

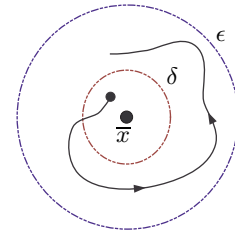
# Estabilidad

Ya hemos comentado que quiere decir estabilidad, estabilidad asintótica o inestabilidad, tenemos los conceptos de estos términos. En este capítulo formalizaremos estos conceptos en ecuaciones autónomas (y en particular en las hipótesis de Picard) y veremos algunos métodos para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio.

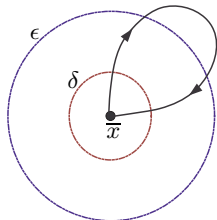
Empecemos con las definiciones formales. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la ecuación diferencial autónoma  $\dot{x} = f(x)$ . Se llama autónoma a toda ecuación donde  $f(t, x) = f(x)$ . Sea  $\varphi(t)$  una solución a la ecuación diferencial con condición inicial  $\varphi(t_0) = x_0$  y definida para todo  $t > t_0$ . Un punto  $\bar{x} \in \Omega$  es un punto crítico si  $f(\bar{x}) = 0$ . Observar que  $x(t) = \bar{x}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  es solución de la ecuación diferencial.

Decimos que el punto crítico es:

- **estable** si  
 dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\epsilon) > 0$  / si  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon$ ,  $\forall t > t_0$ .
- **asintóticamente estable** si:
  - es estable y además
  - $\exists \delta' > 0$  /  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}$ .
- **inestable** si no es estable.



Razonemos juntos que es lo que implican estas definiciones. En primer lugar, tenemos que es estable si para cualquier  $\epsilon$  podemos encontrar un  $\delta$  tal que si la condición inicial de la solución empieza a una distancia menor que  $\delta$  del punto crítico, la misma se mantendrá a una distancia menor a  $\epsilon$  del punto crítico de ahí en adelante. Esto debe pasar con todas las soluciones con condición inicial a una distancia menor que  $\delta$ . En particular todas las soluciones que están a menos de  $\delta$ , su intervalo maximal no está acotado superiormente. Con que exista una solución que no se mantenga en la bola de radio  $\epsilon$  para ningún  $\delta$ , alcanza para decir que es inestable.



Luego, asintóticamente estable implica que además de ser estable las soluciones que empiezan en un entorno cercano al punto de equilibrio tiendan al mismo. Podría parecer innecesaria la condición de estabilidad, pero veamos como no lo es. Si consideramos una solución que tiene una trayectoria como la de la figura siguiente, tenemos que se cumple la segunda condición de la estabilidad asintótica. Sin embargo el punto de equilibrio no es estable, ya que dado el  $\epsilon > 0$  de la figura no existe ningún  $\delta > 0$  tal que si la condición inicial se encuentra a menos de  $\delta$  del punto crítico la solución no salga de la bola  $B_{\bar{x}, \epsilon}$ .

Estudiar la estabilidad de un sistema es algo muy importante en muchas aplicaciones dado que nunca sabemos con exactitud las condiciones iniciales. Si tenemos un punto de equilibrio estable, no saber con exactitud la posición inicial o iniciar en posiciones parecidas podría no cambiar significativamente el comportamiento de las soluciones. Sin embargo en un punto de equilibrio inestable esto sí podría suceder.

Con estas definiciones, podemos repasar los diagramas de fases vistos en las ecuaciones lineales autónomas en  $\mathbb{R}^2$  y confirmar la estabilidad de los puntos de equilibrio en esos casos. Observar que cuando la parte real de todos los valores propios era negativa, el origen era un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si un valor propio tenía parte real positiva, teníamos al menos una solución que se alejaba del punto de equilibrio, esto implica que el origen no es estable y por lo tanto es inestable.

Cuando unos de los valores propios tiene parte real nula y los demás parte real negativa pueden ocurrir distintas cosas. En el caso de los valores propios imaginarios puros, donde las trayectorias son elipses alrededor del origen es claro que el origen es un punto de equilibrio estable. También lo son estables los puntos de equilibrio de una matriz diagonalizable con un valor propio nulo y el otro negativo. En este caso se obtenía una recta de puntos de equilibrio y las demás soluciones eran otras rectas que tendían a la recta de puntos de equilibrio. En consecuencia, si tomo una bola alrededor de  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de la recta, la bola siempre contendrá otros puntos de equilibrio. Esas soluciones de equilibrio no tienden a  $\bar{x}$  y por lo tanto los puntos no pueden ser asintóticamente estables.

En resumen, **si los puntos de equilibrio no están aislados no pueden ser asintóticamente estables**. Cuando teníamos una matriz no diagonalizable con valor propio cero, también obteníamos una recta de puntos de equilibrio pero en este caso los mismos eran inestables.

**Proposición 0.1.**

Sea la ecuación  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$  el conjunto de los puntos críticos de la ecuación. Si  $\bar{x} \in \mathcal{R}$  es un punto de acumulación de  $\mathcal{R}$  (no es aislado) entonces no es asintóticamente estable.

La demostración queda a cargo del lector. □

En el curso nos concentraremos en estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio en ecuaciones autónomas y en las hipótesis de Picard. Veremos distintos teoremas que nos permitirán deducir la estabilidad de un punto de equilibrio. El primer teorema que veremos es el teorema de Liapunov.

**0.1. Teorema del Liapunov**

Daremos la idea de Liapunov con un ejemplo. Consideremos una ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^2$  que tiende al origen como punto de equilibrio asintóticamente estable,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una solución a la ecuación distinta a la de equilibrio que tiende al  $(0,0)$  con condición inicial  $(t_0, x_0)$  y la función  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . En la siguiente imagen vemos la trayectoria de la solución  $\varphi$  y también la proyección de la misma en el paraboloides ( $V(\varphi(t))$ ).

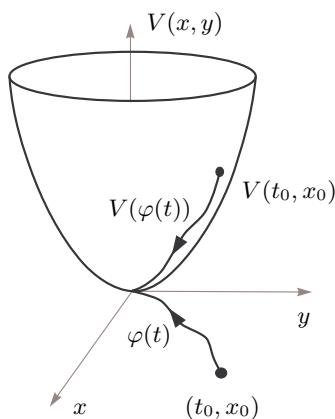


FIGURA 1. Teorema de Liapunov

Dado que  $V(x, y)$  tiene un mínimo en el origen y  $\varphi(t)$  tiende al mismo, vemos que  $V(\varphi(t))$  va decreciendo, lo que implica que  $\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$ . Esto no solo sucede en este caso. Si tenemos una ecuación diferencial con  $\bar{x}$  un punto de equilibrio asintóticamente estable y una función  $V(x, y)$  con un mínimo estricto en  $\bar{x}$ . Si tomamos una solución  $\varphi(t)$  con condición inicial lo suficientemente cerca, se cumplirá que  $V(\varphi(t))$  deberá decrecer y por lo tanto  $\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$ .

