

Tópicos especiales y aplicaciones

Germán Capdehourat, Sergio Martínez, Pablo Musé
{gcapde, sematag, pmuse}@fing.edu.uy

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

7 de septiembre de 2021

Teoría de la detección

Filtro apareado

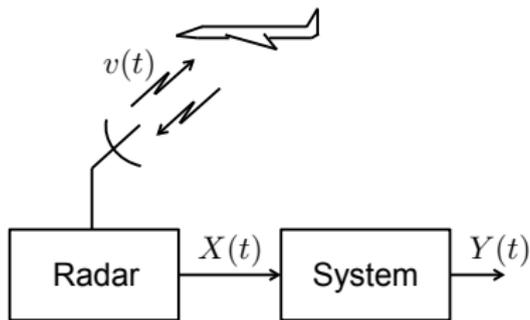
Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

Teoría de la estimación

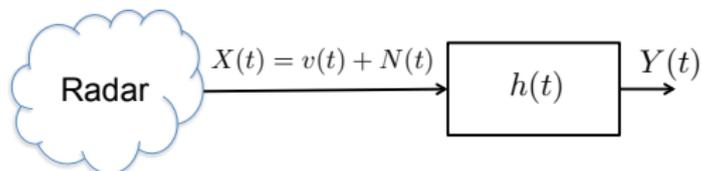
Filtro de Wiener

Aplicación: Restauración de Imágenes

Modelo simple de radar



- ▶ El controlador aéreo envía un pulso de radar conocido $v(t)$
- ▶ Ningún avión en el rango del radar \Rightarrow La salida del radar $X(t) = N(t)$ es ruido
 - \Rightarrow El ruido es WSS de media nula $N(t)$, con PSD $S_N(f)$
- ▶ Avión en el rango del radar \Rightarrow Pulso reflejado: $X(t) = v(t) + N(t)$
- ▶ Q: Cómo decidir si es $X(t) = v(t) + N(t)$ o $X(t) = N(t)$?



- ▶ Se filtra la salida del radar $X(t)$ con un sistema LTI con $h(t)$:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)[v(s) + N(s)]ds = v_0(t) + N_0(t)$$

- ▶ Componentes de señal filtrada (pulso del radar) y de ruido

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)v(s)ds, \quad N_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)N(s)ds$$

- ▶ Objetivo: diseñar el filtro para maximizar la **SNR** en t_0

$$SNR = \frac{v_0^2(t_0)}{\mathbb{E}[N_0^2(t_0)]}$$

Componentes de señal y de ruido filtradas

- ▶ La potencia del ruido filtrado $\mathbb{E} [N_0^2(t_0)]$ está dada por

$$\mathbb{E} [N_0^2(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{N_0}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(f)|^2 S_N(f) df$$

- ▶ Si $\hat{v}(f) = \mathcal{F}(v(t))$, el pulso del radar filtrado, en $t = t_0$ es

$$v_0(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \hat{v}(f) e^{j2\pi f t_0} df$$

- ▶ Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{S_N(f)}$, y conjugando

$$\begin{aligned} v_0(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \sqrt{S_N(f)} \frac{\hat{v}(f) e^{j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_N(f)}} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \sqrt{S_N(f)} \left[\frac{\hat{v}^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_N(f)}} \right]^* df \end{aligned}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

- ▶ la desigualdad de **Cauchy-Schwarz** para funciones complejas f y g es

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$$

⇒ La igualdad vale si y solo si $f(t) = \alpha g(t)$

- ▶ Recordemos la componente de señal filtrada en $t = t_0$

$$v_0(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \sqrt{S_N(f)} \left[\frac{\hat{v}^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_N(f)}} \right]^* df$$

- ▶ Usando Cauchy-Schwarz obtenemos la cota superior

$$|v_0(t_0)|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(f)|^2 S_N(f) df \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{v}(f)|^2}{S_N(f)} df$$

- ▶ Como $\mathbb{E} [N_0^2(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(f)|^2 S_N(f) df$, podemos acotar la SNR como sigue:

$$SNR = \frac{|v_0(t_0)|^2}{\mathbb{E} [N_0^2(t_0)]} \leq \frac{\mathbb{E} [N_0^2(t_0)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{v}(f)|^2}{S_N(f)} df}{\mathbb{E} [N_0^2(t_0)]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{v}(f)|^2}{S_N(f)} df$$

