

Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión

Curso posgrado y educación permanente
2023

Docentes: Dr. Ing. Rodolfo Pienika rpienika@fing.edu.uy
MSc. Ing. Laura Rovira lrovira@ose.com.uy

COMPARACIÓN DE MODELOS NO ESTACIONARIOS

Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión 2023

Comparación de modelos no estacionarios

MODELO DE OSCILACIÓN DE MASA (α infinita)

□ Balance de masa: $Q_1(t) = Q_2(t)$

□ Ec. de Bernoulli generalizada: $H_2 - H_1 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$

Hipótesis: Tubería rígida, fluido incompresible

MODELO DE ONDAS (α finita)

□ Balance de masa + Ec. Constitutivas:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{g \cdot A}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

□ Ec. Dinámica:

Hipótesis: Tubería elástica, fluido compresible

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{Q|Q|}{2D \cdot A} = 0$$

T período de la tubería

Tt tiempo en que se produce la perturbación transitoria

Si $T \ll Tt$ MODELO DE OSCILACION DE MASA TIENDE AL MODELO DE ONDAS

MODELO NO ESTACIONARIO EN TUBERÍA ELÁSTICA Y FLUIDO COMPRESIBLE – CON FRICCIÓN

Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión 2023

Modelo no estacionario- tubería elástica- fluido compresible- CON FRICCIÓN

- Ecuaciones generales de fenómenos transitorios (con fricción, $f > 0$)

Balance de Masa +
Ecuaciones Constitutivas
Fluido y Tubería

Ecuación Dinámica

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{g \cdot A}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial s} + f \frac{Q|Q|}{2D \cdot A} = 0$$

- Sistema no lineal
- Incógnitas $Q(s,t)$, $h(s,t)$

Método de las Características

□ Resolución del sistema NO lineal: Método de las Características

1. Observador se desplaza en el sentido del flujo con velocidad a :

□ Para este observador:
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dt} = a$$

□ Despejando $\frac{\partial Q}{\partial t}$ y sustituyendo en la ecuación Dinámica:

$$\frac{dQ}{dt} - a \frac{\partial Q}{\partial s} + gA \frac{\partial h}{\partial s} + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0$$

Método de las Características

- Despejando $\frac{\partial Q}{\partial s}$ de la ecuación de balance de masa + constitutivas :

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{gA}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

- Acoplando las dos ecuaciones anteriores: $\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{\partial h}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial s} + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0$

- Reagrupando: $\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + a \frac{\partial h}{\partial s} \right) + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0$
- $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $\frac{dh}{dt}$

- Finalmente: $\frac{d}{dt} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0$

Método de las Características

2. Observador que viaja en el sentido contrario al flujo con velocidad $-a$:
- Procedimiento análogo, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0$$

En resumen se obtiene que:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0 \end{array} \right.$$

Método de las Características

Recordando las definiciones de $F(s,t)$ y $G(s,t)$:

$$F(s,t) = \frac{1}{2} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) - C_1$$

$$G(s,t) = \frac{1}{2} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) - C_2$$

Sustituyendo F y G en el sistema anterior, y si $f = 0$, resultaría:

$$\frac{dF(s,t)}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) = 0$$

$$\frac{dG(s,t)}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) = 0$$

Las ondas F y G o los términos $Q + \frac{gA}{a} h$ o $Q - \frac{gA}{a} h$ no dependen de t , para los observadores que viajan a velocidad a y $-a$ respectivamente.

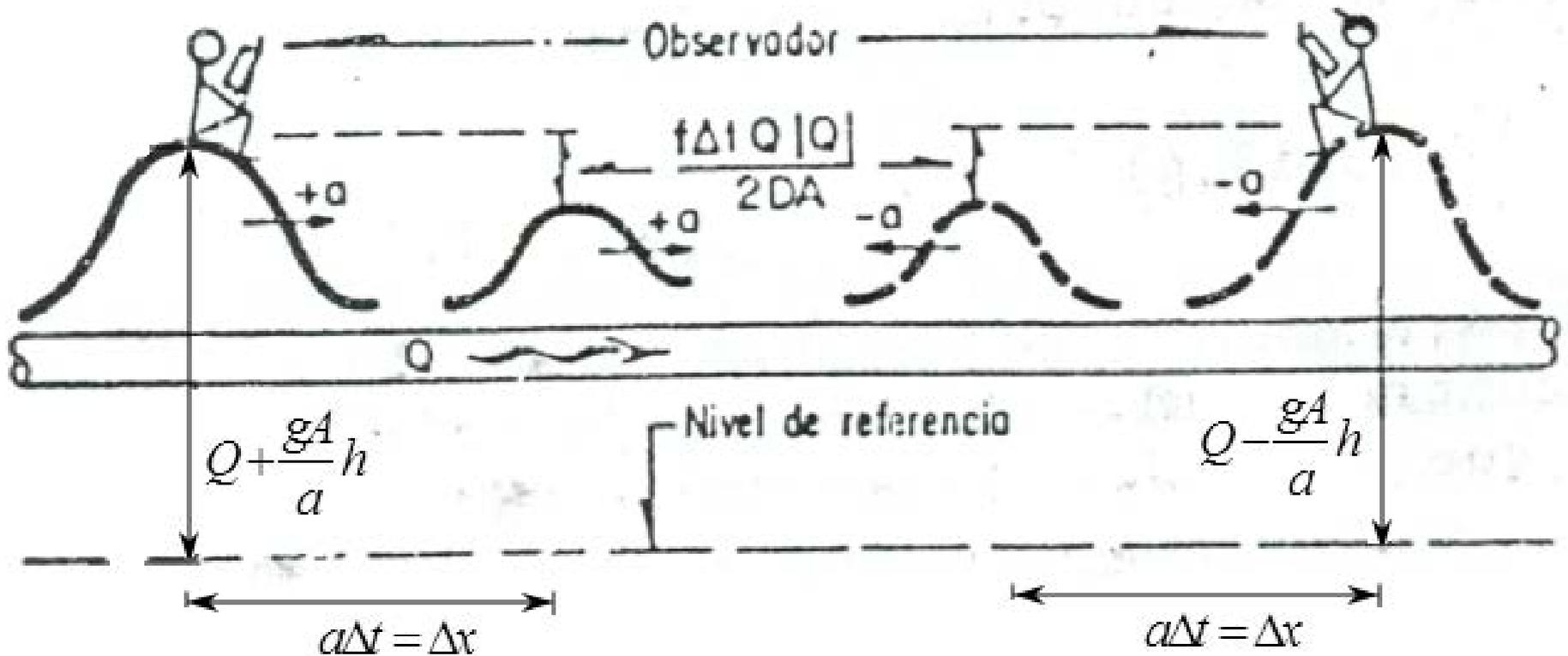
Método de las Características

Si $f > 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) = -f \frac{Q|Q|}{2D.A}$$
$$\frac{d}{dt} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) = -f \frac{Q|Q|}{2D.A}$$

Los términos $Q + \frac{gA}{a} h$ y $Q - \frac{gA}{a} h$ no son independientes de t , y su magnitud disminuye en igual proporción $f \frac{Q|Q|}{2D.A} \Delta t$ para un Δt .

Método de las Características



Método de las Características

Ecuaciones (I) y (II) en incrementos finitos para cada observador:

Siendo,

$$\left[Q + \frac{gA}{a} h \right]_P - \left[Q + \frac{gA}{a} h \right]_A + f \frac{Q_A |Q_A|}{2D.A} \Delta t = 0$$

A: s_0, t_0

$$\left[Q - \frac{gA}{a} h \right]_P - \left[Q - \frac{gA}{a} h \right]_B + f \frac{Q_B |Q_B|}{2D.A} \Delta t = 0$$

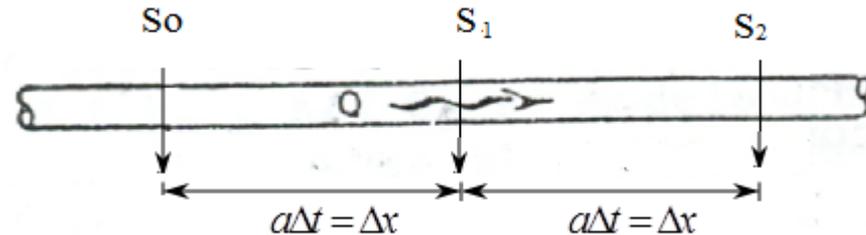
B: s_2, t_0

P: s_1, t_1

Tales que: $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$s_0 = s_1 - a\Delta t$$