En este último párrafo partimos de la base que sabíamos la estabilidad del punto de equilibrio, pero podemos pensarlo al revés. Dado un punto de equilibrio  $\bar{x}$ , una función  $V$  y  $\epsilon > 0$ , si  $\dot{V} \leq 0$  podremos afirmar que empezando en una condición inicial lo suficientemente cerca las soluciones permanecerán en  $B_{\bar{x}, \epsilon}$  ya que en caso contrario,  $V(\varphi(t))$  debería aumentar.

**0.1.1. Derivada de una función a lo largo de las trayectorias**

Como hemos comentado en el primer capítulo, dado un problema  $\dot{x} = f(x)$  la función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de velocidades. Dada una posición nos devuelve la velocidad y dirección hacia donde se mueven las soluciones.

Sea  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y  $\varphi(t)$  una solución a la ecuación diferencial mencionada arriba, podemos definir la composición de ambas funciones:

$$v(t) = V(\varphi(t)) \Rightarrow \dot{v}(t) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t))$$

En este último producto nos estamos refiriendo al producto escalar. Vemos que  $\dot{v}$  depende de la posición de la solución ( $\varphi(t)$ ) y no explícitamente del tiempo. Nos referiremos a  $\dot{V}$  como la derivada a lo largo de las trayectorias la cual será definida como:

$$\dot{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

Como mencionamos arriba, si  $V$  tiene un mínimo estricto en el punto de equilibrio y el mismo es asintóticamente estable,  $\dot{V}$  deberá ser negativo en un entorno del punto de equilibrio, ya que la composición  $V(\varphi(t))$  deberá tomar valores cada vez más chicos. Esto también lo podemos pensar de la siguiente forma. Una posible  $V$  con un mínimo en  $\bar{x}$  podría tener unas curvas de nivel como muestra la figura 2. Se recuerda que el vector gradiente era perpendicular a las curvas de nivel y apuntaba en el sentido creciente de las mismas.

Que  $\dot{V}$  sea negativo, implica que el ángulo formado entre el gradiente y el vector  $f(x)$  es mayor o igual a  $90^\circ$ . De esta forma, la solución tiene una velocidad que la dirige hacia las curvas de nivel más chicas, acercándose al punto de equilibrio. En el caso particular donde  $\dot{V}$  sea nulo, implicaría que  $f$  es perpendicular a la curva de nivel. Si esto sucediera para todo  $x$ , es decir que  $\dot{V}$  sea la función nula, implicaría que las soluciones se mantengan en las curvas de nivel de  $V$ . Esto es coherente con lo mencionado anteriormente, ya que si  $V(\varphi(t)) = 0$ ,  $V(\varphi(t))$  es una función constante y por lo tanto la solución deberá permanecer en las curvas de nivel de  $V$ . En este caso particular donde  $\dot{V}$  es la función nula se dice que  $V(x)$  es una **preintegral** de la ecuación diferencial. Conceptualmente, la preintegral es una magnitud que se conserva a lo largo del tiempo para cualquier solución.

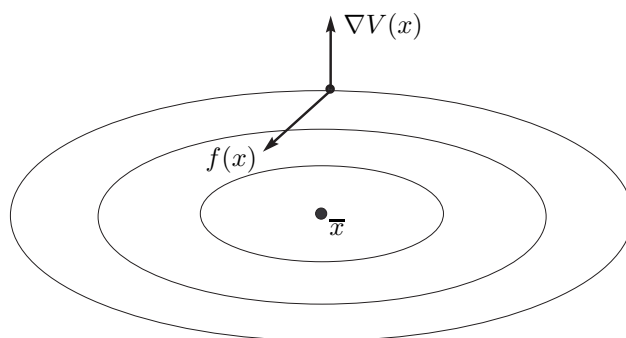


FIGURA 2. Idea de Liapunov con el gradiente de  $V(x)$ .

**Observación 0.1.** Como las funciones  $f$  que vamos a considerar no dependen de la variable  $t$ , la hipótesis continua y localmente de Lipschitz según la variable espacial se cambia por "localmente de Lipschitz según la variable espacial". Localmente de Lipschitz según la variable espacial implica la continuidad de  $f$ .

**Teorema 0.1 (Liapunov 1).**

Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  con  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente de Lipschitz según la variable espacial y  $U \subset \Omega$  un entorno de  $\bar{x}$ . Si existe  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  tal que:

- $V$  tiene un mínimo estricto en  $\bar{x}$ .
- $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$ .

Entonces  $\bar{x}$  es estable.

Demostración:

Para facilitar la demostración empecemos considerando el caso donde  $V(\bar{x}) = 0$ . Queremos probar que:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > t_0$$

siendo  $\varphi(t)$  la solución a la ecuación con condición inicial  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Dado  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$ , llamaremos  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| = \epsilon\}$ . Dado que  $S$  es un conjunto compacto y  $V$  una función continua existe:

$$m = \min\{V(x) : x \in S\} > 0.$$

$m$  es mayor que cero ya que  $V$  tiene un mínimo estricto en  $x = \bar{x}$ . Por otro lado, como  $V$  es continua y  $V(\bar{x}) = 0$  por la definición de continuidad obtenemos que:

$$\exists \delta > 0 / \text{ si } \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow V(x) < \frac{m}{2}.$$

Consideraremos  $\varphi(t)$  una solución con condición inicial  $\varphi(t_0) = x_0$  tal que  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$  con intervalo maximal  $I(t_0, x_0)$  y la función  $v(t) = V(\varphi(t))$ . Observar que  $\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$  por lo que la función  $v(t)$  será decreciente.

$$(0.1) \quad v(t) \leq v(t_0) = V(x_0) < \frac{m}{2}, \quad \forall t \in I(t_0, x_0), t > t_0.$$

Por lo tanto, si suponemos que la solución en algún momento se escapa de la bola de radio  $\epsilon$  tendrá que atravesar el conjunto  $S$ . Si definimos el tiempo  $t_1 \in I(t_0, x_0)$ ,  $t_1 > t_0$  tal que:

$$\|\varphi(t_1) - \bar{x}\| = \epsilon$$

como el mínimo  $V$  obtenido en  $S$  es  $m$ , tendríamos que:

$$v(t_1) = V(\varphi(t_1)) \geq m.$$

Esto es absurdo por lo obtenido en (0.1). Por lo tanto, dado un  $\epsilon > 0$  encontramos un  $\delta$  (por la continuidad) tal que si  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ :

$$\|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \forall t \in I(t_0, x_0), t > t_0.$$

Haría falta demostrar que esta solución está definida para todo  $t > t_0$ , es decir que el intervalo maximal  $I(t_0, x_0)$  no está acotado superiormente. Esto último lo deducimos rápidamente con escape de compactos. Dado que las soluciones están acotadas espacialmente en el futuro por la bola  $B_{\bar{x}, \epsilon}$ , se concluye que la solución deberá estar definida para todo  $t > t_0$ .