- ▶ La **SNR máxima** se alcanza cuando

$$\hat{h}(f) \sqrt{S_N(f)} = \alpha \frac{\hat{v}^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_N(f)}}$$

- ▶ El **filtro apareado** buscado tiene respuesta en frecuencia

$$\hat{h}(f) = \alpha \frac{\hat{v}^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{S_N(f)}$$

$\Rightarrow \hat{h}(f)$ “apareado” al pulso de radar y a la PSD del ruido

Ejemplo: filtro apareado para ruido blanco

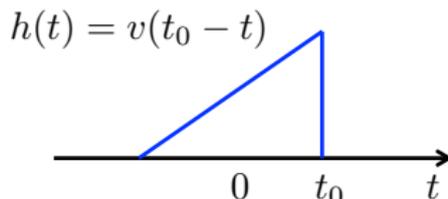
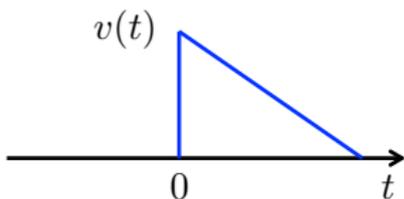
Ej: Supongamos $N(t)$ ruido blanco, con PSD $S_N(f) = \sigma^2$. Sea $\alpha = \sigma^2$

- ▶ La respuesta en frecuencia del filtro apareado se reduce a

$$\hat{h}(f) = \hat{v}^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

- ▶ La inversa de Fourier de $\hat{h}(f)$ da su respuesta al impulso

$$h(t) = v(t_0 - t)$$



- ▶ Es una versión del pulso $v(t)$ **invertida en tiempo** y **trasladada**

Análisis de la salida del filtro apareado

- ▶ La PSD del ruido filtrado es $S_{N_0}(f) = |\hat{h}(f)|^2 S_N(f)$. Para el filtro apareado

$$S_{N_0}(f) = \frac{|\alpha \hat{v}(f)|^2}{S_N^2(f)} S_N(f) = \frac{|\alpha \hat{v}(f)|^2}{S_N(f)}$$

- ▶ La Transformada de Fourier inversa da la autocorrelación de $N_0(t)$

$$R_{N_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha \hat{v}(f)|^2}{S_N(f)} e^{j2\pi f \tau} df$$

- ▶ La señal a la salida del filtro apareado es

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(f) \hat{v}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha |\hat{v}(f)|^2}{S_N(f)} e^{j2\pi f (t-t_0)} df$$

- ▶ Las últimas dos ecuaciones implican que $v_0(t) = (1/\alpha) R_{N_0}(t - t_0)$
⇒ Salida del filtro apareado \propto autocorrelación trasladada

Teoría de la detección

Filtro apareado

Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

Teoría de la estimación

Filtro de Wiener

Aplicación: Restauración de Imágenes

- ▶ Transmitimos una secuencia de bits $\{b_0, b_1, \dots\}$ por un canal de comunicación utilizando una señal PAM binaria con pulso conformador $v(t)$ de duración T . Asumiremos sincronismo perfecto entre transmisor y receptor:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n v(t - nT),$$

donde Z_n codifica cada bit con valores $\{a_0, a_1\}$, con $a_0 < a_1$.

- ▶ Supondremos que la probabilidad de haber enviado un $b_n = 0$ es p :

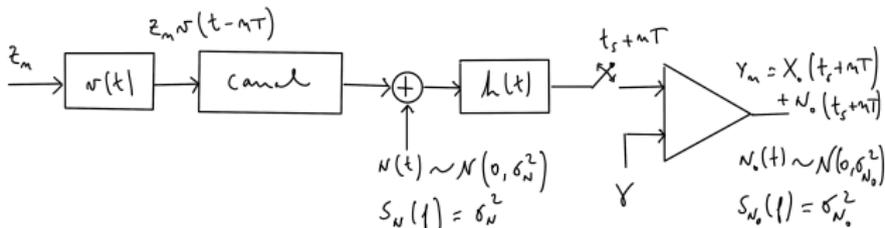
$$\Pr[Z_n = a_0] = p, \quad P(Z_n = a_1) = 1 - p.$$

Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

Asumimos un **modelo de canal simple**, que no distorsiona la señal e introduce un **ruido $N(t)$ aditivo, blanco, gaussiano** de varianza σ_N^2 :

▶ $S_N(f) = \sigma_N^2$

▶ $f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_N^2}\right) dx$.