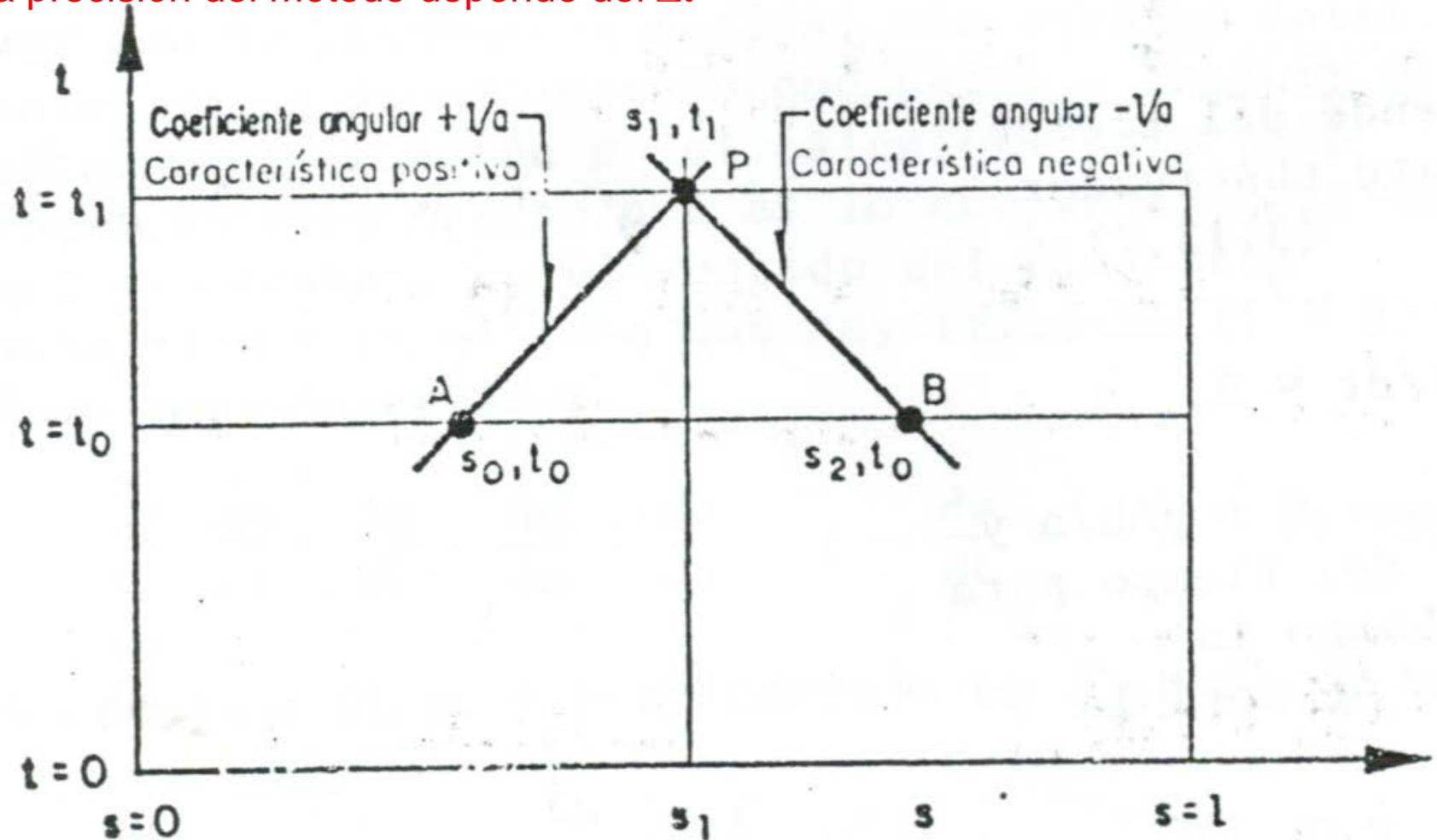
$$s_2 = s_1 + a\Delta t$$



Dados Q_A, Q_B, h_A, h_B en $t=t_0$, las ecuaciones anteriores permiten calcular Q_{P_1} h_{P_1} para t_1 , con mejor aproximación cuanto menor sea $\Delta t=t_1-t_0$

Método de las Características

La precisión del método depende del Δt



Método de las Características

Sintetizando:

$$\begin{array}{l} \text{Ec. Característica positiva (p):} \\ \text{Ec. Característica negativa (n):} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Q_P = C_p - C_a \cdot h_P \\ Q_P = C_n + C_a \cdot h_P \end{array} \right.$$

$$\text{Siendo: } C_p = Q_A + \frac{gA}{a} h_A - f \frac{Q_A |Q_A|}{2D.A} \Delta t$$

$$C_n = Q_B - \frac{gA}{a} h_B - f \frac{Q_B |Q_B|}{2D.A} \Delta t$$

$$C_a = \frac{gA}{a}$$

- ❑ La ecuación (p) es válida sobre la recta de coeficiente angular $1/a$.
- ❑ La ecuación (n) es válida sobre la recta de coeficiente angular $-1/a$.
- ❑ En el punto P ambas ecuaciones son válidas.

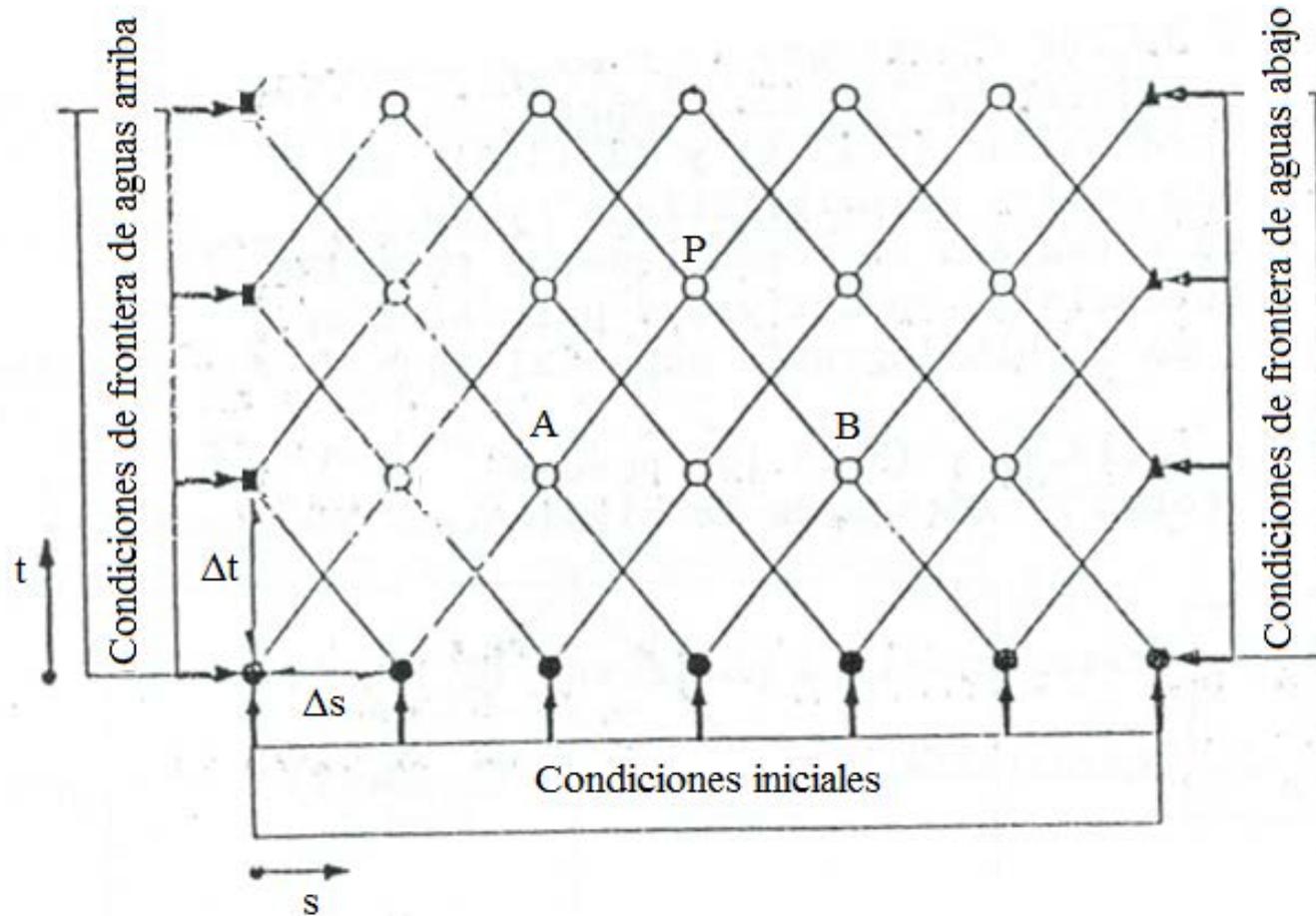
Método de las Características

Sumando y restando las ecuaciones características:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_p = \frac{C_p + C_n}{2} \\ h_p = \frac{C_p - C_n}{2C_a} \end{array} \right.$$

- Esto permite el cálculo de Q y h en los puntos interiores de la siguiente malla
- Si $f=0$, proceso de cálculo exacto.
- Si f no es 0, proceso de cálculo aproximado, depende de Δt

- Círculos llenos: condiciones iniciales $Q(t_0)$, $h(t_0)$ dados para todo s .