Por lo tanto ha quedado demostrado el teorema para el caso donde  $V(\bar{x}) = 0$ . Si  $V(\bar{x}) = \alpha \neq 0$ , si consideramos la función  $\tilde{V}(x) = V(x) - \alpha$  caemos en el caso anterior, permitiéndonos demostrar el teorema también para este caso.  $\square$

### **Teorema 0.2 (Liapunov 2).**

Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  con  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente de Lipschitz según la variable espacial y  $U \subset \Omega$  un entorno de  $\bar{x}$ . Si existe  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  tal que:

- $V$  tiene un mínimo estricto en  $\bar{x}$ .
- $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in U - \{\bar{x}\}$ .

Entonces  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.

Demostración:

Por el teorema de Liapunov 1 ya podemos afirmar que  $\bar{x}$  es estable. Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$  sabemos que:

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0$$

siendo  $\varphi(t)$  la solución a la ecuación con  $\varphi(t_0) = x_0$ . Falta fijarnos que:

$$\exists \delta' > 0 / \|x_0 - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}.$$

Nuevamente para simplificar supondremos que  $V(\bar{x}) = 0$ .

Haremos la demostración en dos partes. Primero vamos a demostrar que  $v(t) = V(\varphi(t))$  tiende a  $V(\bar{x}) = 0$ . Una vez deducido esto último, veremos que eso implica que  $\varphi(t)$  tienda a  $\bar{x}$ .

Dado que  $\varphi(t) \in B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$  y que por hipótesis se tiene que

$$\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) < 0,$$

entonces  $v(t)$  será estrictamente decreciente. Como la función  $V(x)$  tiene un mínimo estricto en  $\bar{x}$  sabemos que:

$$V(\bar{x}) = 0 \leq v(t) < v(t_0) = V(x_0), \quad \forall t > t_0.$$

Por ser una función decreciente y acotada inferiormente  $v(t)$  deberá tener una asíntota horizontal (figura (3.a)). O sea existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \alpha \geq 0.$$

Esto implica que:

$$(0.2) \quad \alpha \leq v(t) < V(x_0), \quad \forall t > t_0.$$

Supondremos que  $\alpha > 0$ . Por la continuidad de  $V$ .

$$\exists \gamma > 0 / \|x - \bar{x}\| < \gamma \Rightarrow V(x) < \alpha.$$

Como  $V(\varphi(t)) \geq \alpha$  para todo  $t > t_0$  se cumple que

$$\gamma < \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Sea  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$ , el anillo pintado en la figura (3.b). Consideraremos:

$$-r = \max_{x \in K} \{\dot{V}(x)\} < 0 \Rightarrow \dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq -r, \quad \forall t > t_0.$$

$$v(t) = V(x_0) + \int_{t_0}^t \dot{v}(s) ds \leq V(x_0) + \int_{t_0}^t -r ds = V(x_0) - r(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

esto último es absurdo ya que en la inecuación (0.2) habíamos concluido que  $v(t) \geq \alpha > 0$ . Al suponer  $\alpha > 0$  llegamos a un absurdo, por lo que  $\alpha = 0$ .

Hemos demostrado que si  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$  la función  $v(t) = V(\varphi(t))$  tiende a  $V(\bar{x}) = 0$ . Falta probar que esto implica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}$ . Recordamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x} \Leftrightarrow \text{Dado } \epsilon' > 0, \exists T > 0 / \text{si } t > T \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon'.$$

Sea  $0 < \epsilon' < \epsilon$ , consideremos el conjunto:

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon' \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$$

$$m = \min_{x \in K'} \{V(x)\} > 0.$$

Como  $v(t)$  tiende a cero, podemos afirmar que existe  $T > t_0$  tal que:

$$v(t) < \frac{m}{2}, \quad \forall t > T \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon' \quad \forall t > T.$$

Tomando  $\delta' = \delta$ , vemos que si  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta'$  por la definición del límite, esto último implica que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}.$$

□

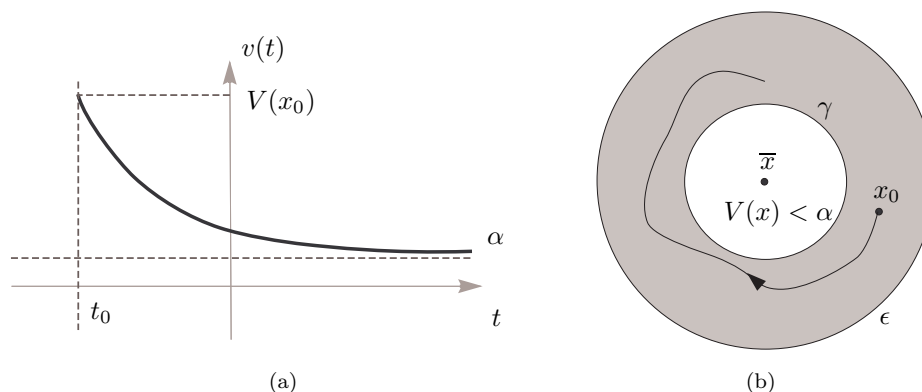


FIGURA 3. Demostración de Liapunov 2

Estos dos teoremas nos servirán para afirmar que un punto de equilibrio es estable o asintóticamente estable. Sin embargo, no hemos visto ningún teorema que nos asegure la inestabilidad. A continuación veremos el teorema de Cetaev que nos afirma de la inestabilidad de un punto de equilibrio, la idea es similar a la de Liapunov.

Si ahora tuviéramos una función  $V$  que tenga un máximo en el punto de equilibrio y  $\dot{V} < 0$ , razonando de forma análoga a los teoremas anteriores podríamos deducir que la solución se aleja del punto de equilibrio y por lo tanto es inestable. Sin embargo, dado que para la inestabilidad alcanza con que alguna solución se aleje, no es necesario pedir que la  $V$  tenga un máximo.

**Teorema 0.3 (Cetaev).**

Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  con  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente de Lipschitz según la variable espacial y  $U \subset \Omega$  un entorno de  $\bar{x}$ . Si existe  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  tal que:

- Existe una sucesión  $x_n \subset U - \{\bar{x}\}$  tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}$  y  $V(x_n) \leq V(\bar{x})$ .
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$ .

Entonces  $\bar{x}$  es inestable.

