Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 4

Muestreo de procesos, PAM, ruido de cuantificación.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

★ Ejercicio 1

En muchas aplicaciones aparecen señales de tiempo discreto de naturaleza aleatoria debido al muestreo periódico de señales aleatorias de tiempo continuo. En este problema nos ocuparemos de obtener un **teorema de muestreo para señales aleatorias**. Considerar un proceso estocástico de tiempo continuo, estacionario, definido por las variables aleatorias $\{X_t\}$ donde t es una variable continua. La función de autocorrelación se define como

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}^*]$$

y la densidad espectral de potencia como

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Un proceso estocástico de tiempo discreto obtenido mediante muestreo periódico está definido por el conjunto de variables aleatorias $\{Y_n\}$ donde $Y_n = X_{nT}$ y T es el período de muestreo.

(a) ¿Cuál es la relación entre $R_Y(n)$ y $R_X(\tau)$?

(b) Expresar la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto en función de la densidad espectral de potencia del proceso de tiempo continuo.

(c) ¿Bajo qué condición la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto es una representación **fiel** de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo?

★ Ejercicio 2

Considerar un proceso aleatorio en tiempo continuo X_t, con densidad espectral de potencia $S_X(f) = \Pi(f/2f_0)$. Suponer que se muestrea X_t, resultando la secuencia de variables aleatorias $Y_n = X_{nT}$.

(a) ¿Cuál es la autocorrelación del proceso en tiempo discreto?

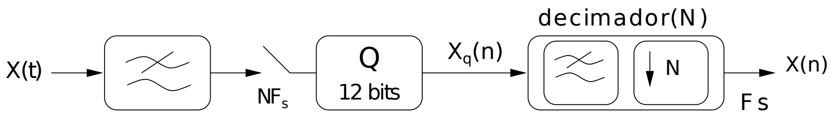
(b) ¿Cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco, es decir para que la densidad espectral de potencia sea constante para todo θ?

(c) Si la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo es ahora $S_X(f) = \Lambda(f/f_0)$, ¿cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(d) ¿Qué requerimiento general debe cumplir el proceso continuo y el período de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

✸ Ejercicio 3

La señal X_t es de banda limitada $f_s/2$ y es tal que, al utilizar el cuantizador Q de 12 bits de resolución, se cumple el modelo de cuantización como ruido blanco aditivo.



(a) Dar los espectros de señal y ruido en todos los puntos del sistema.

(b) Calcular el valor de N que resulte en el sistema menos complejo posible, y con una relación señal a ruido de cuantización en X_n no menor que si se hubiese usado únicamente un cuantizador de 16 bits luego del muestreo.

Si se utiliza un valor de N muy elevado, deja de valer el modelo de ruido aditivo blanco.

(c) Explicar por qué sucede esto, y cuáles de las hipótesis del modelo dejarían de valer.

Una forma de evitar este problema consiste en sumar a la señal muestreada, antes del cuantizador, un proceso R_n independiente de la señal.

(d) Indicar cómo esta señal agregada puede volver válida la hipótesis perdida.

(e) Dar aproximadamente la potencia necesaria de este proceso, y su espectro para que X_n no sea afectada por R_n.

⋆ Ejercicio 4

Considerar una señal aleatoria binaria con valores 0 y 1 equiprobables, independientes entre sí. Ésta se codifica en forma polar ('0' se codifica con $-A$ y '1' con A) donde a los pulsos se les da la siguiente forma:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{T_b}) & |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

T_b es el tiempo de un bit.

(a) Bosquejar un ejemplo de la onda conformada.

(b) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal. Bosquejar.

⁕ Ejercicio 5

Se quiere trasmitir una secuencia X_k binaria, donde los 1 tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y se les asigna el valor A y los 0 tienen probabilidad $\frac{2}{3}$ y se les asigna el valor $-A$, y son independientes entre sí. La secuencia se quiere trasmitir a una cadencia de $r = \frac{1}{T}\ bits/s$. Para adecuar la señal al canal se quiere utilizar un código de línea apropiado.

Figura 1: Código de línea

(a) Hallar y graficar la autocorrelación de la secuencia de entrada y su densidad de potencia.

Para que el proceso Y_t sea estacionario se considera que el pulso de conformación se encuentra retardado un tiempo t_d respecto al origen de la secuencia, con t_d uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T]$.

(b) Hallar la densidad espectral de potencia de Y_t.