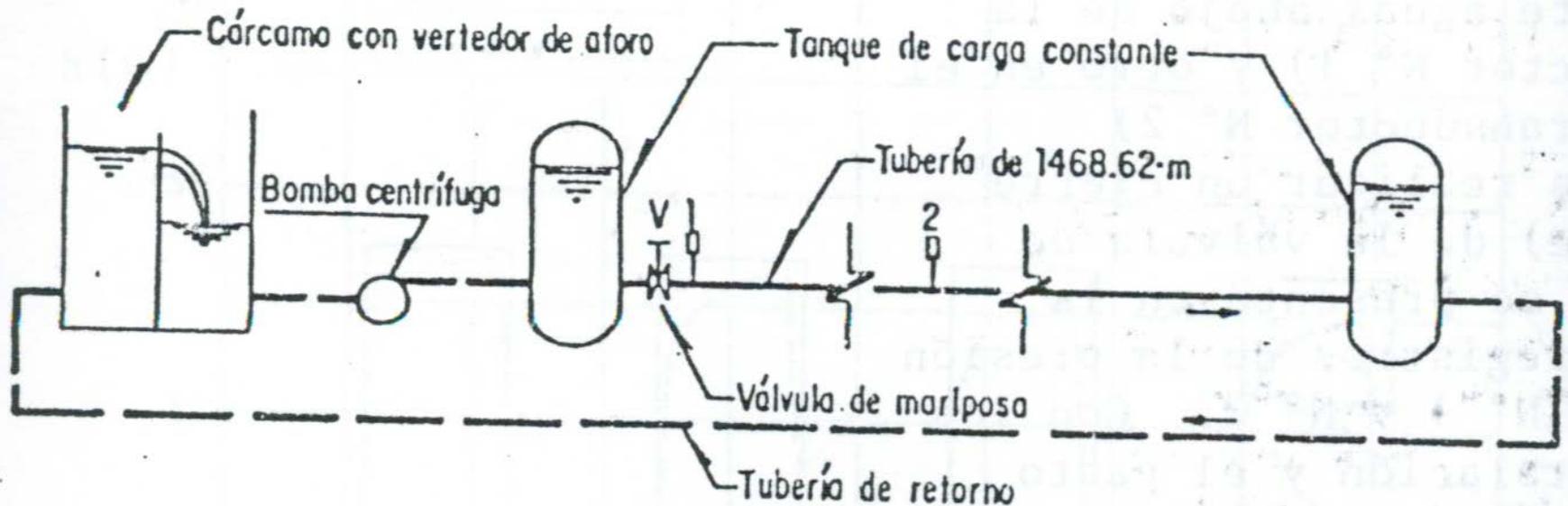
- Círculos vacíos: se calcula Q_p y h_p con las ecuaciones anteriores.
- Cuadrados llenos: ($s=0$, para todo t) se requiere condición de frontera + Ec. característica negativa.
- Triángulos llenos: ($s=L$, para todo t) se requiere condición de frontera + ec. característica positiva.

Verificación experimental - UNAM

Tubería acero galvanizado, $D=4''$, $L=1468\text{m}$, $e=5\text{mm}$

Tanques $D=0.896\text{m}$

Transitorio por válvula mariposa con cierre controlado



- 1 Transductor de presión localizado inmediatamente aguas abajo de la válvula de mariposa
- 2 Transductor de presión localizado en el punto medio de la tubería

Verificación experimental

Leve variación de p:

- Celeridad calculada = 1325m/s

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{101.8 \left[\frac{1}{2.2 \times 10^8} + \frac{2(2.76 \times 10^{-11})}{0.0525} \right]}}$$