- ▶ En recepción: **$h(t)$ filtro apareado** (maximiza la SNR a su salida).
- ▶ **Se muestrea** la salida en el instante óptimo, y **se compara con un umbral γ** para inferir si se mandó $b_n = 0$ o $b_n = 1$.

Filtro apareado:

$$\hat{h}(f) = \alpha \frac{\hat{v}^*(f)e^{-j2\pi ft_s}}{S_N(f)} = \alpha \frac{\hat{v}^*(f)e^{-j2\pi ft_s}}{\sigma_N^2} = \hat{v}^*(f)e^{-j2\pi ft_s}$$
$$\longleftrightarrow h(t) = v(t_s - t), \quad \text{con } 0 \leq t_s < T$$

Sampler: toma muestras en los tiempos $t_s + nT$, con $0 \leq t_s < T$:

$$Y_n := Y(t_s + nT) = X_0(t_s + nT) + N_0(t_s + nT)$$

con

$$X_0(t_s + nT) = h * X(t_s + nT) = Z_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)v(t_s - u)du = Z_n \|v\|_2^2$$

$$N_0(t_s + nT) = h * N(t_s + nT).$$

A la salida del *sampler* obtenemos:

- Muestras de señal contaminada con ruido:

$$Y_n = Y(t_s + nT) = \begin{cases} \bar{a}_0 + N_0(t_s + nT) & \text{si } b_n = 0 \\ \bar{a}_1 + N_0(t_s + nT) & \text{si } b_n = 1, \end{cases}$$

con $\bar{a}_0 = a_0 \|v\|_2^2$, y $\bar{a}_1 = a_1 \|v\|_2^2$.

- Potencias de señal y de ruido

$$E_b := \mathbb{E} [X_0^2(t_s + nT)] = \mathbb{E} [|Z_n \|v\|_2^2|^2] = p\bar{a}_0^2 + (1-p)\bar{a}_1^2$$

$$\sigma_{N_0}^2 := \mathbb{E} [N_0^2(t_s + nT)] = \sigma_N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(f)|^2 df = \sigma_N^2 \|v\|_2^2.$$

Luego,

$$SNR = \frac{E_b}{\sigma_{N_0}^2} = \frac{p\bar{a}_0^2 + (1-p)\bar{a}_1^2}{\sigma_{N_0}^2}.$$

El receptor debe decidir entre dos hipótesis:

$$H_0 : \text{el transmisor envió } b_n = 0; \quad H_1 : \text{el transmisor envió } b_n = 1$$

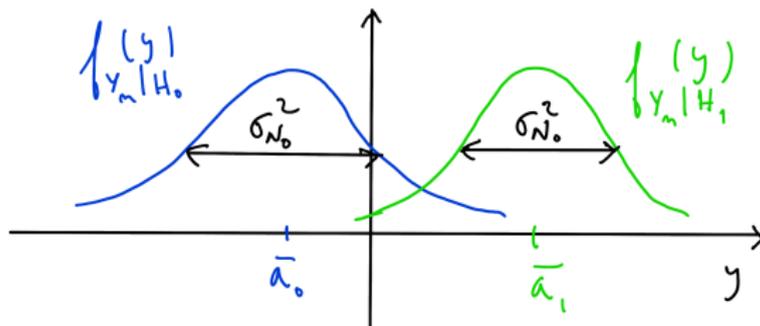
Para decidir, se considera un umbral γ y se toma como regla:

$$\text{Si } Y_n \begin{cases} < \gamma \\ > \gamma \end{cases} \text{ decido } \begin{cases} H_0 \\ H_1 \end{cases}.$$

Error al recibir Y_n : decidir H_1 si fue H_0 , y decidir H_0 si fue H_1 :

$$P_e(\gamma) = \Pr[\text{error}|Y_n] \Pr[Y_n]$$
$$\stackrel{\text{Bayes}}{=} \Pr[Y_n > \gamma|H_0] \Pr[H_0] + \Pr[Y_n < \gamma|H_1] \Pr[H_1]$$

Tenemos: $Y_n|H_0 \sim \mathcal{N}(\bar{a}_0, \sigma_{N_0}^2)$, $Y_n|H_1 \sim \mathcal{N}(\bar{a}_1, \sigma_{N_0}^2)$.



Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

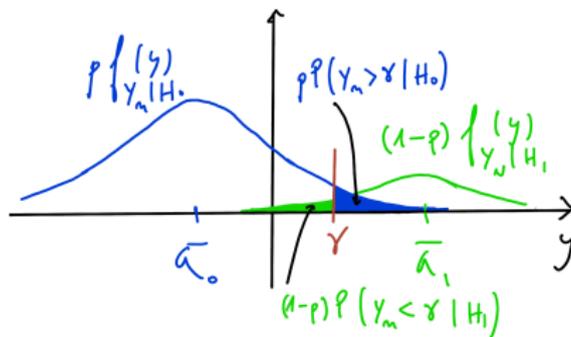
Probabilidad de error de recepción

Introduciendo $Q(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ ($Q(-\gamma) = 1 - Q(\gamma)$):

$$\Pr[Y_n > \gamma | H_0] = Q\left(\frac{\gamma - \bar{a}_0}{\sigma_{N_0}}\right) \quad \left(\text{c.v. } x = \frac{y - \bar{a}_0}{\sigma_{N_0}}\right)$$

$$\Pr[Y_n < \gamma | H_1] = 1 - Q\left(\frac{\gamma - \bar{a}_1}{\sigma_{N_0}}\right) = Q\left(\frac{\bar{a}_1 - \gamma}{\sigma_{N_0}}\right).$$

$$P_e(\gamma) = pQ\left(\frac{\gamma - \bar{a}_0}{\sigma_{N_0}}\right) + (1-p)Q\left(\frac{\bar{a}_1 - \gamma}{\sigma_{N_0}}\right)$$



El umbral óptimo γ_{opt} es aquél que minimiza $P_e(\gamma)$:

$$\frac{dP_e}{d\gamma} = \frac{p}{\sigma_{N_0}} \frac{dQ}{d\gamma} \left(\frac{\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_0}{\sigma_{N_0}} \right) - \frac{1-p}{\sigma_{N_0}} \frac{dQ}{d\gamma} \left(\frac{\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_0}{\sigma_{N_0}} \right) = 0.$$

$$\stackrel{\text{Leibniz}}{\Leftrightarrow} -\frac{p}{\sigma_{N_0} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_0)^2}{2\sigma_{N_0}^2}\right) + \frac{1-p}{\sigma_{N_0} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_1)^2}{2\sigma_{N_0}^2}\right) = 0$$

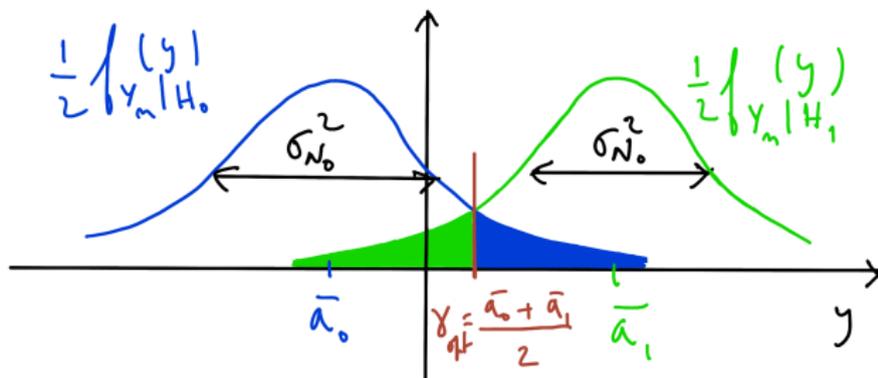
$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{(\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_0)^2}{2\sigma_{N_0}^2} + \frac{(\gamma_{\text{opt}} - \bar{a}_1)^2}{2\sigma_{N_0}^2}\right) = \frac{1-p}{p}.$$

Obtenemos

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1}{2} + \frac{\sigma_{N_0}^2}{\bar{a}_1 - \bar{a}_0} \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