(c) En particular hallar y graficar para el caso en que:

1. El conformador saca pulsos rectangulares de ancho T
2. Idem pero en este caso los pulsos $p(t)$ tienen la forma de la Figura 2.

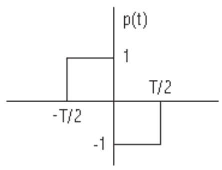


Figura 2: Forma de los pulsos.

(d) Comparar ambos espectros, ventajas y desventajas.

(e) Indicar qué pasa con el espectro de la señal de salida cuando se cambia la forma de pulso del conformador. Dar criterios para la elección de dicho pulso.

Solución

Ejercicio 1

(a)

$$R_Y(n) = \mathrm{E}[Y_m Y_{m+n}] = \mathrm{E}[X_{mT} X_{(m+n)T}] = R_X(nT)$$

(b) Podemos conisderar $R_X(\tau)$ como una señal de tiempo continuo, donde $R_Y(n)$, como vimos corresponde al muestreo de esta señal a una frecuencia $\frac{1}{T}$. Ahora podemos utilizar el resultado conocido para señales, obteniendo:

$$S_Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X\left(\frac{\theta}{2\pi T} - \frac{k}{T}\right)$$

(c) La densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto es una representación **fiel** de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo si la frecuencia de muestreo es mayor o igual al doble del ancho de banda del proceso en tiempo continuo.

Ejercicio 2

(a) La autocorrelación del proceso Y_n es:

$$R_Y(n,m) = \mathrm{E}[Y_n Y_m] = \mathrm{E}[X_{nT} X_{mT}]$$

En la letra se da la densidad espectral de potecia, la que puede existir sólo si el proceso es estacionario en sentido amplio. Entonces:

$$R_Y(n,m) = R_X(nT, mT) = R_X((n-m)T)$$

Por lo tanto el proceso en tiempo discreto también es estacionario en sentido amplio, y entonces tenemos:

$$R_Y(n) = R_X(nT)$$

(b) Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo.

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Pi(\frac{f}{2f_0})\} = 2f_0 sinc(2f_0 t) = \frac{2f_0 \sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$$

Entonces:

$$R_Y(n) = R_X(nT) = \frac{\sin(2\pi f_0 nT)}{\pi nT}$$

Para que sea ruido blanco, debe cumplirse que: $R_Y(n) = A\delta(n)$, es decir que $R_Y(n) = 0$ si $n \neq 0$, entonces hay que encontrar los valores de T para los que

$$\forall n \neq 0, \exists l \in \mathbb{Z} / 2\pi f_0 nT = l\pi$$

entonces

$$2f_0 nT \in Z, \forall n$$

Finalmente T es de la forma:

$$T = \frac{m}{2f_0}, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

(c) Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo.

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Lambda(\frac{f}{f_0})\} = f_0 sinc^2(f_0 t) = f_0 \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0^2 t^2} = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0 t^2}$$

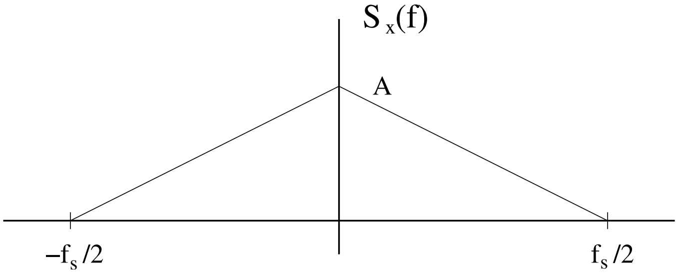
Razonando en forma análoga que en la parte anterior:

$$T = \frac{m}{f_0}, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

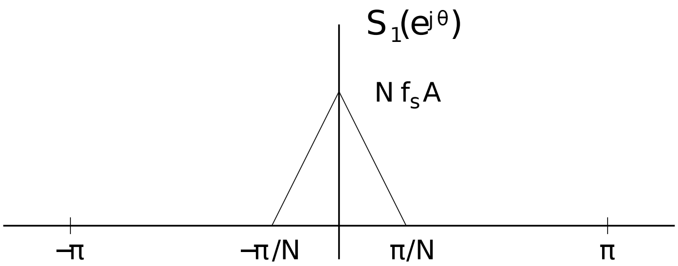
(d) El proceso en tiempo continuo debe ser estacionario en sentido amplio, tener una autocorrelación no nula en cero (es decir no ser la señal nula), y anularse en puntos de la forma nT, para algún T y todo $n \neq 0$. El período de muestreo debe ser cualquiera de los T que cumplen la condición anterior.