- Celeridad medida = 1.285m/s

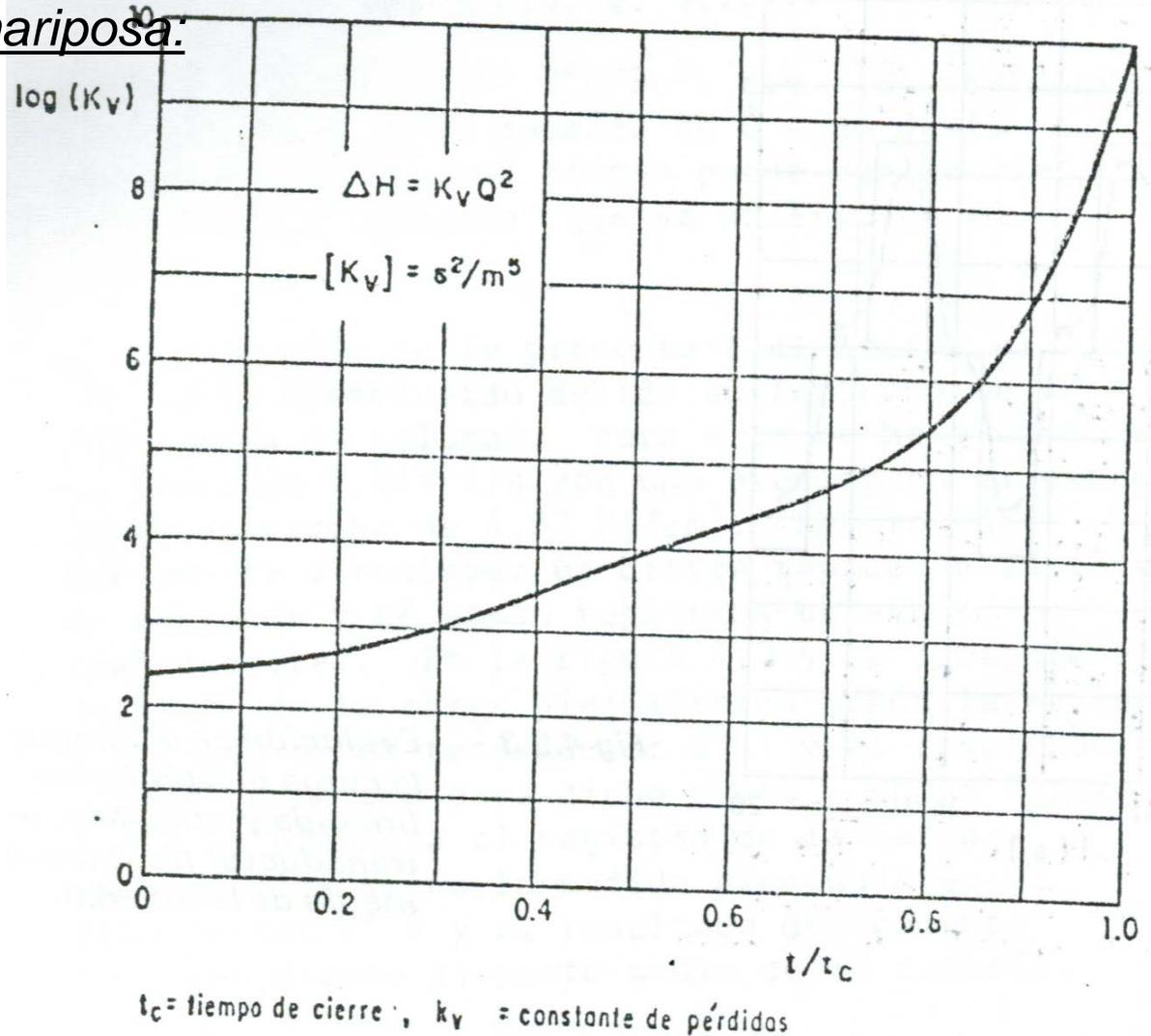
Verificación experimental

1. Cierre rápido-válvula mariposa:

$$T_c = 0.2s$$

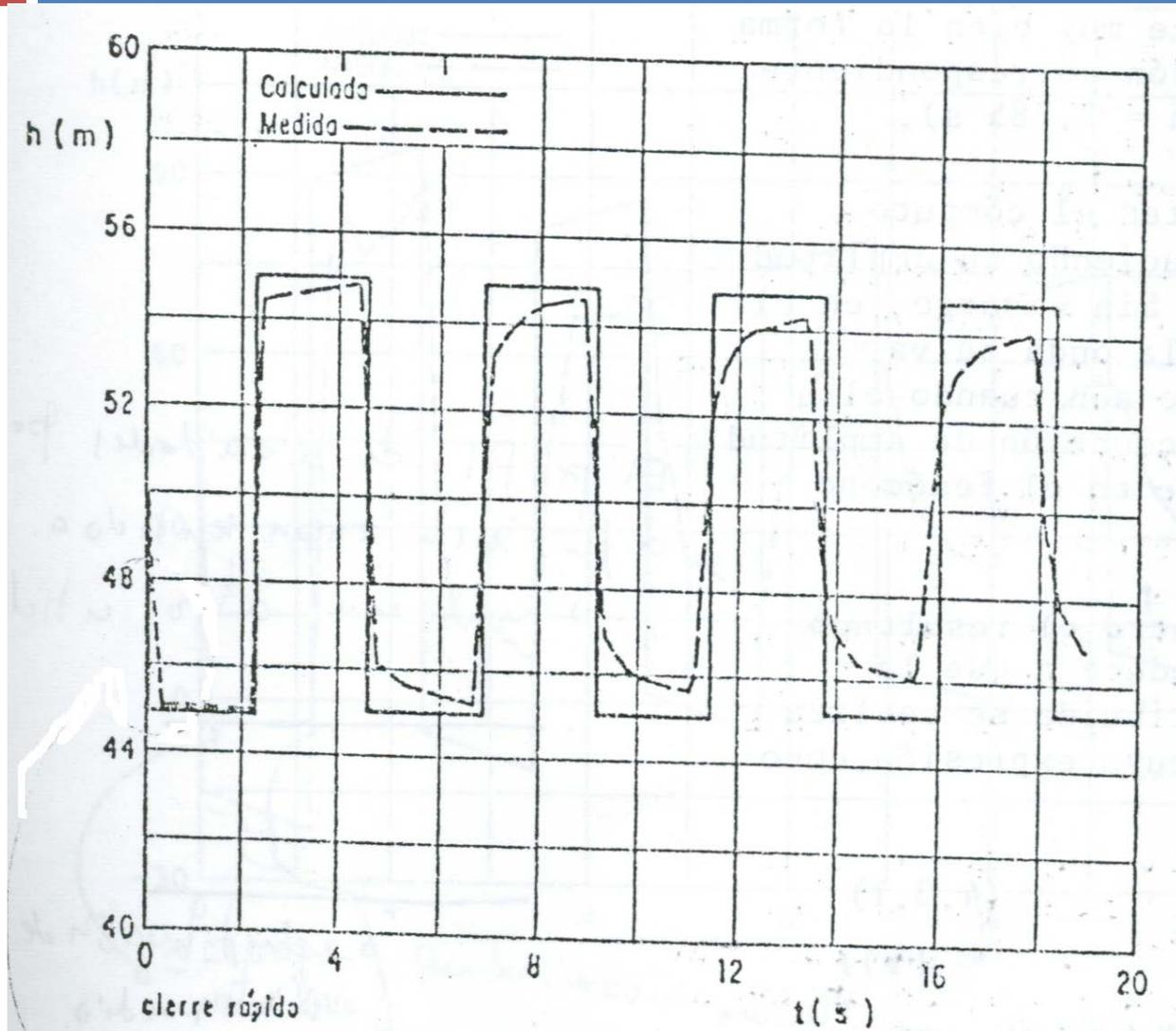
$$Q_0 = 0.336L/s$$

$$\rho_{AA} = 5kg/cm^2$$



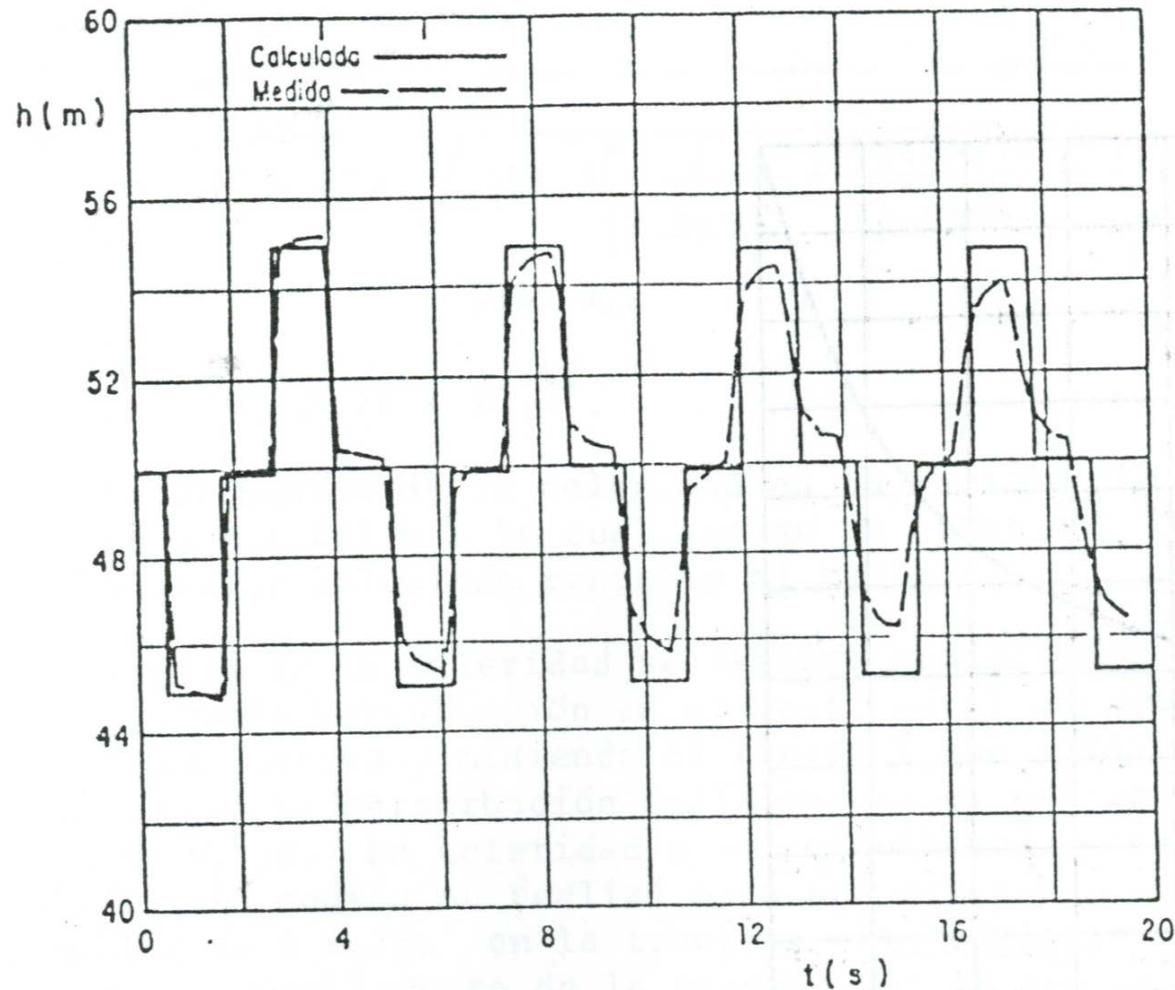
Verificación experimental

- Carga piezométrica - transductor 1.



Verificación experimental

- Carga piezométrica en el tiempo para el transductor 2.



