Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 2

Procesos estocásticos

PSD, filtrado lineal de procesos, ruido blanco.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1

Sea X_n una señal con características de ruido blanco e Y_n otra señal estacionaria, independiente de X_n. Mostrar que la señal $Z_n = X_n Y_n$ también es ruido blanco, o sea que $\mathrm{E}[Z_n Z_{n+m}] = A\delta(m)$, donde A es una constante.

✦ Ejercicio 2 (10.38)

Considerar que un proceso estacionario X_t con características de ruido blanco y densidad espectral de potencia $N_0/2$ se aplica a la entrada de un filtro pasabajos con respuesta en frecuencia $H(f) = \tau sinc(\tau f)$. Hallar la autocorrelación del proceso a la salida y su potencia.

✦ Ejercicio 3

Considerar que un proceso estocástico Y_n es la salida de un sistema LTI de transferencia

$$H(e^{j\theta}) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^{-1}$$

La entrada X_n es un proceso estacionario con características de ruido blanco, de media nula y $\mathrm{E}[X_n^2] = \sigma_X^2$.

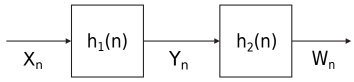
(a) Expresar $\mathrm{E}[Y_n^2]$ en función de $R_Y(n)$ o $S_Y(e^{j\theta})$.

(b) Determinar $S_Y(e^{j\theta})$, la densidad espectral de potencia de Y_n.

(c) Determinar $R_Y(n)$, la función de autocorrelación de Y_n.

★ Ejercicio 4

Sea X_n un proceso real, estacionario, con características de ruido blanco, de media nula y varianza σ_X^2. Hagamos que X_n sea la entrada a la cascada de dos sistemas discretos lineales, causales e invariantes en el tiempo, como muestra la figura.



(a) ¿Vale que $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n)$?

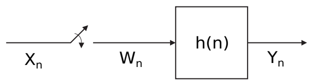
(b) ¿Vale que $\sigma_W^2 = \sigma_Y^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n)$?

(c) Sea $h_1(n) = a^n U_n$ y $h_2(n) = b^n U_n$ con $|a| < 1$ y $|b| < 1$. Determinar la respuesta al impulso del sistema en su conjunto, y de allí determine σ_W^2.

(d) ¿Su respuesta a la parte (b) es consistente con su respuesta a la parte (c)?

⋆ Ejercicio 5

A menudo nos interesa conocer el comportamiento estadístico de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable, cuando a la entrada es aplicada una señal aleatoria en forma repentina, como muesstra la figura.



Sea X_n una señal estacionaria con características de ruido blanco con media nula. Entonces la entrada al sistema W_n, dada por

$$W_n = \begin{cases} X_n & si \quad n \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad n < 0 \end{cases}$$

es un proceso no estacionario, como lo es la salida Y_n.

(a) Derivar una expresión para el valor medio de la salida en función del valor medio de la entrada.

(b) Derivar una expresión para la señal de atucorrelacón $R_Y(n_1, n_2)$ de la salida.

(c) Mostrar que para n grande, las fórmulas derivadas en las partes (a) y (b) se aproximan al resultado para la entrada estacionaria.

(d) Asuma que $h(n) = a^n U_n$. Encontrar el valor medio y el valor cuadático medio de la salida en función del valor medio y el valor cuadrático medio de la entrada. Bosquejar la dependencia de estos parámetros en función de n.

⋆ Ejercicio 6

La integral de la densidad espectral de potencia en cada banda de frecuencia proporciona la potencia en esa banda. Utilice el siguiente enfoque para mostrar que la densidad espectral de potencia es la única función de este tipo. Demostrar que si

$$\int_0^W S_1(f)df = \int_0^W S_2(f)df$$

para todo $W > 0$, entonces $S_1(f) = S_2(f)$ para todo $f \geq 0$.
Nota: La función $q(W) = \int_0^W S_1(f)df - \int_0^W S_2(f)df$ es identicamente a cero para todo $W \geq 0$.

Solución

Ejercicio 1

Según la definición de Z_n tenemos que:

$$\mathrm{E}[Z_n Z_{n+m}] = \mathrm{E}[X_n Y_n X_{n+m} Y_{n+m}]$$

Y por independencia entre X_n e Y_n tenemos que

$$\mathrm{E}[X_n Y_n X_{n+m} Y_{n+m}] = \mathrm{E}[X_n X_{n+m}]\,\mathrm{E}[Y_n Y_{n+m}]$$

Como X_n tiene características de ruido blanco e Y_n es estacionario:

$$\mathrm{E}[Z_n Z_{n+m}] = \sigma_X^2 \delta(m) R_Y(m) = A\delta(m)$$

donde $A = \sigma_X^2 R_Y[0]$.

