Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 3
Procesos estocásticos
Proceso de Weiner, Ergodicidad.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦Ejercicio 1

Sea W_t un proceso de Wiener, utilizar que $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$ y mostrar que tiene incrementos no correlacionados, i.e.

$$\mathrm{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] = 0$$

si $[t_1, t_2)$ y $[t_3, t_4)$ son disjuntos.

★Ejercicio 2

El proceso de Wiener W_t se puede obtener como límite de un proceso random walk continuo,

$$W_t = \lim_{\Delta_t \to 0} W_\Delta = \lim_{\Delta_t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \Delta_w u(t - n\Delta_t)$$

con $\Delta_w = \sigma \Delta_t^{\frac{1}{2}}$ y Z_n un proceso Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Investigar las consecuencias sobre la autocorrelacion del proceso de Wiener si se considera $\Delta_w = \sigma \Delta_t^x$ con $x < 1/2$ o $x > 1/2$.

✦Ejercicio 3 (11.25)

Sea X_t ruido blanco gaussiano de media nula y autocorrelaciòn $\sigma^2 \delta(\tau)$, y W_t su integral:

$$W_t = \int_0^t X_t dt$$

Mostrar que W_t tiene igual autocorrelaciòn que el proceso de Wiener y por tanto es un modelo vàlido para la integral del ruido blanco gaussiano.

✦ Ejercicio 4 **(10.67)**

Sea Y_t un proceso WSS. En cada uno de los siguientes casos, determinar si $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_t dt \to \mathrm{E}[Y_t]$ (convergencia en media cuadrática).

(a) $C_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$

(b) $C_Y(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$

⋆ Ejercicio 5

Sea x_n una realización de un proceso estocástico ergódico definido por el conjunto de variables aleatorias $\{X_n\}$, con $-\infty < n < \infty$. Sea $p_X(x)$ a la densidad de probabilidad para todas las variables aleatorias X_n.

(a) Considerar $< u(a - x_n) >$, el promedio temporal de la función $u(a - x_n)$ en que $u(.)$ es el escalón en el dominio de los reales y a es una constqante real. Expresar en palabras el significado de este promedio temporal.

(b) Considerar el promedio probabilístico de la función $u(a - X_n)$. ¿Qué es $\mathrm{E}[u(a - X_n)]$ en términos de $p_X(x)$?

(c) ¿Es el resultado de la parte (b) consistente con la interpretación de la parte (a)? Es decir, ¿es razonable que se cumpla la siguiente igualdad?:

$$\mathrm{E}[u(a - X_n)] =< u(a - x_n) >$$