Ejercicio 3

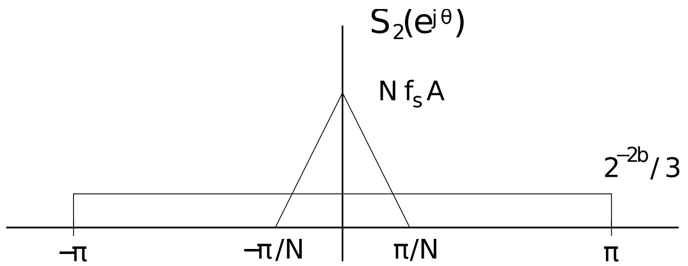
(a) En este ejercicio hay señales y ruido. El ruido debemos trabajarlo como proceso estocástico. No sabemos si la señal es un proceso estocástico o no, pero para poder trabajar a la vez con la señal y con ruido debemos considerarlo como uno. (Tiene poco sentido graficar a la vez transformadas de Fourier de una señal determinada junto a una densidad espectral de potencia.) Por lo tanto todos los espectros que dibujaremos serán densidades espectrales de potencia.
El espectro de la señal lo dibujamos como un triángulo del ancho de banda adecuado para simplificar.



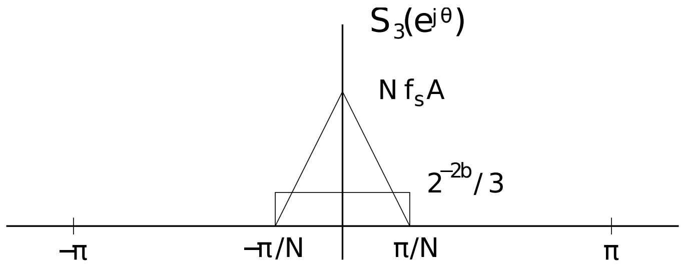
El filtro pasabajos inicial debería tener frecuencia de corte en $f_s/2$ para evitar solapamiento en la señal final del sistema. Como la señal tiene ese ancho de banda no será afectada por este filtro y su espectro será igual.
Luego del muestreo a frecuencia $N\,f_s$ tenemos:



Al cuantizar se suma el ruido de cuantización, de densidad espectral de potencia constante y altura $\frac{\Delta^2}{12} = 2^{-2b}/3$.



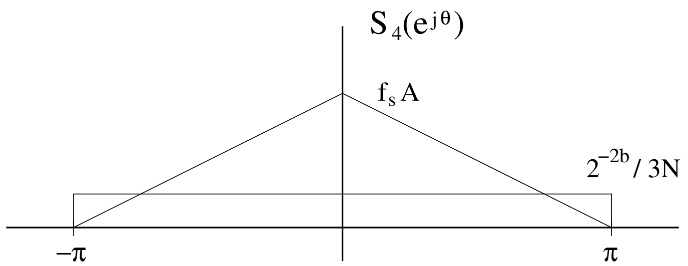
El filtro anterior al decimador debe tener frecuencia de corte $\theta_c = \pi/N$ para evitar el solapamiento y ganacia 1. Luego del filtro y antes del decimador tenemos:



Si un proceso $u[n]$ entra a un decimador de parámetro N, obenemos el proceso $v[n] = u[n\,N]$. Su autocorrelación es

$$R_v[n_1, n_2] = E\{v[n_1]v[n_2]\} = E\{u[n_1\,N]u[n_2\,N]\} = R_u[(n_2 - n_1)N],$$

con lo que v es estacionario, y su autocorrelación es $R_v[n] = R_u[n\,N]$. Como $R_v[n]$ es una secuencia determinística sabemos que luego del decimador su espectro será



(b) La potencia de la señal la llamamos S_x y la potencia del ruido la obtenemos integrando:

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^{-2b}}{3N} d\theta = \frac{1}{3 \cdot N \cdot 2^{2b}}$$

y la relación señal a ruido es:

$$\mathrm{SNR} = S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2b}.$$

Usar 16 bits sin decimación equivale a usar $b = 16$ y$N = 1$, mientras que en el sistema propuesto $b = 12$ y debemos determinar N. Debemos cumplir que

$$S_x \cdot 3 \cdot N \cdot 2^{2\cdot 12} \geq S_x \cdot 3 \cdot 2^{2\cdot 16},$$

que implica $N \geq 256$. El sistema menos complejo será el de menor N, por lo tanto

$$N = 256.$$

Es necesario notar que para lograr esta mejora, luego del decimador, la representación numérica debe ser mejor que la del muestreo. Si estuvieramos restringidos a una representación de 12 bits, eso sería equivalente a poner otro cuantizador y tendríamos el mismo ruido que antes.

