existe, y como además este es independiente de x, se puede escribir: $\beta'(x) = \theta$ constante $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \beta(x) = \theta.x + \beta_0 \rightarrow L(x) = \exp(\theta.x)\exp(\beta_0)$; ahora imponiendo que $L(0) = 1$ y que $L(1) = L$ se obtiene:

$$\boxed{L(x) = L^x}$$

lo que implica que:

$$\boxed{\eta(x) = \eta \frac{L^{-x}-1}{L^{-1}-1}}$$

Ejercicio(*) Repetir la deducción de $L(x)$ usando sólo que $L(\cdot) \in C^0([0,1])$
.

4 Aplicación de los Modelos

En las siguientes subsecciones se va a utilizar los modelos obtenidos para establecer un par de resultados interesantes sobre la ubicación de repetidores (no regenerativos) en el algún/os punto/s intermedios del Canal. Primero se verá el caso en que los repetidores son considerados ideales, es decir que no introducen ruido y que tienen una banda pasante superior a la que precisa la señal que lo atraviesa; así, se probará que la posición óptima para los repetidores[7] es cuando están todos equiespaciados, y que además la performance del sistema[8] mejora con el aumento del número de repetidores. Luego se analizará el caso en que los repetidores ya no son ideales, debido a que introducen ruido no despreciable. Para esta situación se verá que si bien lo mejor es equiespaciar los repetidores, existe un número máximo de repetidores, luego del cual la performance del sistema empieza a decaer.

4.1 Repetidores Ideales

Primero que nada, la figura 4.1 representa la situación cuando se tiene $k-1$ *repetidores ideales* (k tramos) dispuestos a lo largo del Canal. Se denota con g_i la amplificación del i-esimo Repetidor que se elige de forma tal que reestablezca el nivel de la señal al valor que tenía antes de pasar por el tramo de canal inmediatamente anterior.

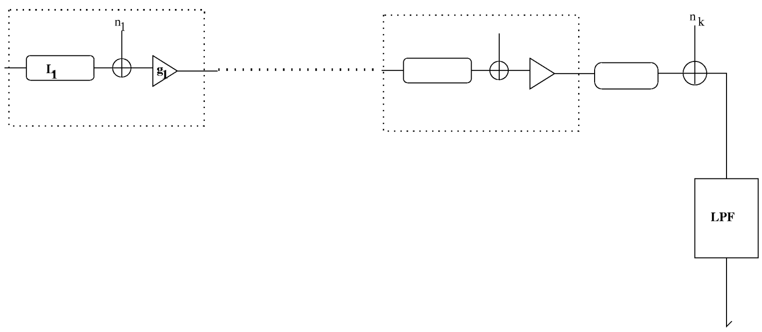


Figura 3: Canal con $k-1$ repetidores ideales, el LPF tiene banda de pasaje W.

De esta figura, imponiendo que $g_i = L_i$, se puede ver que:

$$SNR_R = \frac{S_x/W}{\eta(x_1)L(x_1) + ... + \eta(x_k)L(x_k)}.$$

Pero además se ve que:

$$\eta(x_1)L(x_1) + ... + \eta(x_k)L(x_k)$$

[7]Cualquiera sea su número.
[8]Medida en función de la SNR_R

$$= \frac{\eta}{1-L^{-1}}[(1-L^{-x_1})L^{x_1} + ... + (1-L^{-x_k})L^{x_k}]$$

$$= \frac{\eta}{1-L^{-1}}[L^{x_1} + ... + L^{x_k} - k].$$

Entonces $SNR_R(x_1, x_2, .., x_k) = \frac{(1-L^{-1})S_x}{\eta B_F}\frac{1}{f_k(x_1,...,x_k)}$ con $f_k(x_1, ..., x_k) = L^{x_1} + ... + L^{x_k} - k$. Pero aplicando directamente la desigualdad del apartado 1.4 a los reales no negativos $L^{x_1}, ..., L^{x_k}$ se obtiene que $f_k(x_1, ..., x_k) \geq (L^{1/k} - 1)k$, de modo que:

$$SNR_R(x_1, x_2, .., x_k) \leq \frac{(1-L^{-1})S_x}{\eta B_F}\frac{1}{k(L^{1/k}-1)}$$