Ejercicio 3

(a) Aplicando la definición de autocorrelación

$$\mathrm{E}[Y_n^2] = R_Y(0)$$

(b) Como el sistema es SLIT, la densidad espectral de potencia de la salida es

$$S_Y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 S_X(e^{j\theta}) = \sigma_X^2 \left|1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}\right|^{-2} = \frac{\sigma_X^2}{\frac{5}{4} - \cos(\theta)}$$

(c) Podemos partir directamente de

$$S_Y(e^{j\theta}) = \left|H(e^{j\theta})\right|^2 S_X(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) \cdot H^*(e^{j\theta}) \cdot S_X(e^{j\theta})$$

En este caso,

$$S_y(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}} \cdot \sigma_X^2$$

y antitransformando obtenemos la autocorrelación:

$$R_Y(n) = \sigma_X^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right] * \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)\right].$$

Si operamos,

$$R_Y(n) = \sigma_X^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k) \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u(-k)$$

$$R_Y(n) = \sigma_X^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=\text{máx}(0,-n)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

Para $n < 0$ esto es
$$\sigma_x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}\sigma_X^2 \; 2^{-n}$$
Con $n \geq 0$ tenemos
$$\sigma_X^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sigma_X^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k\right]$$
$$= \sigma_X^2 \left[\frac{(1/4)^{-n} - 1/4}{1 - 1/4} + \frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3}\sigma_X^2 \; 2^n$$
Finalmente
$$R_Y(n) = \frac{4}{3}\sigma_X^2 \; 2^{-|n|}$$

Ejercicio 4

(a) Calculemos la potencia del proceso, planteando que la salida es la convolución de la entrada con la respuesta impulsiva:
$$\sigma_y^2 = E\left\{Y_n^2\right\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k h(n-k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l h(n-l)\right\}$$
Los términos de la sumatoria en k, no dependen de l, entonces:
$$\sigma_y^2 = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_k h(n-k) X_l h(n-l)\right\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_k X_l h(n-k) h(n-l)\right\}$$
Por linealidad de la esperanza:
$$\sigma_y^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{X_k X_l h(n-k) h(n-l)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{X_k X_l\right\} h(n-k) h(n-l)$$
$$\sigma_y^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(k-l) h(n-k) h(n-l)$$
$$\sigma_y^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 h(n-k) h(n-k) = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(n-k)$$
Finalmente:
$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h^2(i)$$
El mismo resultado se puede obtener razonado en frecuencia: Sabemos que $G_y = |H|^2 G_x$ y como x es ruido blanco, $G_x = \sigma_x^2$. El resultado se obtiene pues
$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \sigma_x^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h^2(i)$$
y la última igualdad se obtiene por el teorema de Parseval.

(b) Probaremos primero que si se tiene un proceso X_n estacionario y real, tal que para todo SLIT cuasal, la salida verifica la propiedad vista en la parte a, entonces necesariamente dicho procesto tiene que ser ruido blanco.
Supongamos que X_n es un proceso real, estacionario que no tiene características de ruido blanco. Mostraremos que siempre existe un SLIT causal tal que (tomando a X_n como entrada) no se verifica:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$$

donde $h(n)$ es la respuesta al impulso de dicho sistema.
Formalmente, que X_n no sea ruido blanco implica que existe un instante $k \neq 0$ tal que $R_{Y_k} \neq 0$. Observar que dado que X_n es un proceso real, necesariamente se cumple también que $R_{Y_{-k}} \neq 0$[1].
Consideremos el SLIT causal cuya respuesta impulsiva está dada por

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-k)$$

Recordemos que se cumple que

$$R_{Y_n} = R_{X_n} * h(n) * h(-n)$$

como $h(n) * h(-n) = 2\delta(n) + 2\delta(n-k)$, la igualdad anterior queda dada por

$$R_{Y_n} = 2R_{X_n} + 2R_{X_{n-k}}$$

Finalmente evaluando esta ecuación en $n = 0$, llegamos a que

$$\sigma_y^2 = 2\sigma_x^2 + 2R_{X_{-k}}$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = 2$ y $R_{X_{-k}} \neq 0$. Por lo que llegamos a lo deseado.
La salida del primer sistema, Y_n, por lo visto, debe estar en las hipótesis de ser ruido blanco para que también se cumpla.
Analicemos la autocorrelación de Y_n:

$$R_{Y_{n-m}} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k h(n-k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l h(m-l) \right\}$$

Como el término $X_k h(n-k)$ es independiente de l,

$$R_{Y_{n-m}} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_k h(n-k) X(l) h(m-l) \right\}$$

Por linealidad de la esperanza:

$$R_{Y_{n-m}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{ X_k h(n-k) X_l h(m-l) \right\}$$

De nuevo por linealidad, como h no es un proceso, sale para afuera de la esperanza:

$$R_{Y_{n-m}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{ X_k X_l \right\} h(n-k) h(m-l)$$

[1] Observado esto, no hay perdida de generalidad al suponer que k es positivo.

$$R_{Y_{n-m}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(k-l) h(n-k) h(m-l)$$

Como $\delta(k-l)$ es distinto de cero sólo cuando $k = l$, tenemos que:

$$R_{Y_{n-m}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 h(n-k) h(m-k)$$

Finalmente:

$$R_{Y_{n-m}} = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h(k+n-m)$$

Es decir que en el caso general Y_n no tiene características de ruido blanco y por lo tanto no se cumple lo pedido.
Esto también se puede concluir estudiando el espectro. Un proceso blanco debe tener densidad espectral de potencia constante, pero

$$G_{y(e^{j\theta})} = \sigma_{x^2} |H(e^{j\theta})|^2$$

solo será constante si $|H(e^{j\theta})|$ es constante, que es un caso particular.