Verificación experimental

- $t = 0$ a $2L/a$, el modelo reproduce bien la evolución de la presión.
- $t > 2L/a$, el fenómeno real: más fuerte reducción de la amplitud de la onda con el tiempo y su forma se redondea.
- Hipótesis que distorsiona evolución de p para tiempos largos:

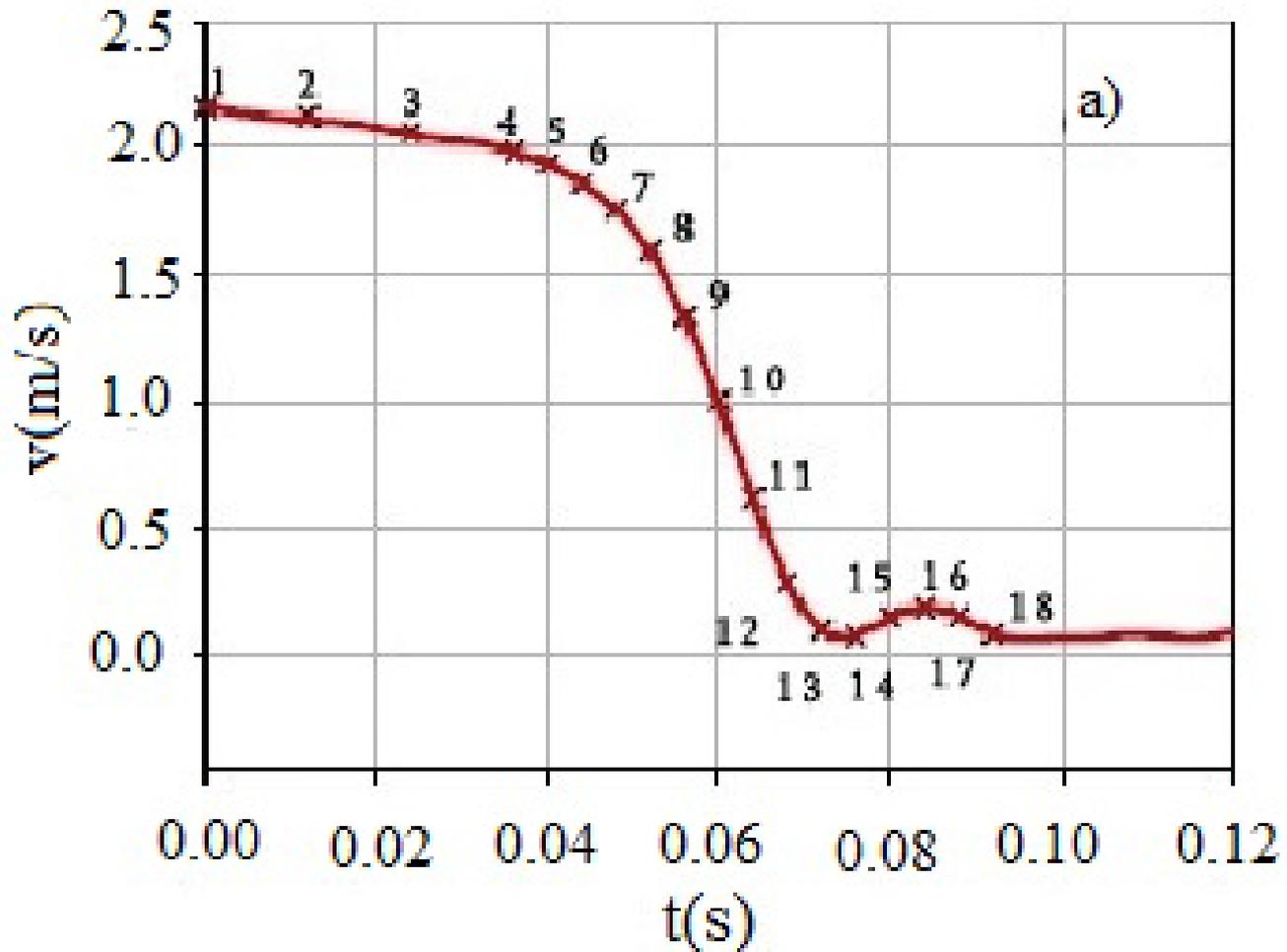
Tensión rasante que la pared de la tubería ejerce sobre el fluido (τ):

$$\tau = f \frac{\rho V^2}{8}; \quad f = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

- Fenómeno real: $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$ $\Delta h_f = F(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \dots)$

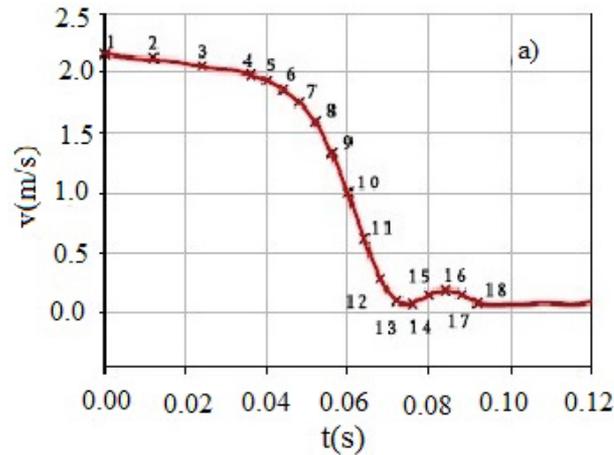
Verificación experimental

Transitorio originado por el cierre de una válvula:

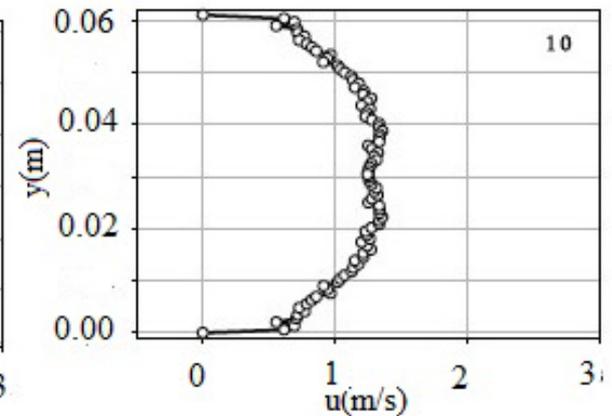
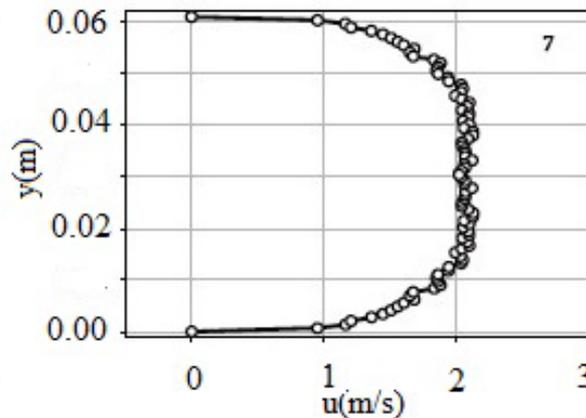
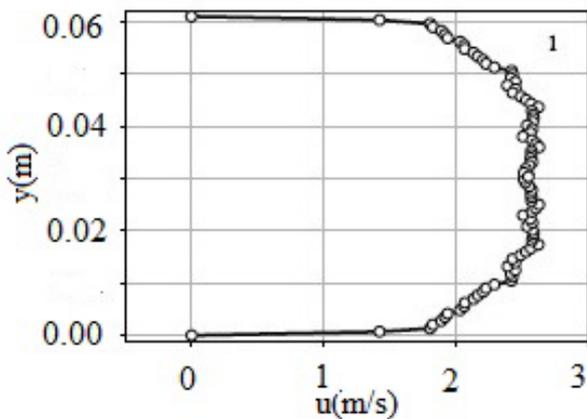