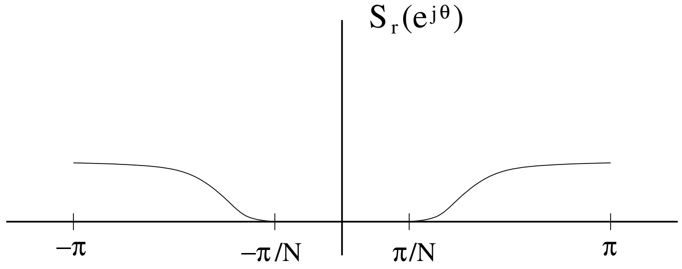
(c) Al crecer N, el ancho de banda de X_t baja con respecto a $N\,f_s$. Esto hace que las muestras sean cada vez más correlacionadas, hasta que la variación entre muestras sucesivas se hace muy pequeña. Ya no vale que la señal varíe muchos pasos de cuantización entre muestras sucesivas, y entonces el error dejará de ser blanco.

(d) Si R_n es una señal compleja, con variaciones suficientes como para hacer válido el modelo de ruido, $R_n + X_n$ tambien lo será.

(e) La variación debe ser mayor a Δ, por lo que

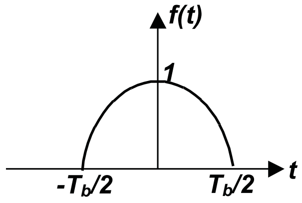
$$\sigma_r^2 \gg \frac{\Delta^2}{12}.$$

Para quue los efectos de R_n desaparezcan, el espectro de R_n se debe concentrar en la banda eliminada por el decimador, es decir, en el rango $[-\pi, -\pi/N]$ y $[\pi/N, \pi]$. A su vez, debe ser de banda ancha para asegurara la complejidad, por lo tanto su espectro debe tener forma similar a:

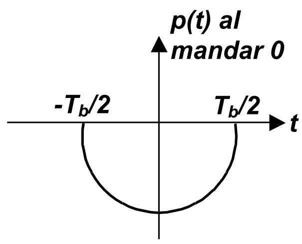


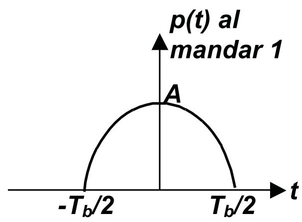
Ejercicio 4

(a) Primero que nada, graficamos $f(t)$. Esto se muestra en la siguiente figura.

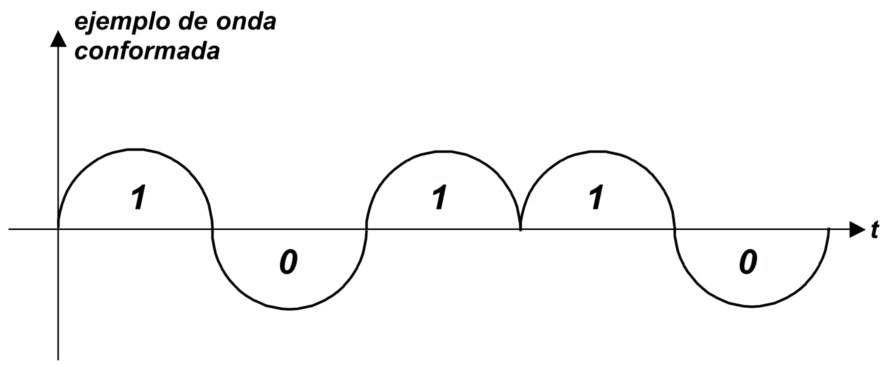


Luego, como se usa codificación polar, se tiene que el 0 se envía con amplitud $-A$, mientras el 1 se envía con amplitud A. La forma que tiene el pulso que representará el 0 y el 1 se muestran en las siguientes figuras.