con la igualdad si y sólo si $x_1 = ... = x_k$, es decir cuando y sólo cuando los repetidores están equiespaciados. Se define la función $h(k) = (L^{1/k} - 1)k$, que tiene derivada primera $h'(k) = L^{1/k}(1 - \frac{\ln L}{k}) - 1$, y derivada segunda $h''(k) = (\ln L)2\frac{L^{1/k}}{k^3} > 0\ \forall k > 0$. Ahora como h' es creciente estricta y $h'(0) = -\infty$, $h'(+\infty) = 0$, resulta $h'(k) < 0\ \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow h$ es decreciente estricta lo que implica que la performance del sistema es mejor cuanto mayor es el número de repetidores utilizados. Más aún una cota para el supremo de esa performance es:

$$SNR_R(x_1, x_2, .., x_k) \leq \frac{(1-L^{-1})S_x}{\eta B_F}\frac{1}{k(L^{1/k}-1)}$$

$$\leq \frac{(1-L^{-1})S_x}{\eta B_F}\frac{1}{\ln L}$$

ya que: $\inf_{k\in(0,+\infty)} h(k) = \lim_{k\uparrow\infty} h(k) = \lim_{k\uparrow\infty} \frac{L^{1/k}-1}{1/k} = \ln L \lim_{k\uparrow\infty} \frac{\exp(\frac{1}{k}\ln L)-1}{\frac{1}{k}\ln L}$, y usando luego el desarrollo de primer orden de la exponencial.

4.2 Repetidores No Ideales

Para los repetidores no ideales no es cierto que la performance del sistema mejore siempre que se incrementa el número de repetidores. Modelaremos a los repetidores ideales de la forma siguiente: asumiremos que generan ruido y que los ruidos por ellos generados son iguales, ya que estos dependen de las condiciones físicas a las que están sometidos[9] y a estas las supondremos las mismas para los diferentes repetidores. Despreciaremos otros efectos como las alinealidades.

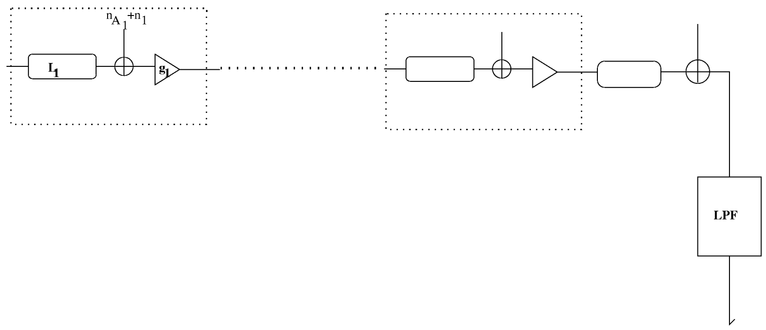
Sobre los amplificadores y los ruidos que ellos introducen asumiremos:

- Fenómeno independiente de la generación (o introducción) de ruido en el Canal.

[9]Estamos, claro está, admitiendo que todos los repetidores son constructivamente idénticos.

- Espectro plano.
- Independientes entre si (entre distintos amplificadores).
- Ruidos referidos a la entrada del repetidor; de *Densidad Espectral de Potencia* η_A.
- Ancho de Banda de los Repetidores todos iguales al soporte en frecuencia de la señal de interés (W).
- Las amplificaciones luego de cada tramo de Canal restituyen el nivel de la señal al que tenía antes de pasar a través de ese tramo, eso es en la figura $g_i = L_i$.

El modelo del Canal cuando se tiene $k-1$ repetidores (k tramos) en posiciones arbitrarias resulta ser el de la figura siguiente (donde el ancho de banda del pasabajos es W):



Se le ha referido un ruido a la entrada del filtro pasabajos de recepción debido a que estamos en la hipótesis de los elementos del sistema de comunicación son *reales*, y el filtro pasabajos es un amplificador de ganancia 1. Se deduce que:

$$SNR_R = \frac{\frac{S_x}{W}}{(\eta_1 + \eta_A)L_1 + ... + (\eta_k + \eta_A)L_k}$$

pero se sabe que: $\eta_i = \eta \frac{L^{-x_i}-1}{L^{-1}-1}$, $L_i = L^{x_i}$. Si se define $\nu = \frac{\eta_A}{\eta} \cdot (1 - L^{-1})$, se escribe[10]:

$$SNR_R = \frac{(1 - L^{-1})\frac{S_x}{\eta W}}{(1+\nu)\left[L^{x_1} + ... + L^{x_k}\right] - k} \qquad (1)$$

para lo cual se operó de forma análoga a lo hecho para el caso de Amplificadores Ideales.

