Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 4

Muestreo de procesos, PAM, ruido de cuantificación.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

★ Ejercicio 1

En muchas aplicaciones aparecen señales de tiempo discreto de naturaleza aleatoria debido al muestreo periódico de señales aleatorias de tiempo continuo. En este problema nos ocuparemos de obtener un **teorema de muestreo para señales aleatorias**. Considerar un proceso estocástico de tiempo continuo, estacionario, definido por las variables aleatorias $\{X_t\}$ donde t es una variable continua. La función de autocorrelación se define como

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}^*]$$

y la densidad espectral de potencia como

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Un proceso estocástico de tiempo discreto obtenido mediante muestreo periódico está definido por el conjunto de variables aleatorias $\{Y_n\}$ donde $Y_n = X_{nT}$ y T es el período de muestreo.

(a) ¿Cuál es la relación entre $R_Y(n)$ y $R_X(\tau)$?

(b) Expresar la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto en función de la densidad espectral de potencia del proceso de tiempo continuo.

(c) ¿Bajo qué condición la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto es una representación **fiel** de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo?

★ Ejercicio 2

Considerar un proceso aleatorio en tiempo continuo X_t, con densidad espectral de potencia $S_X(f) = \Pi(f/2f_0)$. Suponer que se muestrea X_t, resultando la secuencia de variables aleatorias $Y_n = X_{nT}$.

(a) ¿Cuál es la autocorrelación del proceso en tiempo discreto?

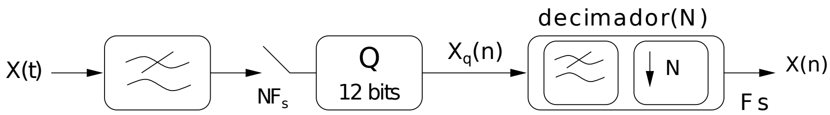
(b) ¿Cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco, es decir para que la densidad espectral de potencia sea constante para todo θ?

(c) Si la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo es ahora $S_X(f) = \Lambda(f/f_0)$, ¿cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(d) ¿Qué requerimiento general debe cumplir el proceso continuo y el período de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

✷ Ejercicio 3

La señal X_t es de banda limitada $f_s/2$ y es tal que, al utilizar el cuantizador Q de 12 bits de resolución, se cumple el modelo de cuantización como ruido blanco aditivo.



(a) Dar los espectros de señal y ruido en todos los puntos del sistema.

(b) Calcular el valor de N que resulte en el sistema menos complejo posible, y con una relación señal a ruido de cuantización en X_n no menor que si se hubiese usado únicamente un cuantizador de 16 bits luego del muestreo.

Si se utiliza un valor de N muy elevado, deja de valer el modelo de ruido aditivo blanco.

(c) Explicar por qué sucede esto, y cuáles de las hipótesis del modelo dejarían de valer.

Una forma de evitar este problema consiste en sumar a la señal muestreada, antes del cuantizador, un proceso R_n independiente de la señal.

(d) Indicar cómo esta señal agregada puede volver válida la hipótesis perdida.

(e) Dar aproximadamente la potencia necesaria de este proceso, y su espectro para que X_n no sea afectada por R_n.

⋆ Ejercicio 4

Considerar una señal aleatoria binaria con valores 0 y 1 equiprobables, independientes entre sí. Ésta se codifica en forma polar ('0' se codifica con $-A$ y '1' con A) donde a los pulsos se les da la siguiente forma:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{T_b}) & |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

T_b es el tiempo de un bit.

(a) Bosquejar un ejemplo de la onda conformada.

(b) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal. Bosquejar.

⁕ Ejercicio 5

Se quiere trasmitir una secuencia X_k binaria, donde los 1 tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y se les asigna el valor A y los 0 tienen probabilidad $\frac{2}{3}$ y se les asigna el valor $-A$, y son independientes entre sí. La secuencia se quiere trasmitir a una cadencia de $r = \frac{1}{T}\ bits/s$. Para adecuar la señal al canal se quiere utilizar un código de línea apropiado.

Figura 1: Código de línea

(a) Hallar y graficar la autocorrelación de la secuencia de entrada y su densidad de potencia.

Para que el proceso Y_t sea estacionario se considera que el pulso de conformación se encuentra retardado un tiempo t_d respecto al origen de la secuencia, con t_d uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T]$.

(b) Hallar la densidad espectral de potencia de Y_t.

(c) En particular hallar y graficar para el caso en que:

1. El conformador saca pulsos rectangulares de ancho T
2. Idem pero en este caso los pulsos $p(t)$ tienen la forma de la Figura 2.

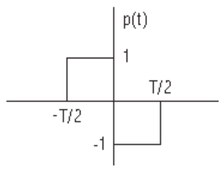


Figura 2: Forma de los pulsos.

(d) Comparar ambos espectros, ventajas y desventajas.

(e) Indicar qué pasa con el espectro de la señal de salida cuando se cambia la forma de pulso del conformador. Dar criterios para la elección de dicho pulso.