Práctico 6

1. Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$.

   a) Sea x_0 un punto de equilibrio estable de la ecuación. Demostrar que si $x(t)$ es una solución tal que para todo $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$ para el cual se cumple $d(x(t_\delta), x_0) < \delta$, entonces
   $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0.$$

   b) Dar un ejemplo de una ecuación diferencial que presente un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable, y que admita una trayectoria (distinta de la del equilibrio) que tienda en el futuro a dicho punto.

2. Mostrar que si $\overline{x}$ es un punto crítico no aislado de una ecuación autónoma entonces no puede ser asintóticamente estable.

3. Dibujar el diagrama de fases y estudiar la estabilidad en $(0,0)$ para los sistemas:
   $$a)\ \begin{array}{c}\dot{x} = 0\\ \dot{y} = -y\end{array} \qquad b)\ \begin{array}{c}\dot{x} = x^2\\ \dot{y} = -y\end{array} \qquad c)\ \begin{array}{c}\dot{x} = -x^3\\ \dot{y} = -y\end{array}$$
   En los tres casos hallar la linealización del sistema alrededor de $(0,0)$ y comparar resultados.

4. Sea λ un número real. Discutir según λ si el origen es un punto estable, inestable o asintóticamente estable para:
   $$\begin{array}{c}\dot{x} = \lambda x\\ \dot{y} = x + \lambda y\end{array}$$
   Determinar los valores de a y b que hacen que $ax^2 + by^2$ sea una función de Liapunov. Comparar.

5. Determinar los valores de los coeficientes a y b que hacen que
   $$V(x,y) = ax^2 + by^2$$
   sea una función de Liapunov para cada uno de los siguientes sistemas:

   a) $\begin{array}{l}\dot{x} = 3xy,\\ \dot{y} = -x^2 - y^3\end{array}$

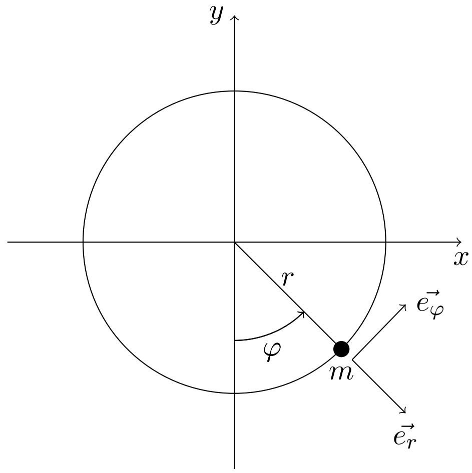
   b) $\begin{array}{l}\dot{x} = -x^3 + xy^2,\\ \dot{y} = -2x^2y - y^3\end{array}$

   c) $\begin{array}{l}\dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2,\\ \dot{y} = -y^3\end{array}$

   ¿Qué puede decirse de la estabilidad en $(0,0)$ en cada caso?

6. Mostrar que $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Liapunov estricta para
   $$\begin{cases}\dot{x} = -x/2 - y/2 - x^2 - xy,\\ \dot{y} = -x/4 - y/2 - y^2 - xy/2,\end{cases}$$
   en algún entorno de $(0,0)$. Concluir que el origen es asintóticamente estable.

7. **Ecuación del péndulo simple.**
Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una guía circular lisa de radio r. Que la guía sea lisa implica que no actúa ninguna fuerza de rozamiento entre la partícula y la guía, lo que es equivalente a asumir que la reacción $\vec{R}$ que la guía ejerce sobre la partícula es una fuerza que tiene componente nula en la dirección tangente al movimiento. Llamamos φ al ángulo indicado en la figura, medido en sentido antihorario.



a) Demostrar que la ecuación que rige el movimiento de la partícula es $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\operatorname{sen}\varphi$, siendo g la constante de aceleración gravitatoria. Se sugiere plantear la Ley de Newton en la dirección del versor $\vec{e_\varphi}$ de la figura.

b) Llamemos $k = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Introduciendo una nueva variable $\theta = \dot{\varphi}/k$, transformar la ecuación anterior en la ecuación matricial:
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = k\theta \\ \dot{\theta} = -k\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

c) Hallar los puntos críticos de la ecuación matricial.

d) Linealizar la ecuación matricial alrededor de los puntos críticos. ¿Se puede decir algo sobre la estabilidad de los mismos?

e) Demostrar que si $\varphi(t)$ y $\theta(t)$ son soluciones a la ecuación matricial, entonces la función
$$V(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$$
cumple $V(\varphi(t), \theta(t)) = cte$. Dar una interpretación física de este hecho.

f) Usando la parte anterior, estudiar la estabilidad de los puntos críticos.

g) Esbozar un diagrama de fase de las soluciones a la ecuación matricial. Interpretarlo a partir del fenómeno físico que modela.