Verificación experimental

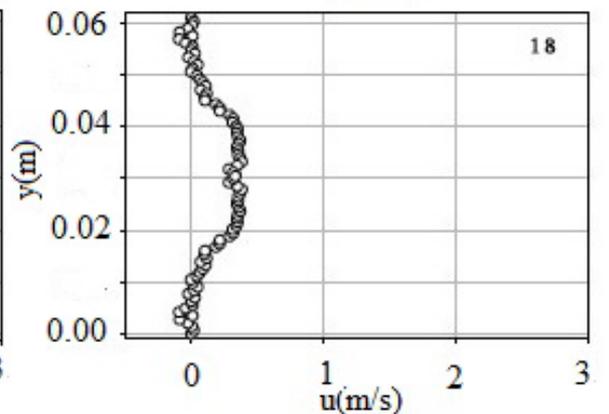
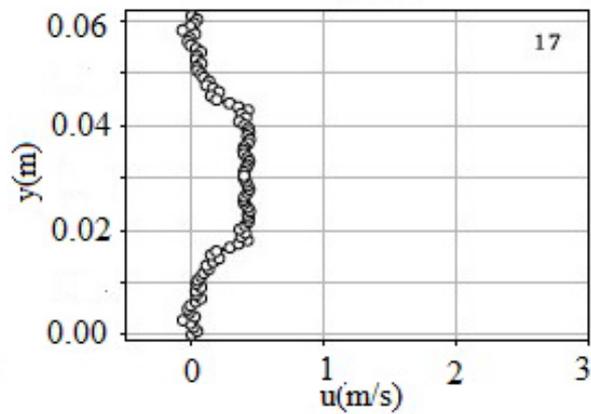
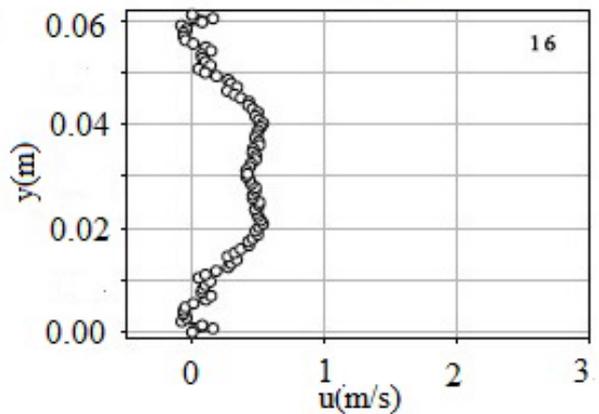
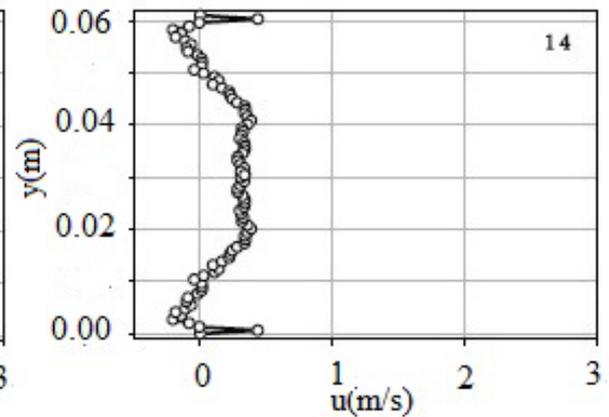
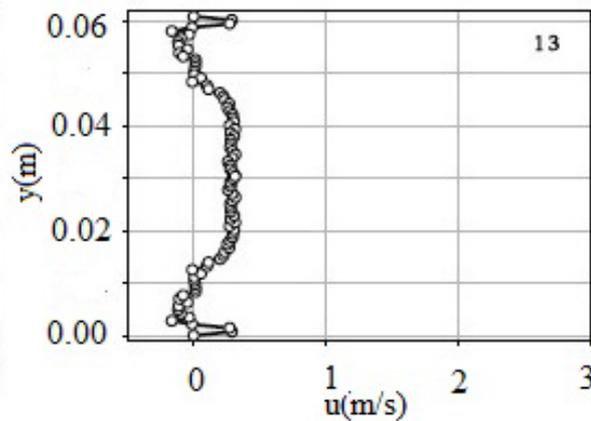
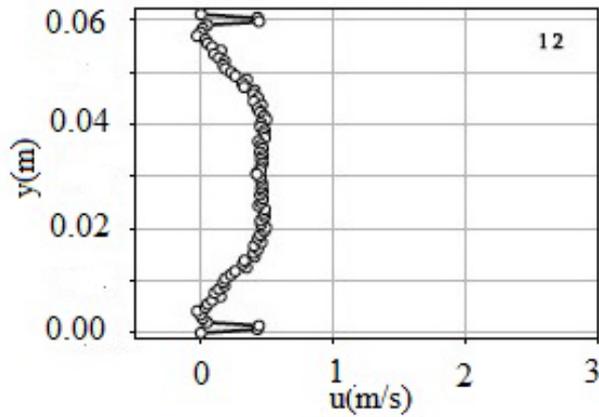
Transitorio originado por el cierre de una válvula:



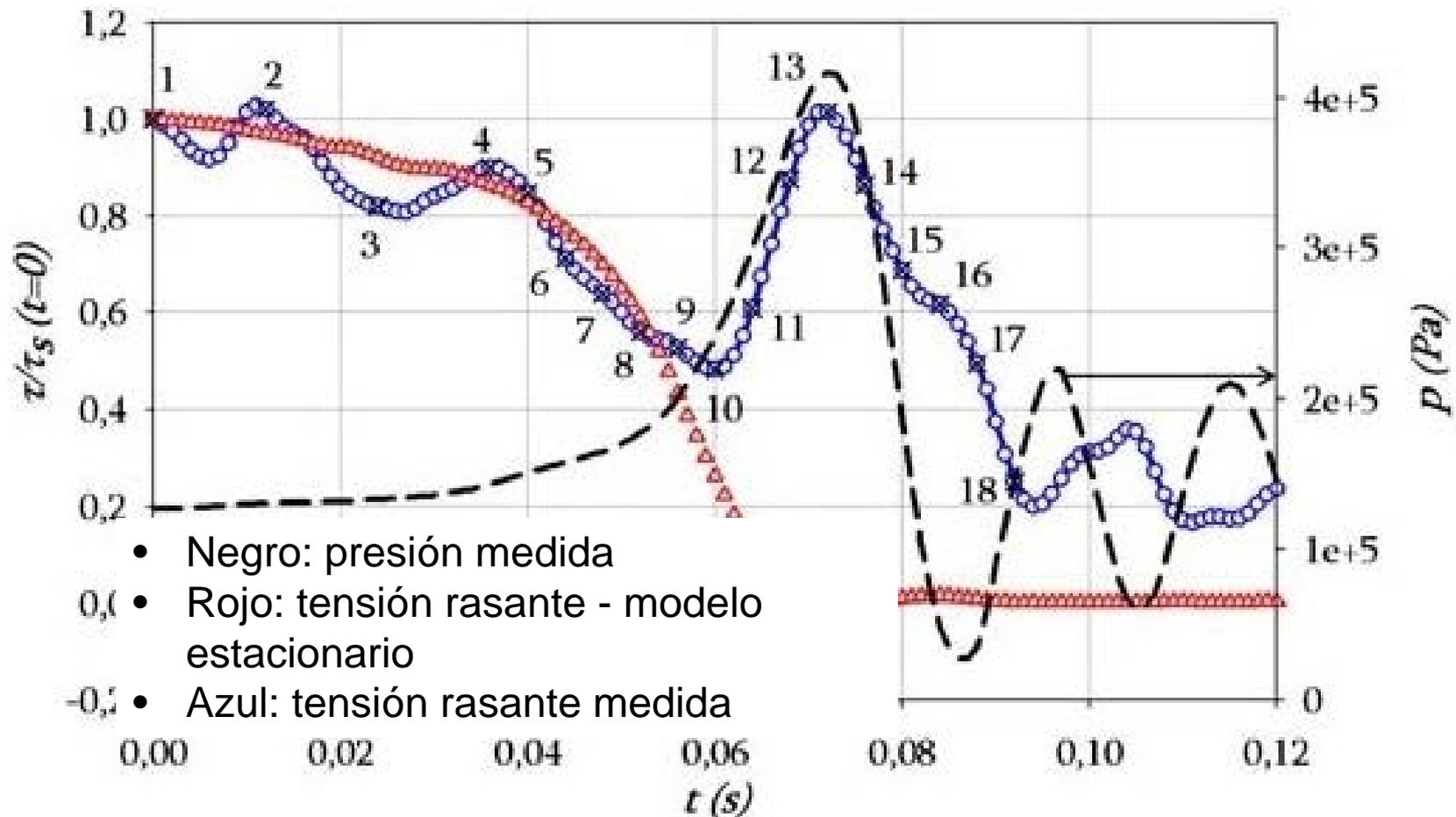
Perfiles de velocidad:



Verificación experimental



Verificación experimental



Verificación experimental

2. Con caudal mayor

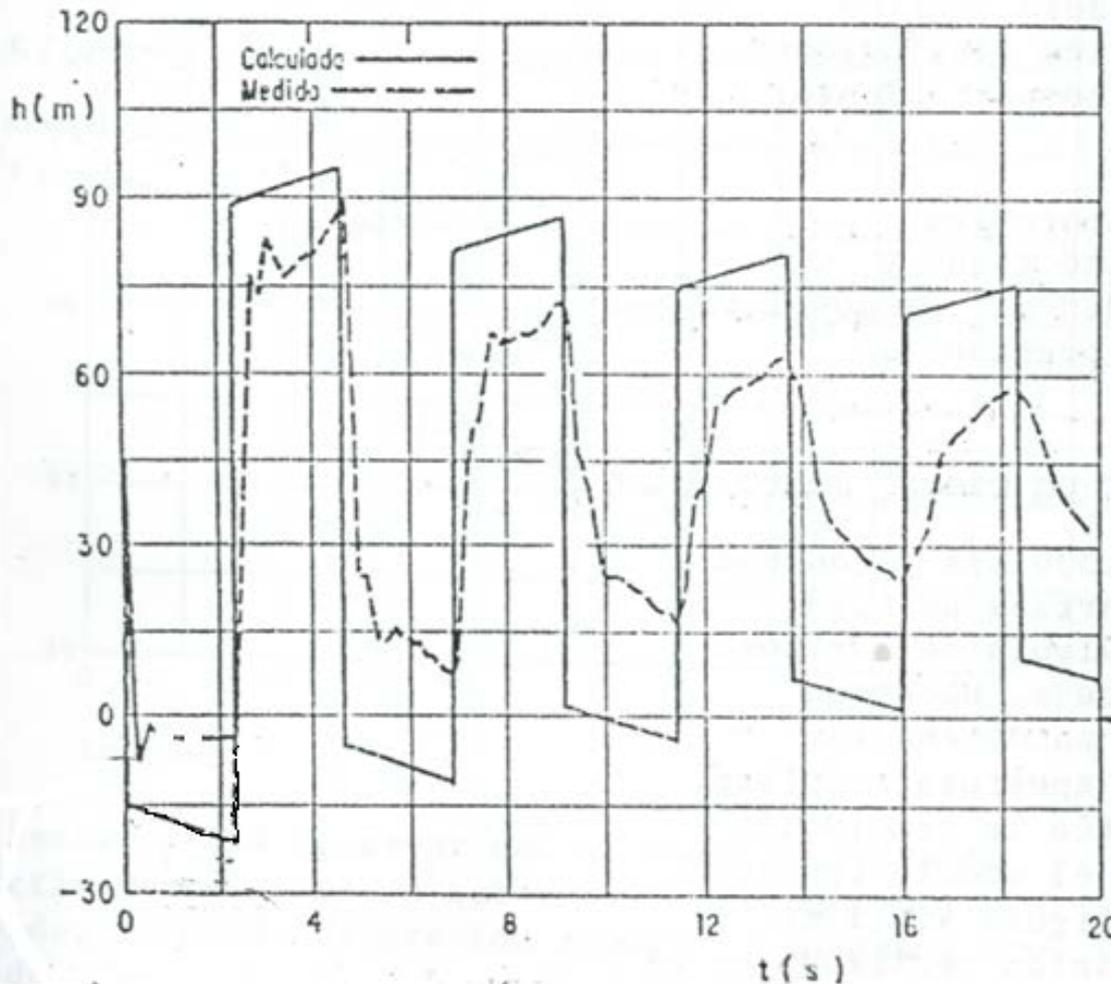
$$T_c = 0.2s$$

$$Q_0 = 4.048L/s$$

$$p_{AA} = 4.83kg/cm^2$$

Verificación experimental

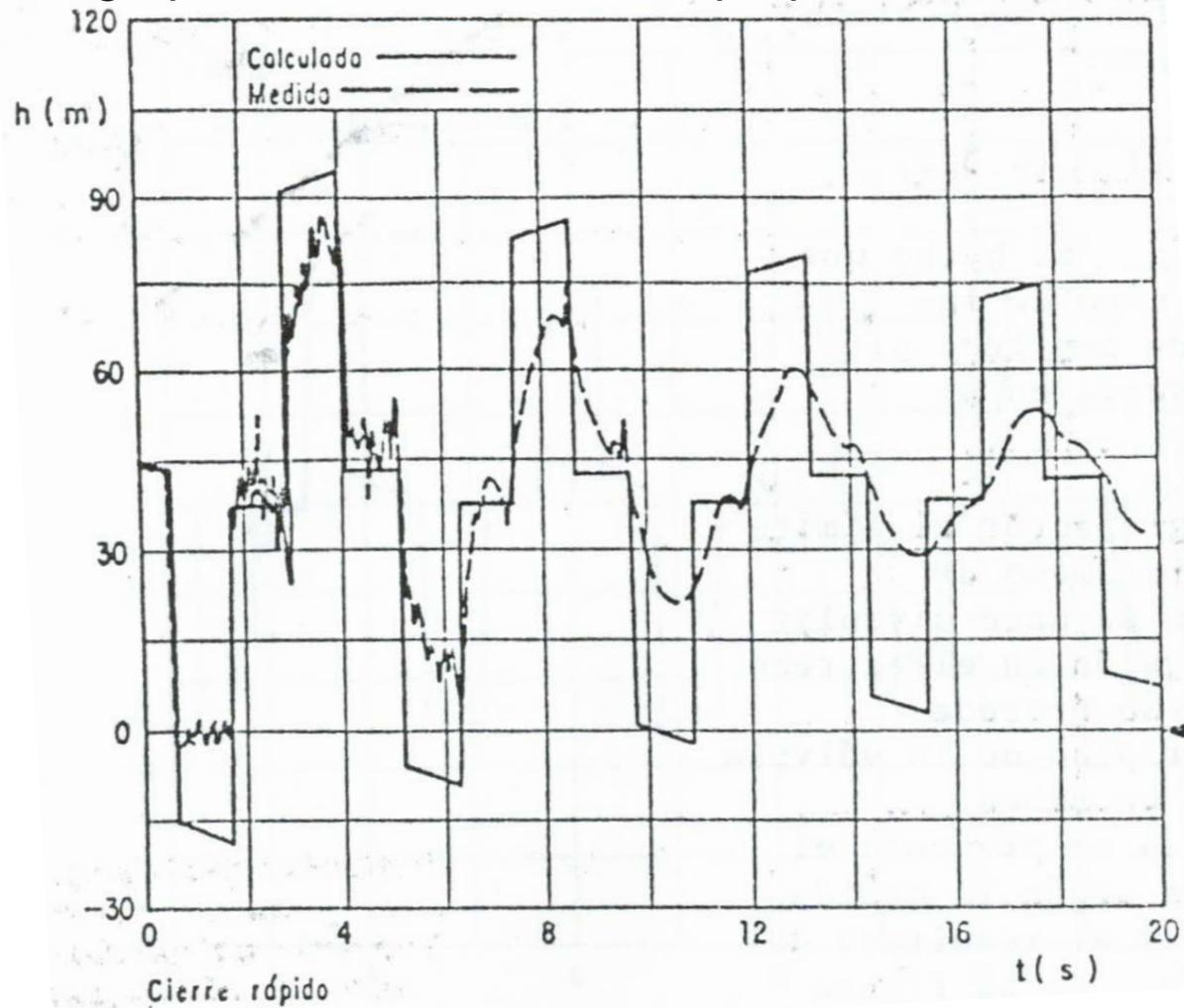
- Carga piezométrica - Transductor 1.



Presión
atmosférica

Verificación experimental

- Carga piezométrica en el tiempo para el transductor 2.