[10] Se observa que en vista de que $L > 1$ en cualquier situación real, resulta $\nu > 0$.

Ahora, para obtenes la mejor performance posible en el presente caso, hay que *maximizar* la cantidad dada por (1), ello significa *minimizar* su denominador; con la restricción: $x_1 + ... + x_k = 1$. Para eso se usa nuevamente la Desigualdad del apartado 1.4, en forma totalmente análoga al caso Ideal, obteniéndose que para k fijo, el máximo se produce cuando y sólo cuando $x_1 = ... = x_k$, siendo además este máximo dado por:

$$SNR_R^{max}(k) = \frac{(1 - L^{-1})\frac{S_x}{\eta W}}{\left[(1+\nu)L^{1/k} - 1\right]k} \tag{2}$$

Ahora se verá como varía la performance del sistema cuando el número de repetidores (equiespaciados) es la variable. Se define la función $g(y) = \left[L^{1/y}(1+\nu) - 1\right]y$. Se ve que $g'(y) = L^{1/y}(1 + \nu - \frac{\ln L}{y}) - 1$.

Como $g'(0) = -\infty$, $g'(+\infty) = \nu > 0$, por continuidad debe existir un punto y_c *finito* tal que $g'(y_c) = 0$. Por otro lado se puede ver que $g''(y) = (1+\nu)(\ln L)^2 \frac{L^{1/y}}{y^3}$, que es positiva en $(0, +\infty)$. Se concluye entonces que y_c es el *único punto crítico* de g (en $(0, +\infty)$), y además en y_c, g alcanza su *mínimo absoluto* correspondiente al intervalo $[0, +\infty)$.

Con todo lo anterior se concluye que *Existe una Cota Superior* para el número de repetidores *No Ideales* que puede haber en el Canal, cuando se trabaja en forma óptima.

A continuación se presenta gráficas en las que se puede apreciar el comportamiento de la SNR_R frente a variaciones de $\frac{\eta_A}{\eta}$ y L.

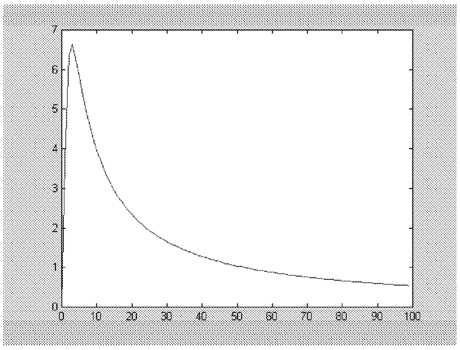


Figura 4: $SNR_R(k)$ vs. k con $\frac{\eta_A}{\eta} = 4.5$, $L = 10$, $\frac{S_x}{\eta W} = 100$.

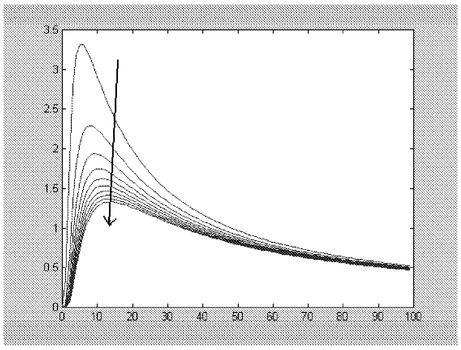


Figura 5: $SNR_R(k)$ vs. k paramétrico en L ($L \in [100, 10^5]$), para $\frac{\eta_A}{\eta} = 4.5$, $\frac{S_x}{\eta W} = 100$. El sentido de la flecha indica aumento del parámetro.