Finalmente, un ejemplo de la onda conformada, es decir, la forma de la onda al mandar una cierta secuencia de 0's y 1's (en este caso se usó 10110), se muestra en la siguiente figura.



(b) Dado que X_t es una señal PAM, sabemos que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_a^2 |P(f)|^2}{T_b} + \frac{m_a^2}{T_b^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T_b}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

Calculamos la media de la señal, m_a, y su varianza, σ_a^2:

$$m_a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) = 0$$

$$\sigma_a^2 = R_{a_k}(0) - m_a^2 = R_{a_k}(0) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(-A)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow S_X(f) = \frac{A^2|P(f)|^2}{T_b}$$

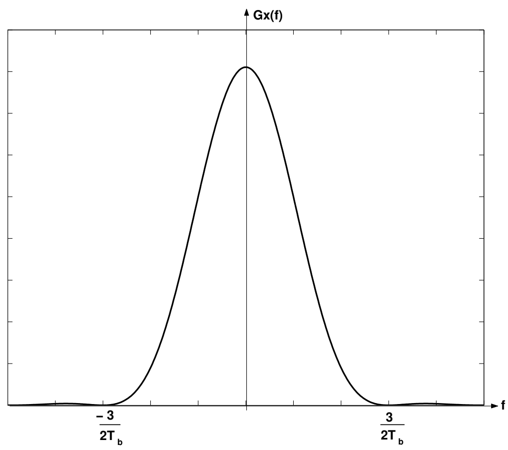
Como $p(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right).\Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$, se cumple que:

$$\begin{aligned} P(f) &= \left[\frac{\delta(f-1/2T_b)+\delta(f+1/2T_b)}{2}\right] * T_b.sinc(fT_b) \\ &= \frac{T_b}{2}\left[sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right] \end{aligned}$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de X_t queda:

$$S_X(f) = \frac{A^2T_b\left|sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right|^2}{4}$$

La siguiente figura muestra un bosquejo de la forma de $S_X(f)$.



Ejercicio 5

(a) Planteamos el cálculo de la autocorrelación:

- $n \neq m$

$$R_X[n,m] = \mathbb{E}\{X_nX_m\} = \mathbb{E}\{X_n\}\mathbb{E}\{X_m\} = m_X^2 = \left(\frac{A}{3}+\frac{-2A}{3}\right)^2 = \frac{A^2}{9}$$

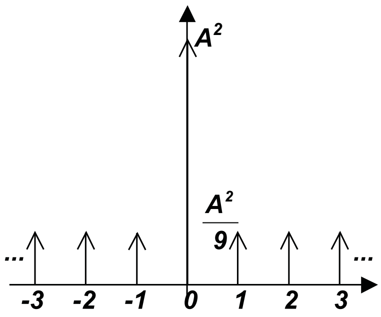
- $n = m$

$$R_X[n,n] = \mathbb{E}\left\{X_n^2\right\} = \frac{A^2}{3}+\frac{2(-A)^2}{3} = A^2$$

Entonces:

$$R_X[n] = A^2\delta[n] + \sum_{k\neq 0}\frac{A^2}{9}\delta[n-k]$$

La forma de la autocorrelación se muestra en la siguiente figura.



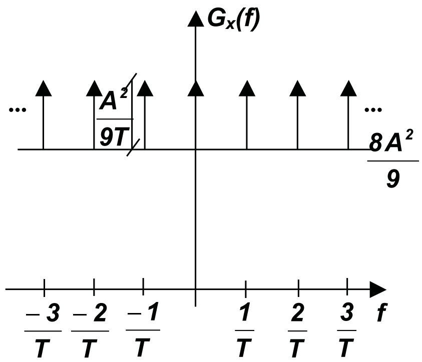
Para hallar la densidad espectral de potencia de X_t, escribimos la autocorrelación en la forma:

$$R_X[n] = \frac{8A^2}{9}\delta[n] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{9}\delta[n-k]$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta igualdad, se obtiene la densidad espectral de potencia $S_X(f)$:

$$S_X(f) = \frac{8A^2}{9} + \frac{A^2}{9T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$$

Su forma se muestra en la siguiente figura.