(c) Como ambos sitemas son SLIT's, la respuesta del sistema en cascada tiene como respuesta al impulso la convolución de las respuestas impulsivas de cada uno de los dos sistemas.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k U_k b^{n-k} U_{n-k} = U_n \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = U_n b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$h(n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} U_n$$

$$\sigma_W^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}\right)^2 = \frac{\sigma_X^2}{(b-a)^2} \left[\frac{b^2}{1-b^2} - \frac{2ab}{1-ab} + \frac{a^2}{1-a^2}\right]$$

(d) Sí lo cumple ya que no se aplicó la propiedad de cada subsistema por separado sino a todo el sistema en cascada.

Ejercicio 5

(a) Planteando la esperanza de la salida:

$$E\{Y_n\} = E\{W_n * h(n)\} = E\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k h(n-k)\right)$$

Por linealidad de la esperanza:

$$E\{Y_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{W_k\} h(n-k)$$

$$E\{Y_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} E\{X_k\} h(n-k)$$

y como X_n sí es estacionario,

$$E\{Y_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} m_x h(n-k) = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)$$

$$E\{Y_n\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$$

En nuestro caso $m_x = 0$, por lo que:

$$E\{Y_n\} = 0$$

(b) Planteando la autocorrelación en términos de la entrada y la respuesta al impulso tenemes:

$$R_Y(n1, n2) = E\{Y_{n1}Y_{n2}\} = E\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k h(n_1-k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_l h(n_2-l)\right)$$

operando tenemos,

$$R_Y(n_1, n_2) = E\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_k W_l h(n_1-k)h(n_2-l)\right)$$

Por linealidad de esperanza

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{W[k]W[l]\}h(n_1-k)h(n_2-l)$$

Planteándolo en términos de X_n:

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E\{X_k X_l\}h(n_1-k)h(n_2-l)$$

Como X_n sí es estacionaria:

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} R_{X_{k-l}} h(n_1-k)h(n_2-l)$$

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{l=-\infty}^{n_2} R_X((n_1-k)-(n_2-l))h(k)h(l)$$

En nuestro caso X_n tiene características de ruida blanco, entonces $R_{X_m} = \sigma_X^2 \delta(m)$

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{l=-\infty}^{n_2} \sigma_X^2 \delta((n_1-k)-(n_2-l))h[k]h(l) = \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sigma_X^2 h(k)h(k-(n_1-n_2))$$

$$R_Y(n_1, n_2) = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{n_1} h(k)h(k-(n_1-n_2))$$

(c) Para el caso de la media:

$$E\{Y_n\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$$

Está claro que:

$$\lim_{n\to\infty} E\{Y_n\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)$$

que es el resultado para una entrada estacionaria. Para el caso de la autocorrelación: Tomemos el límite cuando n_1 y n_2 tienden a infinito:

$$\lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} R_Y(n_1, n_2) = \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \sigma_X^2 \sum_{k=-\infty}^{n_1} h(k)h(k-(n_1-n_2))$$

$$\lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} R_Y(n_1, n_2) = \sigma_X^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(k-(n_1-n_2))$$

Que es el mismo resultado que obtuvimos cuando la entrada era estacionaria. Debe aclararse que para que esto sea cierto, n_1 y n_2, ambas deben tender a infinito y con velocidad similar.

(d)

$$E\{Y_n\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$$

En nuesto caso $m_x = 0$, por lo que:

$$E\{Y_n\} = 0$$

$$R_Y(n, n) = \sigma_X^2 \sum_{k=-\infty}^{n} h_2(k)$$

Si $n < 0$:

$$R_Y(n, n) = 0$$

Si $n \geq 0$:

$$R_Y(n, n) = \sigma_X^2 \sum_{k=0}^{n} (a^2)^k = \sigma_x^2 \frac{a^{2(n+1)} - 1}{a^2 - 1}$$

Resumiendo:

$$\sigma_{Y_n} = \sigma_Y^2 \frac{a^{2(n+1)} - 1}{a^2 - 1} U_n$$

Ejercicio 6

Sabemos que la función $q(W) = \int_0^W S_1(f)df - \int_0^W S_2(f)df$ es identicamente a cero para todo $W \geq 0$. Por lo que también lo será su derivada, $q'(W) = S_1(f) - S_2(f)$, entonces $S_1(f) = S_2(f)$ para todo $f \leq 0$