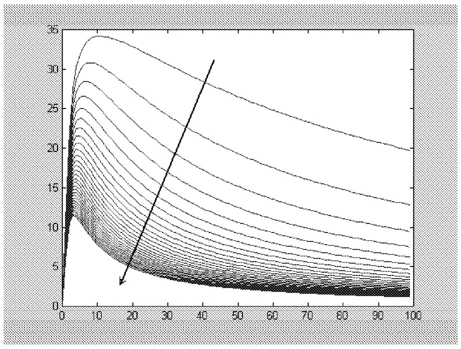


Figura 6: $SNR_R(k)$ vs. k paramétrico en $\frac{\eta_A}{\eta}$ ($\frac{\eta_A}{\eta} \in [27 \cdot 10^{-3}, 1]$), para $L = 10$, $\frac{S_x}{\eta W} = 100$. El sentido de la flecha indica aumento del parámetro.

5 Comparación: Los Repetidores Regenerativos (Reales)

En esta sección vamos a comparar la performance de dos Sistemas de Comunicación Binarios en Banda Base diferentes. Ambos usan repetidores, que asumiremos en ambas situaciones como no-ideales, pero que difieren en la naturaleza de las operaciones que efectúan. Más precisamente, estamos hablando de Repetidores Regenerativos versus Repetidores Analógicos. Estos Repetidores Regenerativos difieren de los ya estudiados en que realizan una conversión **A/D** de la señal que reciben, mediante la comparación contra un umbral. Así se recupera el *bit* que representa la señal analógica que se recibe. En "recuperación" se comete un cierto error, causado por la propia etapa de *decisión*, frente a la presencia del ruido introducido por el Canal y del ruido que introdujo el receptor de esa etapa (el LPF) y el correspondiente a todas las etapas anteriores.

Los Repetidores Regenerativos tienen la misma forma que el propio Receptor del sistema, y esa forma se ve en la figura 5.

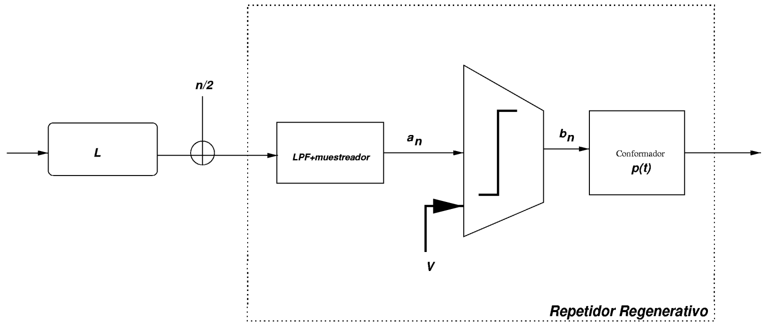


Figura 7: Forma constructiva de un Repetidor Regenerativo, se entiende que en este dibujo, η está compuesto por dos términos, uno que viene del Canal y otro introducido por el LPF. V es el *umbral óptimo.*

5.1 Planteo

En el proceso de conversión de analógico a digital (binario) se comete, como ya se mencionó (y se conoce del curso) errores debido a la introducción de ruido por parte del Canal. Llamemos p_{e_i} a la *probabilidad de error* en cada uno de los receptores (todos los Repetidores Regenerativos, más el Receptor). Asumiendo que todos estos dispositivos repetidores son iguales y que ceros y unos son *equiprobables.* Se puede poner $p_e = p_{e_i} = \mathbf{Q}(\sqrt{SNR_{R_i}})$, con $SNR_{R_i} = \gamma$ dada la forma del sistema. El valor de γ depende de la codificación de los *bits*, de L, de $p(t)$, de la banda de pasaje del LPF y del número de repetidores. Más precisamente, la expresión para esa cantidad es:

$$\gamma = \frac{S_x}{(\eta \frac{L^{-\frac{1}{k}}-1}{L^{-1}-1} + \eta_A) W L^{1/k}}$$

Ahora bien, se comete errores en el destino cuando y sólo cuando para un mismo *bit* transmitido se cometió un número **impar** de errores en los comparadores. La probabilidad de cometer i errores en los k comparadores está dada por:

$$P(i) := C_i^k p_e^i (1 - p_e)^{k-i}$$

de modo que la *Probabilidad de Error* del sistema es:

$$P_e = \sum_{i \ impar} P(i) \simeq k \cdot p_e = k\mathbf{Q}(\sqrt{\gamma}).$$

donde la aproximación vale para $p_e \ll 1$ (algo bien esperable para un sistema bien diseñado) y k no demasiado grande.