(b)

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k p(t - kT - t_d)$$

Como Y_t es una señal PAM, se sabe que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$S_Y(f) = \frac{\sigma_x^2 |P(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Calculamos la media y la varianza de X:

$$m_X = \frac{A}{3} + \frac{-2A}{3} = -\frac{A}{3}$$

$$\sigma_X^2 = R_X[0] - m_X = \frac{8A^2}{9}$$

Entonces:

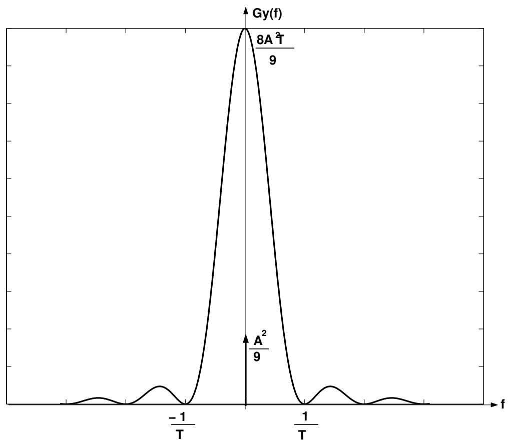
$$S_Y(f) = \frac{8A^2|P(f)|^2}{9T} + \frac{A^2}{9T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

(c)

1. En este caso, $p(t) = \Pi(t/T) \Rightarrow P(f) = Tsinc(fT)$.
   Como $P(k/T) = 0\ \forall k \neq 0$ y $P(0) = T$, se tiene que:

   $$S_Y(f) = \frac{8A^2}{9}T^2 sinc^2(fT) + \frac{A^2}{9}\delta(0)$$

   La gráfica de $S_Y(f)$ se muestra en la siguiente figura.



2. En este caso, $p(t) = \Pi\left(\frac{t+T/4}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right)$.

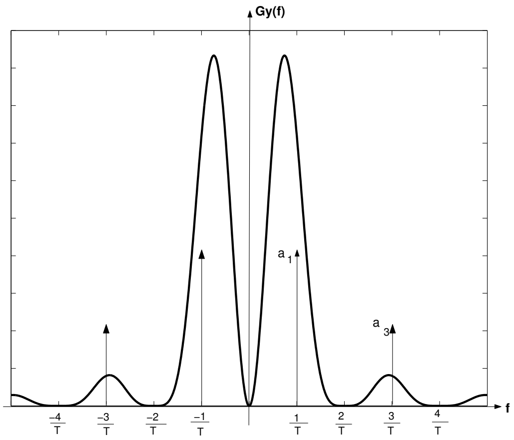
   Luego:

$$\begin{aligned}
P(f) &= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)e^{j2\pi f\frac{T}{4}} - \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} \\
&= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)\left(e^{j2\pi f\frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}\right) \\
&= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) \\
&= jTsinc\left(\frac{fT}{2}\right)\sin\left(2\pi\frac{T}{4}f\right)
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $|P(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT/2)\sin^2(2\pi\frac{T}{4}f)$, y entonces:

$$\begin{aligned} G_y(f) &= \frac{8A^2}{9} T sinc^2\left(\frac{fT}{2}\right)\sin^2\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) + \frac{A^2}{9}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{k}{2}\right)\sin^2\left(\frac{kT}{2}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &= \frac{8A^2}{9} T sinc^2\left(\frac{fT}{2}\right)\sin^2\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) + \frac{A^2}{9}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{2k+1}{2}\right)\delta\left(f - \frac{2k+1}{T}\right) \end{aligned}$$

La gráfica de $G_y(f)$ se muestra en la siguiente figura.



donde $a_k = \frac{A^2}{9} sinc^2(k/2)$, k impar.

(d) La ventaja del primer espectro es que tiene menor ancho de banda. Sin embargo, tiene componente de continua y no envía información de reloj en la propia señal.

Por otra parte, el segundo espectro, si bien tiene un mayor ancho de banda, tiene como ventajas que no tiene componente de continua, y que envía información de reloj en la propia señal.

(e) Dado que al cambiar la forma del pulso conformador $p(t)$ también cambia $P(f)$, como el espectro de la señal conformada (señal PAM) depende de $P(f)$, entonces éste también será alterado.

Para elegir el pulso deben tenerse en cuenta las propiedades deseables de una decodificación, que son:

- que sea adecuada a las propiedades del canal;
- que utilice el menor ancho de banda posible;
- que posea autosincronización (o sea, que se envíe información de reloj en la propia señal);
- que produzca una probabilidad de error lo más pequeña posible en detección.