Demostración:

Al igual que en los teoremas de Liapunov, supondremos que  $V(\bar{x}) = 0$ . Trataremos de demostrarlo por el absurdo. Supongamos que  $\bar{x}$  es estable. En este caso, dado  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$ :

$$\exists \delta > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon.$$

Como  $x_n$  converge a  $\bar{x}$ , sabemos que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{ si } n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - \bar{x}\| < \delta.$$

Si fijamos un  $m > n_0$ , podemos deducir por la definición de estabilidad que la solución a la ecuación diferencial con condición inicial  $\varphi(t_0) = x_m$  verifica que:

$$\|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > t_0.$$

Por otro lado, si consideramos la función  $v(t) = V(\varphi(t))$ , dado que  $\dot{V} < 0$  y  $V(x_m) \leq 0$ , se cumple que  $v(t)$  es una función estrictamente decreciente. Esto nos permite afirmar lo siguiente:

$$\exists M > 0, T > t_0 / V(\varphi(t)) < -M, \forall t > T.$$

y por la continuidad de  $V$ :

$$\exists 0 < \delta' < \epsilon / \text{ si } \|x - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow |V(x)| < M.$$

$$\Rightarrow \delta' < \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > T.$$

Donde la cota de  $\epsilon$  se debe a que supusimos que el punto de equilibrio era estable. Ahora razonaremos de forma análoga al segundo teorema del Liapunov. Consideremos el anillo  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta' \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$ , como es un compacto y las funciones  $V$  y  $\dot{V}$  son continua podemos definir:

$$m = \min_{x \in A} \{V(x)\} \Rightarrow v(t) \geq m, \forall t > t_0$$

$$-r = \max_{x \in A} \{\dot{V}(x)\} < 0.$$

Entonces:

$$v(t) = V(\varphi(T)) + \int_T^t \dot{v}(s) ds \leq V(\varphi(T)) - r(t - T) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Esto es absurdo ya que habíamos concluido que  $v(t) \geq m$ . Por lo tanto, nuestra suposición no se cumple, es decir  $\bar{x}$  no puede ser estable. □

**Proposición 0.2.**

Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  con  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente de Lipschitz según la variable espacial. Sea  $U \subset \Omega$  un entorno de  $\bar{x}$  y  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  tal que:

- $V$  tiene un mínimo estricto en  $\bar{x}$ .
- $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$ .

Entonces  $\bar{x}$  es inestable.

Demostración:

Si consideramos  $U(x) = -V(x)$ ,  $U(x)$  se encuentra en las hipótesis del teorema de Cetaev y por lo tanto  $\bar{x}$  es inestable.  $\square$

Luego de estos teoremas, deben quedar dudas de que función  $V$  considerarse. Sea  $(x_0, y_0)$  el punto de equilibrio, necesitaríamos una función que tenga un mínimo estricto en ese punto para poder usar los teoremas del Liapunov. Una posible función es  $V(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  o más genéricamente  $V(x, y) = a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2$  con  $a, b > 0$ . Para el teorema de Cetaev, necesitaríamos una función que no tenga un mínimo estricto. Las funciones más comunes a considerarse para ambos teoremas son las formas cuadrática  $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ .

Para utilizar estos teoremas también necesitamos una condición para  $\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x)$ , esto ya depende de la ecuación diferencial.

### **Ejemplo 0.1.**

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = -x^3.$$

Esta ecuación tiene un único punto de equilibrio  $x = 0$  y estudiando el signo de las derivadas o resolviendo la ecuación se puede ver rápidamente que el mismo es asintóticamente estable. Si quisiéramos utilizar el teorema de Liapunov para demostrarlo, podríamos considerarnos la función:

$$V(x) = x^2.$$

Esta función es de clase  $C^1$ , tiene un mínimo en el punto de equilibrio y si nos fijamos en la derivada a lo largo de las trayectorias tenemos que:

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2x^4 < 0, \forall x \neq 0.$$

Dado que la función  $f(t, x) = -x^3$  se encuentra en las hipótesis de Picard y la función  $V$  definida se encuentra en las hipótesis del teorema de Liapunov 2, podemos afirmar que el 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.  $\circ$

### **Ejemplo 0.2 (Preintegral).**

Como mencionamos previamente, una preintegral es una función que cumple  $\dot{V} = 0$ , lo que implica que  $V(\varphi(t))$  es constante. Esto nos permite saber que las soluciones a la ecuación están incluidas en las curvas de nivel de  $V$  con lo que podemos realizar el diagrama de fases.

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x - y) \\ \dot{y} = -\frac{x}{2}(x - y) \end{cases}$$

Obtenemos rápidamente que este problema tiene infinitos puntos de equilibrio de la forma  $x = y$ . Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio trataremos de obtener el diagrama de fases a través de una preintegral. Supongamos que este problema tiene una preintegral de la forma:

$$\begin{aligned} H(x, y) = F(x) + G(y) &\Rightarrow F'(x)\dot{x} + G'(y)\dot{y} = 0 \Rightarrow F'(x)y(x - y) = G'(y)\frac{x}{2}(x - y) \\ &\Rightarrow \frac{F'(x)}{x} = \frac{G'(y)}{2y} \end{aligned}$$

dado que tenemos una igualdad donde de un lado tenemos una función que depende de  $x$  y del otro lado una función que depende de  $y$  ambas deberán ser constantes (si derivamos respecto a  $x$  a ambos lados la derivada sería nula ya que la función de la derecha no depende de  $x$ ).

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{x} = \frac{G'(y)}{2y} = A \Rightarrow F(x) = \frac{Ax^2}{2} \quad G(y) = Ay^2$$

Si consideramos  $A = 1$ , obtenemos la preintegral:

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$$

Las curvas de nivel de esta función son elipses centradas en cero.

$$H(x, y) = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1$$

Sabiendo que las soluciones se mantendrán en las elipses y con el signos de las derivadas, podemos realizar el diagrama de fases de la figura (4). Observar que en cada elipse encontramos 4 tipos de soluciones distintas, dos soluciones de equilibrio y 2 dos a cada lado de las soluciones de equilibrio.

Con el diagrama de fases, podemos obtener que los puntos de equilibrio en el semiplano superior son inestables, mientras que los del plano inferior incluyendo el origen son estables. Recordar que como los puntos de equilibrio no son aislados, no pueden ser asintóticamente estables.

En particular, la función  $H(x, y)$  tiene un mínimo estricto en  $(0, 0)$  y  $\dot{H} \leq 0$ , por lo que está en las hipótesis de Liapunov 1 y podemos deducir que es un punto de equilibrio estable también por este camino. La función  $H$  no tiene un mínimo estricto en los demás puntos de equilibrio, por lo que no sirve esta función para usar Liapunov en los demás puntos.  $\circ$

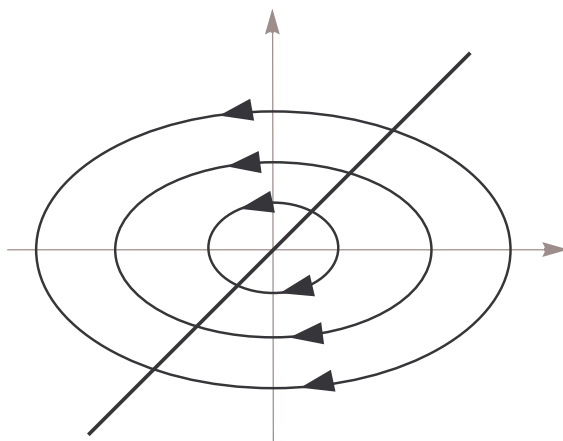


FIGURA 4. Diagrama de fases del ejemplo 0.2.