- Símbolos equiprobables, $\Pr[Z_n = a_0] = \Pr[Z_n = a_1] = 1/2$:

$$SNR = \frac{\bar{a}_0^2 + \bar{a}_1^2}{2\sigma_{N_0}^2} \quad \gamma_{\text{opt}} = \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1}{2} \quad P_e = Q\left(\frac{\bar{a}_1 - \bar{a}_0}{2\sigma_{N_0}}\right)$$



- ▶ Símbolos equiprobables y $a_0 = -a_1$:

$$SNR = \frac{\bar{a}_1^2}{\sigma_{N_0}^2} \quad \gamma_{\text{opt}} = 0 \quad P_e = Q\left(\frac{\bar{a}_1}{\sigma_{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right)$$

- ▶ Símbolos equiprobables y $a_0 = 0$:

$$SNR = \frac{\bar{a}_1^2}{2\sigma_{N_0}^2} \quad \gamma_{\text{opt}} = \frac{\bar{a}_1}{2} \quad P_e = Q\left(\frac{\bar{a}_1}{2\sigma_{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{SNR}{2}}\right)$$

Teoría de la detección

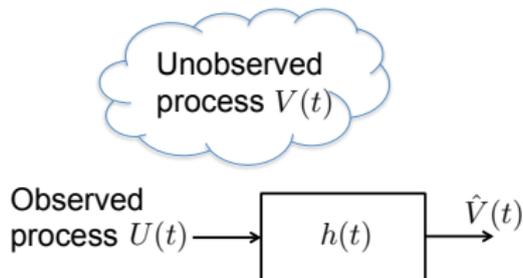
Filtro apareado

Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

Teoría de la estimación

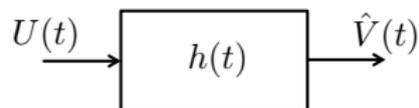
Filtro de Wiener

Aplicación: Restauración de Imágenes



- ▶ Estimar el proceso no observado $V(t)$ a partir del proceso $U(t)$ **correlacionado** con $V(t)$
 - ⇒ $U(t)$ y $V(t)$ de media nula
 - ⇒ Las PSDs $S_U(f)$ y $S_{VU}(f)$ son conocidas
- Ej: Puede ser $U(t) = V(t) + W(t)$, con $W(t)$ un ruido blanco
- ▶ Nos restringiremos a **estimadores lineales**

$$\hat{V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)U(t-s)ds$$



- **Objetivo:** minimizar el error cuadrático medio (MSE),

$$\min_h \mathbb{E} \left[|V(t) - \hat{V}(t)|^2 \right], \quad \text{con } \hat{V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)U(t-s)ds$$

- Sea $\tilde{h}(t)$ una respuesta al impulso **cualquiera** tal que

$$\tilde{V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s)U(t-s)ds$$

⇒ La optimalidad del filtro $h(t)$ en el sentido MSE significa que

$$\mathbb{E} \left[|V(t) - \hat{V}(t)|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[|V(t) - \tilde{V}(t)|^2 \right]$$

Teorema

Si para todo filtro lineal $\tilde{h}(t)$ se verifica que

$$\mathbb{E} \left[(V(t) - \hat{V}(t)) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s) U(t-s) ds \right] = 0$$

entonces $h(t)$ es óptimo en sentido MSE.

- ▶ **Ppio de ortogonalidad:** caracterización implícita del filtro óptimo $h(t)$
- ▶ Se debe cumplir para todo \tilde{h} , en particular para $h - \tilde{h}$, lo que implica:

$$\mathbb{E} \left[(V(t) - \hat{V}(t)) (\hat{V}(t) - \tilde{V}(t)) \right] = 0$$

⇒ Recordemos esta identidad, que usaremos enseguida

Demostración.