8. **Ecuación del péndulo con rozamiento.**
Consideremos la ecuación
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = k\theta \\ \dot{\theta} = -k\operatorname{sen}\varphi - \beta\theta \end{cases}$$

donde el parámetro $\beta > 0$ representa el coeficiente de rozamiento del péndulo contra la guía. Notar que el término $-\beta\theta$ de la segunda ecuación aparece pues se asume que la fuerza de rozamiento es proporcional y opuesta a la velocidad tangencial de la partícula.

a) Hallar los puntos críticos de la ecuación.

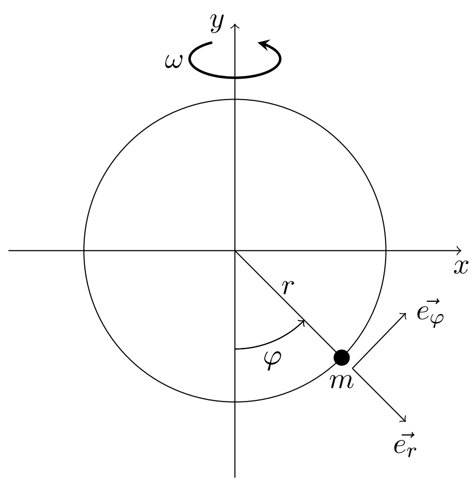
b) Sea $V(\varphi, \theta) = \dfrac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$. Probar que $\dot{V} \leq 0$ en un entorno del $(0, 0)$.

c) Probar, usando Hartman, que $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

d) Estudiar la estabilidad del resto de los puntos críticos.

e) ¿Qué diferencias nota con la estabilidad de los puntos críticos para el caso del péndulo sin rozamiento? Analizar esas diferencias en base al fenómeno físico que se modela.

9. **(Opcional) El péndulo en una guía giratoria lisa.**
Consideremos el caso del péndulo sin rozamiento. Asumamos ahora que el plano vertical que contiene al péndulo gira con una velocidad angular constante ω, como en la siguiente figura.



a) Mostrar que la ecuación que gobierna el movimiento del péndulo es:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\operatorname{sen}\varphi + \omega^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

b) Llamemos $k = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ y $\lambda = \dfrac{\omega}{k}$. Introduciendo una nueva variable $\theta = \dot{\varphi}/k$, transformar la ecuación anterior en la ecuación matricial:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = k\theta \\ \dot{\theta} = k\left(\lambda^2\cos\varphi - 1\right)\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

c) Hallar los puntos críticos de la ecuación matricial, discutiendo según λ. Verificar que cuando $\lambda > 1$ aparecen puntos críticos que no existen para $\lambda \leq 1$.

d) Demostrar que si $\varphi(t)$ y $\theta(t)$ son soluciones a la ecuación matricial, entonces la función

$$V(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi - \frac{\lambda^2}{2}\operatorname{sen}^2\varphi$$

cumple $V(\varphi(t), \theta(t)) = cte.$

e) Mostrar que el $(0,0)$ es estable si $\lambda \leq 1$. Mostrar que los puntos críticos que aparecen cuando $\lambda > 1$ son estables. ¿Qué puede decir de la estabilidad del (0,0) cuando $\lambda > 1$?

f) Estudiar la estabilidad del resto de los puntos críticos.

10. Calcular la linealización alrededor de $(0,0)$ de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2+y^2)x + y \\ \dot{y} = (x^2+y^2)y - x \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \dot{x} = -(x^2+y^2)x + y \\ \dot{y} = -(x^2+y^2)y - x \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fase de ambas ecuaciones. Para eso, se sugiere hacer un cambio de variable a polares.

11. Hallar los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y(z-1) \\ \dot{y} &= -x(z-1) \ . \\ \dot{z} &= -z^3 \end{aligned}$$

Mostrar que la linealización alrededor del origen no permite decidir acerca de su estabilidad. Para ello, buscar una función de Liapunov de la forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.