## 0.2. Linealización

Un método común y conocido al enfrentarse con una función no lineal es aproximarla por una función lineal. Hasta ahora, no hemos hablado de que sucede con las soluciones de una ecuación diferencial en comparación con la ecuación diferencial linealizada. Ahora, comparemos ambos problemas para poder deducir la estabilidad de los puntos de los equilibrio.

Como ya sabemos, dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

donde las funciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ , se cumple que:

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + r(x^2)$$

donde  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r(x^2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  representa el resto de orden 2 y  $J_f(\bar{x})$  es el Jacobiano de la función evaluado en el punto  $\bar{x}$ . Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x) & \frac{df_1}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(x) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x) & \frac{df_2}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_2}{dx_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1}(x) & \frac{df_m}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_m}{dx_n}(x) \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

La aproximación:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

olvidándonos del resto, es muy buena en un entorno de  $\bar{x}$ .

El siguiente teorema que nos ayudará a determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio no será demostrado. Sea  $\bar{x}$  un punto de equilibrio ( $f(\bar{x}) = 0$ ), la idea será comparar el problema  $\dot{x} = f(x)$  con el problema linealizado, es decir:

$$\dot{x} = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) = J_f(\bar{x})(x - \bar{x})$$



Este teorema no será demostrado. El mismo determina que en un entorno al punto de equilibrio, las soluciones a la ecuación diferencial original serán muy similares a la de la ecuación diferencial, siempre y cuando las partes reales de los valores propios de  $J_f(\bar{x})$  sean diferentes de cero.

Esta restricción con respecto a la parte real del valor propio se debe a lo siguiente. Si bien nuestro problema original tiene una pequeña perturbación, la misma puede ser tan chica como queramos achicando el entorno alrededor del punto de equilibrio. Por lo tanto, si estamos lo suficientemente cerca y las soluciones en el sistema lineal se acercan a  $\bar{x}$  (VAP's negativos), también lo harán en el sistema original. Es análogo si las soluciones se están alejando (VAP's positivos). Sin embargo, si consideramos un problema que al linealizarlo obtenemos una ecuación lineal con valores propios imaginarios puros, el diagrama de fase que se obtiene serán circunferencias. Ahora si, por más mínima que sea la perturbación, las circunferencias podrían abrirse, haciendo el punto asintóticamente estable o inestable. Es por esta razón, el sistema linealizado no nos dará información en este caso acerca de la estabilidad del punto de equilibrio del problema original.

En otras palabras, cuando el sistema lineal tiene un valor propio positivo (negativo) indica que las soluciones tienen una dirección en las cuales se alejan (acercan) del punto de equilibrio y esto se mantendrá con un error lo suficientemente chico. Sin embargo, cuando el valor propio es cero que indica una dirección en las cuales las soluciones no se acercan ni se alejan, un pequeño error puede alterar esto.

### **Teorema de Grossman-Hartman.**

Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  y  $\bar{x}$  un punto de equilibrio de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$ . Entonces:

1. Si todos los valores propios de la matriz  $J_f(\bar{x})$  tienen parte real negativa  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.
2. Si hay un valor propio de  $J_f(\bar{x})$  con parte real positiva  $\bar{x}$  es inestable.

### **Ejemplo 0.3 (Linealización con valores propios imaginarios puros).**

La idea de este ejemplo es convencerlos de que el teorema de Hartman no sirve cuando la linealización tiene valores propios con parte real cero. Veremos 3 ecuaciones diferenciales con una linealización con valores propios imaginarios puros y para cada caso estudiaremos la estabilidad del punto de equilibrio.

Sean los problemas:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 + 1) \end{cases}$$

Estos tres problemas tiene como único punto de equilibrio el origen. Si linealizamos estos problemas obtenemos:

$$J_1(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix} \quad J_2(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix} \quad J_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 1 \\ -3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_i(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dado que el Jacobiano para cualquiera de estas ecuaciones tienen todos los valores propios con parte real nula no nos sirve el Teorema de Grossman-Hartman. Trataremos de estudiar la estabilidad por otros métodos.

#### Problema 1:

De la ecuación podemos obtener que las derivadas se anulan en las curvas:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = x^3$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow x = -y^3$$

Estudiando el signo de las derivadas en el plano, podemos ver donde crece o decrecen ambas componentes. Esto está indicado con las flechas de la figura (5.a). Estos signos no nos permiten deducir si las soluciones deben acercarse o no al origen.

Trataremos de deducir la estabilidad por los teoremas del Liapunov. Una típica función a considerar es la siguiente:

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

Esta función sabemos que tiene un mínimo escrito en el punto de equilibrio si consideramos  $a, b > 0$ . Observar que no sirve considerar  $a$  o  $b$  nulos, ya que en ese caso no habría un mínimo estricto. Si estudiamos  $\dot{V}$ :

$$\dot{V}(x, y) = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy - ax^4 - bxy - by^4) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Donde  $a$  y  $b$  se escogieron convenientemente para estar en las hipótesis de Liapunov. Utilizando la función  $V(x, y) = x^2 + y^2$  podemos deducir que el origen es asintóticamente estable por el teorema de Liapunov 2 (teorema 0.2). Un posible diagrama de fases para este problema es como muestra la figura (5.a).

**Problema 2:**

Estudiando el signo de la derivada:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = -x^3 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = y^3 \end{aligned}$$

y las zonas donde las derivadas sean positivas o negativas se representan por las flechas de la imagen (5.b). Nuevamente, estos signos no nos permiten definir la estabilidad del origen. Si quisiéramos usar Liapunov y utilizamos una función  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  como en el caso anterior:

$$\dot{V} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy + ax^4 - bxy + by^4) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = 2(x^4 + y^4) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Por la proposición 0.2 deducida del teorema de Cetaev podemos deducir que el origen es inestable. En este caso, un posible diagrama de fases es el representado en la figura (5.b).

**Problema 3:**

En este último problema:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Nuevamente como los signos de las derivadas no nos alcanzan para determinar la estabilidad, trataremos de estudiar la ecuación por Liapunov. Utilizando la misma función  $V$  que en los casos anteriores obtenemos:

$$\dot{V} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy(x^2 + 1) - bxy(x^2 + 1)) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = 0$$

Esta función  $V$  no solo se encuentra en las hipótesis de Liapunov 1 (teorema 0.1) y por ende podemos deducir que el origen es estable si no que a su vez es una preintegral a nuestro problema. Como las soluciones deben estar contenidas en las curvas de nivel de la preintegral ( $V(x, y) = x^2 + y^2$ ), las soluciones deberán estar contenidas en circunferencias. El diagrama de fases queda como indica la figura (5.c).

Tener en cuenta que si encontramos una función que se encuentra en las hipótesis de Liapunov 1 y no en las de Liapunov 2 (nos permite afirmar estabilidad pero no estabilidad asintótica), no significa que el punto no sea asintóticamente estable. Así como que no encontremos una función  $V$  que nos permita utilizar cualquiera de los dos teoremas del Liapunov no significa que el punto sea inestable. En este problema, si bien caímos en las hipótesis de Liapunov 1 lo que en principio no descarta la opción de que el origen sea un punto asintóticamente estable podemos afirmar que no lo es por el diagrama de fases del problema.