- ▶ El MSE para un filtro arbitrario $\tilde{h}(t)$ se escribe

$$\mathbb{E} [|V(t) - \tilde{V}(t)|^2] = \mathbb{E} [|V(t) - \hat{V}(t) + (\hat{V}(t) - \tilde{V}(t))|^2]$$

- ▶ Desarrollando los cuadrados, usando linealidad de la esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|V(t) - \tilde{V}(t)|^2] &= \mathbb{E} [|V(t) - \hat{V}(t)|^2] + \mathbb{E} [|\hat{V}(t) - \tilde{V}(t)|^2] \\ &\quad + 2\mathbb{E} [(V(t) - \hat{V}(t))(\hat{V}(t) - \tilde{V}(t))] \end{aligned}$$

- ▶ Como $\mathbb{E} [(V(t) - \hat{V}(t))(\hat{V}(t) - \tilde{V}(t))] = 0$ por hipótesis, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|V(t) - \tilde{V}(t)|^2] &= \mathbb{E} [|V(t) - \hat{V}(t)|^2] + \mathbb{E} [|\hat{V}(t) - \tilde{V}(t)|^2] \\ &\geq \mathbb{E} [|V(t) - \hat{V}(t)|^2] \end{aligned}$$



Filtro óptimo mediante principio de ortogonalidad

- ▶ Si $h(t)$ es óptimo, para cualquier $\tilde{h}(t)$ el **ppio de ortogonalidad** implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} \left[(V(t) - \hat{V}(t)) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s) U(t-s) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s) (V(t) - \hat{V}(t)) U(t-s) ds \right] \end{aligned}$$

- ▶ Intercambiando el orden de la esperanza y la integral, como $\tilde{h}(t)$ es determinística

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s) \mathbb{E} \left[(V(t) - \hat{V}(t)) U(t-s) \right] ds = 0$$

- ▶ Recordando la def. de las correlaciones cruzadas $R_{VU}(s)$ y $R_{\hat{V}U}(s)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s) (R_{VU}(s) - R_{\hat{V}U}(s)) ds = 0$$

Condición sobre las correlaciones cruzadas

- ▶ Para $\tilde{h}(t)$ arbitraria, el **principio de ortogonalidad** requiere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(s)(R_{VU}(s) - R_{\hat{V}U}(s))ds = 0$$

- ▶ En particular, si tomamos $\tilde{h}(t) = R_{VU}(t) - R_{\hat{V}U}(t)$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (R_{VU}(s) - R_{\hat{V}U}(s))^2 ds = 0$$

⇒ La integral se anula si y solo si $R_{VU}(s) = R_{\hat{V}U}(s)$

- ▶ En el óptimo, las correlaciones cruzadas $R_{VU}(s)$ y $R_{\hat{V}U}(s)$ coinciden
⇒ Razonable: MSE es una función de costo de segundo orden

- ▶ El filtro óptimo genera estimaciones $\hat{V}(t)$ para las cuales $R_{VU}(s) = R_{\hat{V}U}(s)$
- ▶ Como $\hat{V}(t)$ es la salida de un sistema LTI $h(t)$, con entrada $U(t)$

$$R_{\hat{V}U}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)R_U(s-t)dt = h(s) * R_U(s)$$

- ▶ Tomando transformadas de Fourier

$$S_{\hat{V}U}(f) = \hat{h}(f)S_U(f) = S_{VU}(f)$$

⇒ El **filtro óptimo de Wiener** tiene respuesta en frecuencia

$$\hat{h}(f) = \frac{S_{VU}(f)}{S_U(f)}$$

Teoría de la detección

Filtro apareado

Aplicación: Sistema básico de comunicación digital

Teoría de la estimación

Filtro de Wiener

Aplicación: Restauración de Imágenes

Estudiaremos el problema de **estimar una imagen $V(x, y)$ a partir de una versión degradada**

$$U(x, y) = (g * V)(x, y) + N(x, y),$$

con:

- ▶ g un núcleo de convolución conocido
- ▶ N un ruido de media nula, independiente de V .

<http://www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect3.pdf>

Ejercicio: Probar que

$$H(f_x, f_y) = \frac{G^*(f_x, f_y)}{|G(f_x, f_y)|^2 + \frac{S_N(f_x, f_y)}{S_V(f_x, f_y)}}.$$



J. A. Gubner

Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers.

Cambridge University Press, 2006 (Chap. 10, §10.7, §10.8).



S. Haykin and M. Moher

Introduction to Analog & Digital Communications, 2nd. Ed.

Wiley, 2018 (Chap. 10, §10.3).



A. Zisserman

Curso *Image Analysis*, Oxford University, 2014. Lecture 3: *Image Restoration*.

<http://www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect3.pdf>