Por otro lado, para el caso en que el sistema esté diseñado en base a Repetidores Analógicos (no-ideales), y que este diseño sea el óptimo (repetidores equiespaciados), se tiene que la SNR en recepción es:

$$\begin{aligned} SNR_R &= \frac{(1-L^{-1})S_x}{\eta W}\frac{1}{k((1+\nu)L^{1/k}-1)} \\ &= \alpha\frac{L-1}{k((1+\nu)L^{1/k}-1)} = \alpha\frac{L-1}{g(k)} \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{S_x}{\eta LW}$ con lo que $P_e = \mathbf{Q}(\sqrt{\alpha\frac{L-1}{g(k)}})$. En la figura a continuación se presentan gráficas comparativas de las P_e de ambos sistemas.

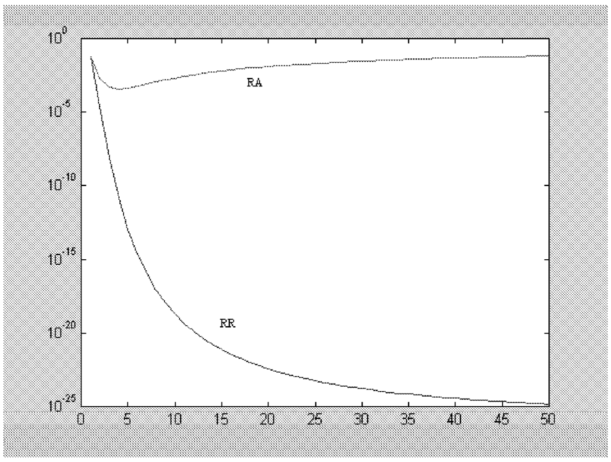


Figura 8: Grafica Comparativa de la P_e para Canal con Repetidores Regenerativos Reales (RR) y Canal con Repetidores Analógicos Reales (RA). Se usó valores $\alpha = 100$, $L = 50$ y $\frac{\eta_A}{\eta} = 40$.

6 Ejercicios

En esta sección se propondrán algunos ejercicios con el objeto de facilitar la comprensión del tema.

1. (**) Extender todo lo anterior al caso en que las condiciones físicas son **No Homogéneas**.

2. (*) Plantear un modelo para el ruido para el caso en que el canal sea el aire y se use una antena parabólica de una cierta apertura ϕ_0. Asumir condiciones homogéneas para el ambiente, de modo que el ruido captado por la antena no depende de hacia que lugar esta está apuntando. Luego extender esto al caso de que las condiciones sean **No Homogéneas**.

3. Se quiere asegurar la mayor área de cobertura posible para una cierta transmisión. Se dispone de dos transmisores para la misma señal a transmitir, que están ubicados a una distancia D entre si. Se cumple que $\eta(D) = \eta$ y $L(D) = L$. Por razones económicas se quiere que el gasto de potencia combinado de ambos transmisores sea lo menor posible. Determinar la mínima potencia total MPT que se debe gastar entre ambos transmisores para que en cualquier punto intermedio a estos la recepción satisfaga que $SNR_R \geq SNR_R^{min}$. Se asume que el *mensaje* tiene ancho de banda W.

4. (*) ¿ Existe un valor máximo del número de Repetidores Analógicos Reales, después del cual la performance no es mejor que la que se tiene en el caso de no usar ningún tipo de repetidor ? ¿ Cómo lo estimaría ?

5. (*) En el caso de usar Repetidores Regenerativos Reales, equidistantes, ¿ cuál es el supremo de la performance ?

6. (**) En el caso de usar Repetidores Regenerativos Reales, ¿ es cierto que el Optimo para un número fijo de estos se da cuando son equidistantes?

Nota

Más ejercicios, pero en el caso de que el canal sea el aire se van a ver a lo largo de los prácticos de los temas de AM y FM de la asignatura.