Con este ejemplo se ve claramente que el teorema de Hartman no es válido para estos casos, ya que dados 3 ecuaciones diferenciales con el mismo problema linealizado, obtuvimos que el punto de equilibrio podía ser estable, asintóticamente estable o inestable.  $\circ$

**Ejemplo 0.4 (Péndulo sin rozamiento).**

Estudiaremos el problema del péndulo simple sin rozamiento. Este problema consiste en un cuerpo de masa  $m$  enganchado a una varilla sin masa e inextensible, donde las únicas fuerzas que actúan son el peso y la tensión. Al despreciar el rozamiento, podemos decir que la energía se conserva, que implica lo siguiente:

$$E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}} = -mgR\cos\theta + \frac{m(R\dot{\theta})^2}{2} = E_0$$

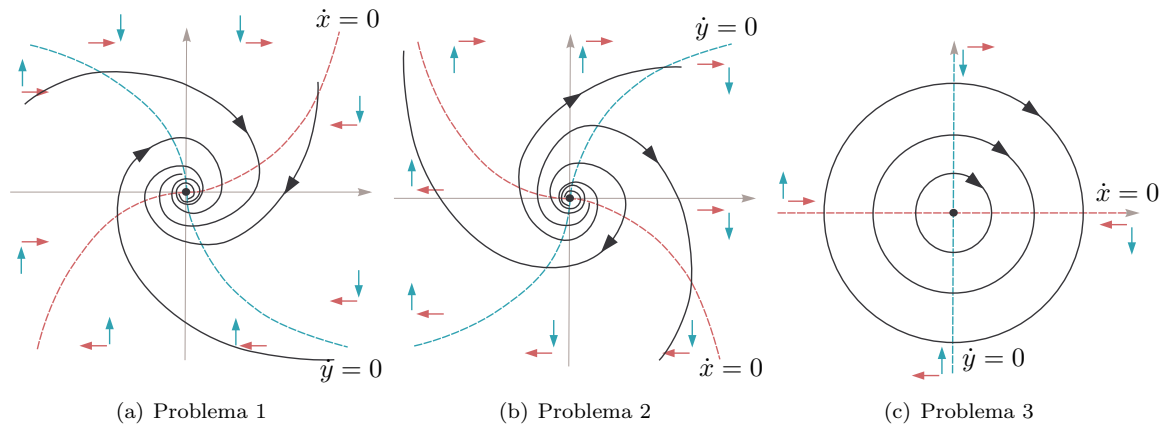


FIGURA 5. Diagrama de fases del ejemplo 0.3

donde se utilizó que la velocidad de la masa será  $v = R\dot{\theta}$  y se definió  $E_0$  como la energía inicial. Si derivamos esta ecuación respecto al tiempo para deshacernos de la dependencia de la condición inicial se obtiene que:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\text{sen}(\theta).$$

A esta igualdad se le llama ecuación de movimiento del péndulo. Podríamos haber llegado a la misma ecuación utilizando las leyes de Newton. Si suponemos  $R = g$  (para simplificar) y realizamos el cambio de variable  $x = \theta$  e  $y = \dot{\theta}$ , obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sen}(x) \end{cases}$$

En este caso,  $x$  representa el ángulo e  $y$  representa la velocidad angular. Este último problema tiene infinitos puntos de equilibrio de la forma  $(n\pi, 0)$  con  $n \in \mathbb{N}$ , lo que representa los puntos con velocidad cero ( $\dot{\theta} = 0$ ) y en posición vertical. Estudiaremos la estabilidad de estos puntos.

Liapunov con la función  $V(x, y) = (x - k\pi)^2 + y^2$

Empecemos tratando de estudiar la estabilidad con el teorema de Liapunov utilizando la función  $V(x, y) = (x - k\pi)^2 + y^2$ <sup>1</sup>. Dado un punto de equilibrio  $(k\pi, 0)$  esta función  $V$  tiene un mínimo estricto en el punto de equilibrio. Sin embargo, esta función no está dentro de las hipótesis de los teoremas.

$$\dot{V} = 2((x - k\pi)x\dot{x} + y\dot{y}) = 2y(x - k\pi - \text{sen}(x)).$$

Para estar en las hipótesis de Liapunov nos haría falta que  $\dot{V}$  sea siempre negativo en un entorno del punto o siempre positivo para que nos permita utilizar la proposición de Cetaev (proposición 0.2). Sin embargo, no existe ningún entorno donde esto ocurra. Para estudiar el signo de  $x - k\pi - \text{sen}(x)$  se pueden graficar la recta  $f(x) = x - k\pi$  y la función  $g(x) = \text{sen}(x)$  y comparar donde una es mayor que la otra.

Por ejemplo si tomamos  $k = 0$ , se tiene que  $x - \text{sen}(x) > 0$  si  $x > 0$  y  $x - \text{sen}(x) < 0$  si  $x < 0$ . Dado un entorno alrededor del punto de equilibrio  $(0, 0)$  ( $k = 0$ ), siempre podremos encontrar un punto  $(x_1, y_1)$  con  $x_1, y_1 > 0$  y por lo tanto  $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$  y otro punto  $(x_1, y_2)$  con  $y_2 < 0$  donde  $\dot{V}(x_1, y_2) < 0$ . Se puede razonar de forma análoga para los otros valores de  $k$ . Esta función  $V$  no nos permite deducir nada acerca de la estabilidad de los puntos.

### Preintegral

Buscaremos otra función para utilizar Liapunov, que nos dará mucha más información que la estabilidad. Se recuerda que la preintegral, era una magnitud que se conserva a lo largo de las trayectorias. Para este problema particular, sabemos que la energía se conserva para cualquiera sea la condición inicial, justamente partimos de acá para obtener la ecuación diferencial. Si consideramos la función

<sup>1</sup>Se puede realizar el mismo razonamiento con la función  $V(x, y) = a(x - 2k\pi)^2 + by^2$  pero para simplificar la explicación se utilizó  $a = b = 1$ .

$H(x, y)$  como la energía por unidad de masa, esta función es una preintegral al problema.

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x) \Rightarrow \dot{H}(x, y) = y\dot{y} + \operatorname{sen}(x)\dot{x} = 0$$

Observar que esta función es la misma que consideramos en un principio, por tomando  $g = R$ ,  $x = \theta$ ,  $y = \dot{\theta}$  y dividiendo entre la masa. Esta función tiene mínimos estrictos donde  $y = 0$  y  $\cos(x) = 1$ , es decir, en los puntos de equilibrios de la forma  $(2k\pi, 0)$ . Dado que esta función tiene mínimos escritos en esos puntos de equilibrio y  $\dot{H} = 0$ , gracias al teorema de Liapunov 1 (teorema 0.1) podemos deducir que todos los puntos de equilibrio  $(2k\pi, 0)$  son estables.

Utilizando los teoremas vistos en este capítulo no podemos demostrar nada acerca de los otros punto de equilibrio con esta función, ya que  $V$  no tiene un mínimo en esos puntos, ni  $\dot{V}$  es estrictamente menor a cero para tratar de utilizar Cetaev.

Al ser  $H$  una preintegral, también sabemos que nuestras soluciones permanecerán en las curvas de nivel de la  $H$ , es decir que  $x(t), y(t)$  deberán verificar que:

$$\frac{y^2}{2} - \cos(x) = C \Rightarrow y = \pm\sqrt{2\cos(x) + 2C}.$$

Estudiaremos el gráfico de la función  $f(x) = \sqrt{2\cos(x) + 2C}$  para ver como son esas curvas. En primer lugar, el dominio de esta función nos depende de  $C$ . Para  $C \geq 1$ , el dominio es todo  $\mathbb{R}$  y para  $C < -1$ , esa función nunca está definida. Si  $C$  es poco menor que 1, la función dejará de estar definida en intervalos alrededor de los puntos  $x = (2k+1)\pi$ , donde  $\cos(x) = -1$ . El dominio de  $f$  serán intervalos simétricos centrados en los puntos  $x = 2k\pi$  que a medida que  $C$  se achique, los intervalos se irán achicando hasta alcanzar  $C = -1$  donde el dominio serán los puntos aislados  $x = 2k\pi$ .

Por otro lado, sabemos que  $f$  será siempre positiva, tendrá máximos o mínimos donde  $2\cos(x) + 2C$  lo tenga y será decreciente o creciente donde  $2\cos(x) + 2C$  lo sea. Por lo tanto, para  $C \geq 1$ , la función estará definida en todo  $\mathbb{R}$  e irá oscilando. Tendrá sus máximos en  $x = 2k\pi$  y los mínimos en  $x = (2k+1)\pi$ . Esto también lo podemos ver con su derivada.

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2\cos(x) + 2C}}$$

Esta función está definida para todo  $x$  y es continua mientras que  $C > 1$ . Para el caso particular donde  $C = 1$  tenemos un problema en los puntos  $x = (2k+1)\pi$  ya que se anula el denominador, aunque también el numerador. Si realizamos el límite de  $f'^2$  (para sacarnos la raíz) cuando tendemos a esos valor se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f'^2(x) &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2(\cos(x) + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} f'^2(x) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2(\cos(x) + 1)} = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{-2\operatorname{sen}(x)} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} |f'(x)| = 1 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se utilizó el L'Hospital. Dado que la raíz es siempre mayor o igual a cero con  $C = 1$ , el signo de  $f'(x)$  lo determina el seno.

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} f'(x) = 1$$

Estos signos también los podíamos deducir ya que sabemos que en esos puntos la función tiene un mínimo. Vemos que los límites laterales no coinciden y por lo tanto la función no será derivable en esos puntos. Para  $x = (2k+1)\pi$  el gráfico de  $f$  tendrá unos puntos angulosos.

Por último, para los  $C \in (-1, 1)$  la función será derivable en los intervalos abiertos donde la misma está definida. En los extremos, donde la raíz se anula, se puede observar que la derivada tiende a infinito ya que el denominador tiende a cero y no lo hace el numerador (los valores de  $x = (2k+1)\pi$  no pertenecen al dominio y los  $x = 2k\pi$  son el centro de los intervalos, no los extremos).

En la siguiente figura, vemos como quedaría el gráfico de la función  $f$ .

Volviendo a la ecuación diferencial, habíamos obtenida que las soluciones deberían permanecer en las curvas  $y = \pm\sqrt{2\cos(x) + 2C}$ . Las de  $+$  la raíz, coinciden con los gráficos de la función  $f$  y las

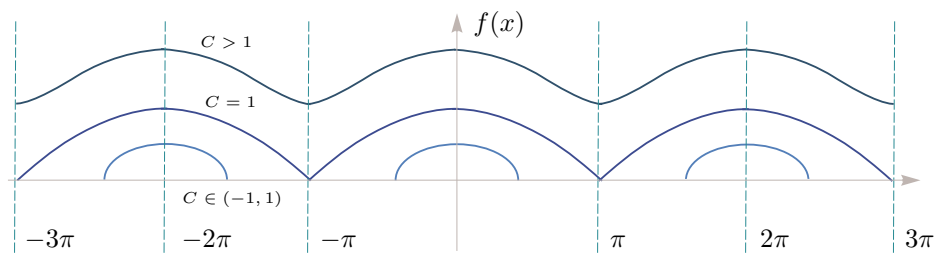


FIGURA 6. Gráfico de la función  $f(x) = \sqrt{2\cos(x) + 2C}$ .

otras serán las simétricas respecto al eje  $x$ . Por lo tanto, el diagrama de fases del péndulo será como muestra la imagen (7).

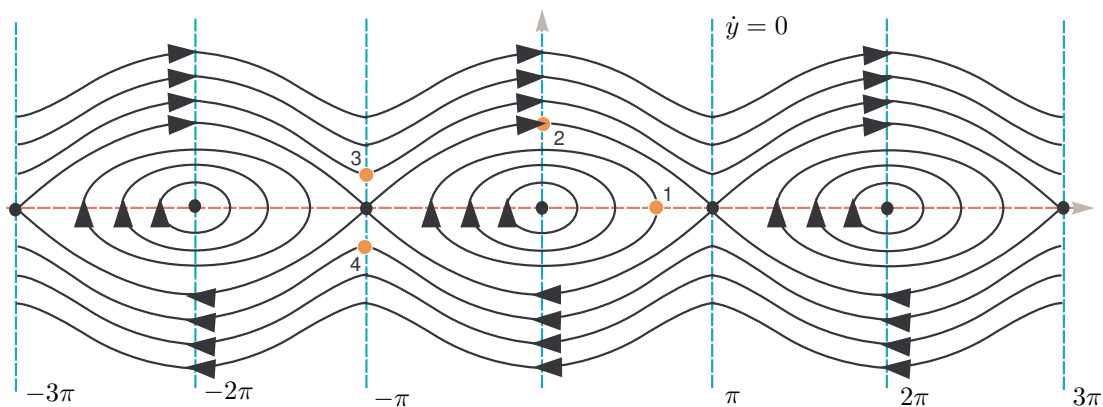


FIGURA 7. Diagrama de fases del péndulo.

En este diagrama, tenemos varios tipos de soluciones distintas. Además de los puntos de equilibrio, tenemos unas soluciones que dan vueltas alrededor de algunos puntos de equilibrio, otras que van de un punto de equilibrio a otro y las soluciones que van por arriba o por debajo de las soluciones anteriores. Si consideramos una condición inicial en el punto 1 de la figura, representaría empezar con determinado ángulo corrido de la vertical pero sin velocidad. En este caso, las soluciones empezarán a bajar hasta la vertical donde alcanzan el máximo módulo de la velocidad y siguen subiendo hacia el otro lado. Así repetidamente.

Una condición inicial en el punto 3, representaría empezar arriba con cierta velocidad angular. Con esta condición inicial las soluciones darían infinitas vueltas completas. El punto 4 es análogo, pero empezando con una velocidad en el sentido contrario (gira hacia el otro lado). Por último una condición inicial en el punto 2, representaría empezar abajo con la velocidad justa para llegar arriba. En este caso, la masa demoraría infinito tiempo en subir, por lo tanto las soluciones tenderán a  $(\pi, 0)$  pero nunca llegaría.

Ahora que tenemos el diagrama de fases, podemos afirmar que los puntos de equilibrio de la forma  $((2k + 1)\pi, 0)$  son inestables. Este es coherente con el problema físico.

### Linealización

Veamos ahora que podríamos haber deducido utilizando el problema linealizado. El Jacobiano de la función  $f(x, y)$  es el siguiente:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_f((2k + 1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los puntos de equilibrio de la forma  $(2k\pi, 0)$ , los que representaría la posición vertical de abajo para el péndulo, el problema linealizado nos queda con VAP's imaginarios lo que no nos permite

deducir nada acerca de la estabilidad de los mismos. En este caso particular, vemos que en un entorno de estos puntos el diagrama de fases de la figura (7) alrededor de estos puntos es similar al problema linealizado, pero como se vio en el ejemplo anterior (ejemplo 0.3) esto no siempre tiene que pasar.

Para los puntos de equilibrio  $((2k + 1)\pi, 0)$ , obtenemos un problema linealizado que se corresponde a uno diagonal con valores propios 1 y -1 y vectores propios  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$  respectivamente. Dado que este problema tiene un VAP positivo, podemos deducir que estos puntos son inestables por el lema de Hartman ??.

Observar que el diagrama de fases alrededor de los puntos de equilibrio de la forma  $x = (2k + 1)\pi$  es efectivamente muy similar al problema linealizado. En la siguiente imagen se realiza un zoom del diagrama de fases alrededor del punto  $(\pi, 0)$ , en donde se puede verificar como el diagrama de fases alrededor del punto  $(\pi, 0)$  es muy parecido al diagrama de fases del problema lineal. Incluso coinciden las direcciones de las soluciones que tienden al punto de equilibrio en el pasado o en el futuro con las direcciones de los vectores propios correspondientes.  $\circ$

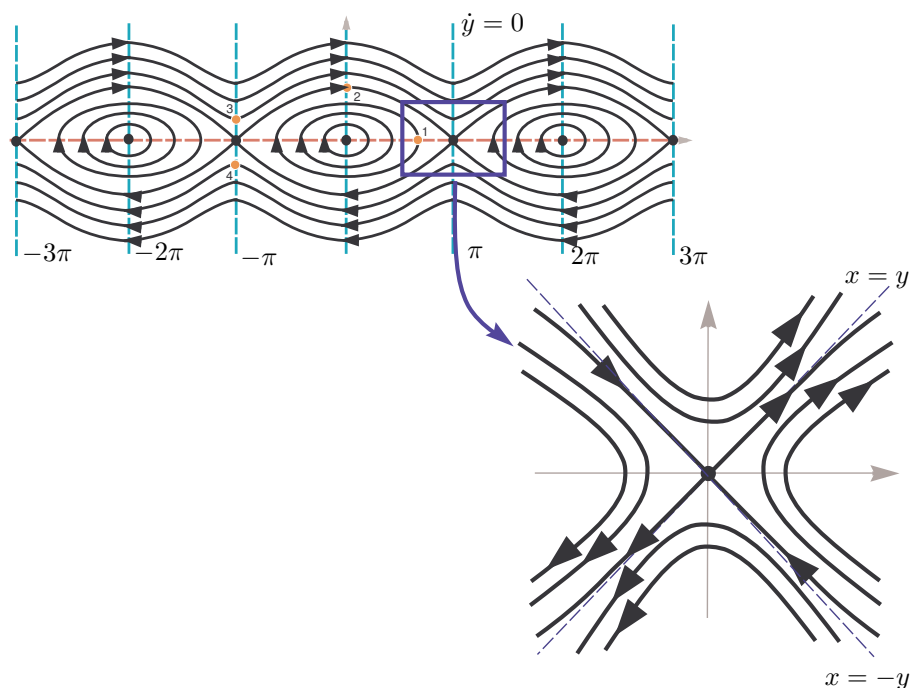


FIGURA 8. Similitud del diagrama de fases del péndulo con el problema linealizado.

### Ejemplo 0.5 (Péndulo con rozamiento).

Cambiaremos un poco el ejemplo anterior, sumándole la fuerza del rozamiento con el aire. Esta fuerza actúa en sentido contrario a la velocidad y suele modelarse como  $F_{roz} = -by$ , donde  $b$  es una constante e  $y$  es la velocidad. Ajustando el ejemplo anterior y considerando todas las constantes como la unidad la ecuación diferencial obtenida es:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sen}(x) - y \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio siguen siendo los mismo que en el caso anterior,  $(k\pi, 0)$ . Veamos que pasa con la estabilidad de estos puntos en este caso.

#### Liapunov

Si ahora consideráramos la función de energía para utilizar el teorema de Liapunov, sabemos que la misma tiene un mínimo estricto en los puntos de equilibrio  $(2k\pi, 0)$  y debería ser decreciente.

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x) \Rightarrow \dot{V} = y\dot{y} - \text{sen}(x)\dot{x} = -y\text{sen}(x) - y^2 + y\text{sen}(x) = -y^2 \leq 0$$

Observar que esta función no es estrictamente negativa en ningún entorno de los puntos de equilibrio ya que  $\dot{V}(x, 0) = 0$ . Esto tiene sentido físico. La pérdida de energía en este sistema se da por el

rozamiento, el cual existe cuando el péndulo está en movimiento. Sin embargo, cuando el péndulo tiene velocidad cero no hay rozamiento y por lo tanto no hay pérdida de energía. Por Liapunov 1 esta función nos permite deducir que los puntos de equilibrio  $(2k\pi, 0)$  son estables pero no asintóticamente estables.

### Linealización

Ahora estudiaremos el problema linealizado.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_f(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad J_f((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $J_f(2k\pi, 0)$  tiene valores propios  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  por lo que los puntos de equilibrio  $(2k\pi, 0)$  son asintóticamente estables. La matriz  $J_f((2k+1)\pi, 0)$  tiene valores propios  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , lo que deja un valor propio positivo y otro negativo. Como consecuencia del Teorema de Grossman-Hartman ?? estos puntos deberán ser inestables.

En este ejemplo, vemos que por más de que la función que utilizamos para el teorema del Liapunov en los puntos  $(2k\pi, 0)$  no nos permitió afirmar que los mismos sean asintóticamente estables, no implica que no lo sea.