Presión atmosférica

Verificación experimental

3. Cierre lento:

$$T_c = 7.5s$$

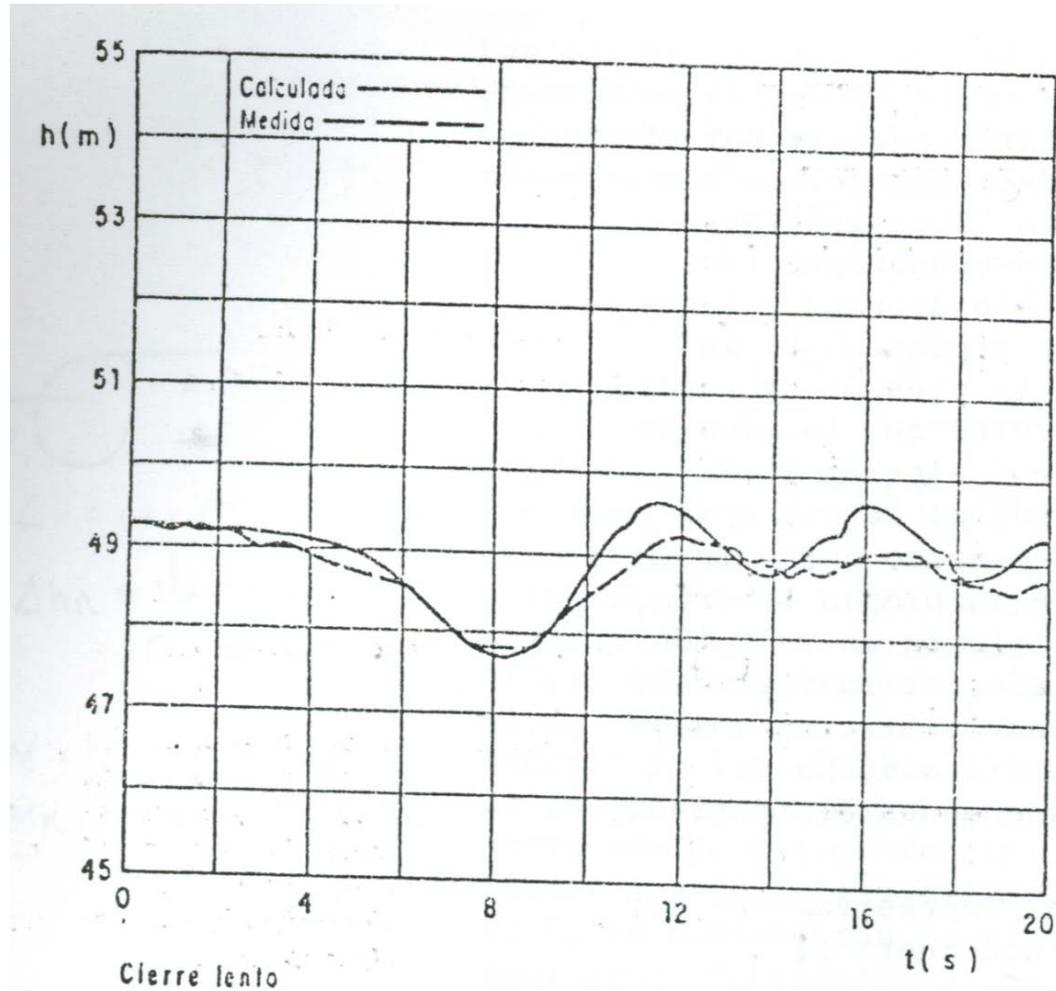
$$Q_0 = 0.33L/s$$

$$p_{AA} = 4.93kg/cm^2$$

$$\alpha = cte.$$

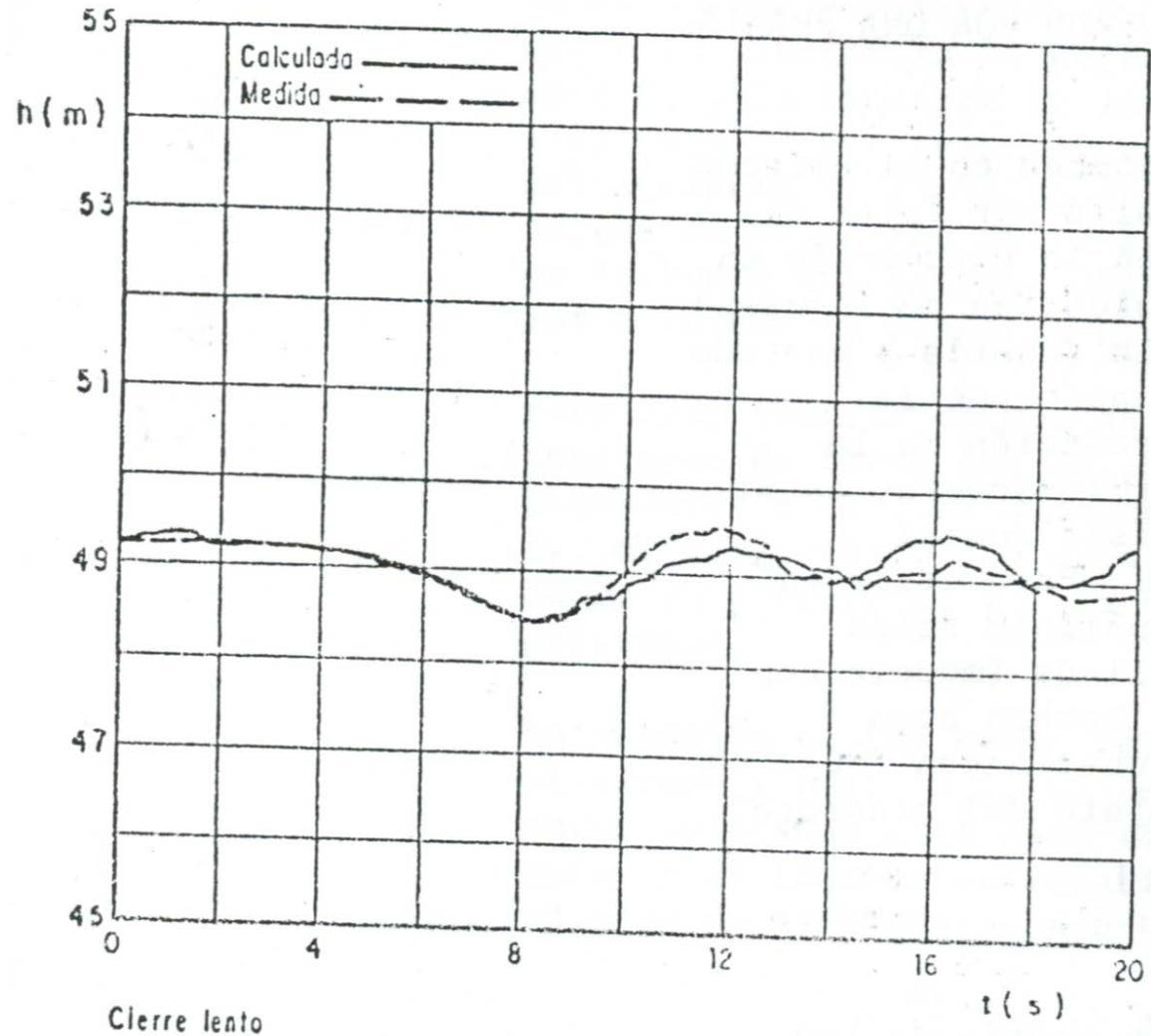
Verificación experimental

- Carga piezométrica en el tiempo para el transductor 1.



Verificación experimental

- Carga piezométrica en el tiempo para el transductor 2.



INTERVALO DE INTEGRACIÓN ΔT

Intervalo Δt

□ Ecuaciones generales

Característica positiva:
$$\frac{d}{dt} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + \frac{f|Q|Q}{2DA} = 0$$

Característica negativa:
$$\frac{d}{dt} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) + \frac{f|Q|Q}{2DA} = 0$$

□ Integrando:
$$\left\{ \begin{aligned} Q_p + \frac{gA}{a} h_p - \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{f|Q|Q}{2DA} dt &= 0 \\ Q_p - \frac{gA}{a} h_p - \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{f|Q|Q}{2DA} dt &= 0 \end{aligned} \right.$$

□ Definiendo F(t):
$$\int \frac{f|Q|Q}{2DA} dt = F(t)$$

□ Desarrollando F(t) en una serie de Taylor hasta el término de 1er orden:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = F'(t) \cdot \Delta t = \frac{f|Q|Q}{2DA} \cdot \Delta t \Rightarrow \int_t^{t+\Delta t} \frac{f|Q|Q}{2DA} dt \approx \frac{f|Q|Q}{2DA} \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} Q_p + \frac{gA}{a} h_p - \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + \frac{f|Q|Q}{2DA} \cdot \Delta t = 0 \\ Q_p - \frac{gA}{a} h_p - \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) + \frac{f|Q|Q}{2DA} \cdot \Delta t = 0 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones en diferencias finitas

Intervalo Δt

- Desarrollando $F(t)$ en una serie de Taylor hasta el término de 2do orden:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = F'(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} F''(t) \cdot \Delta t^2 = F'(t) \cdot \Delta t \left[1 + \frac{F''}{F'} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right]$$

- Diferencia entre aproximaciones de $F(t)$ desarrollos hasta 1er y 2do orden:

$$\varepsilon = \left| \frac{F''}{F'} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right|$$

Siendo,

$$\left. \begin{aligned} F' &= \frac{f|Q|Q}{2DA} \\ F'' &= \frac{f|Q|\dot{Q}}{DA} \end{aligned} \right\} \varepsilon = \left| \frac{\dot{Q}}{Q} \cdot \Delta t \right|$$



si menor $\Delta t \rightarrow$ menor ε

si \dot{Q} grande \rightarrow debo imponer Δt chicos

Intervalo Δt

□ Cotas inferiores y superiores para Δt

⇒ Menor Δt :

↓ Menor Δx ($\Delta x = a \cdot \Delta t$) \Rightarrow más puntos de cálculo, más memoria requerida

↓ Mayor tiempo de proceso para simular el Transitorio Hidráulico.

↑ Menor error en la aproximación.

⇒ Grandes acueductos ($L = 5000$ m a 30000 m aprox.) $\Rightarrow \Delta x \sim 10m \rightarrow \Delta t \sim 0,01s$

⇒ Acueductos de cientos de metros a 5000 m aprox. $\Rightarrow \Delta x \sim 2m \rightarrow \Delta t \sim 0,005s$

Intervalo Δt

Ejemplo

- Ejemplo: cierre instantáneo de una válvula

$$D = 1 \text{ m}$$

$$L = 10000 \text{ m}$$

$$Q = 2.36 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a = 1000 \text{ m/s}$$

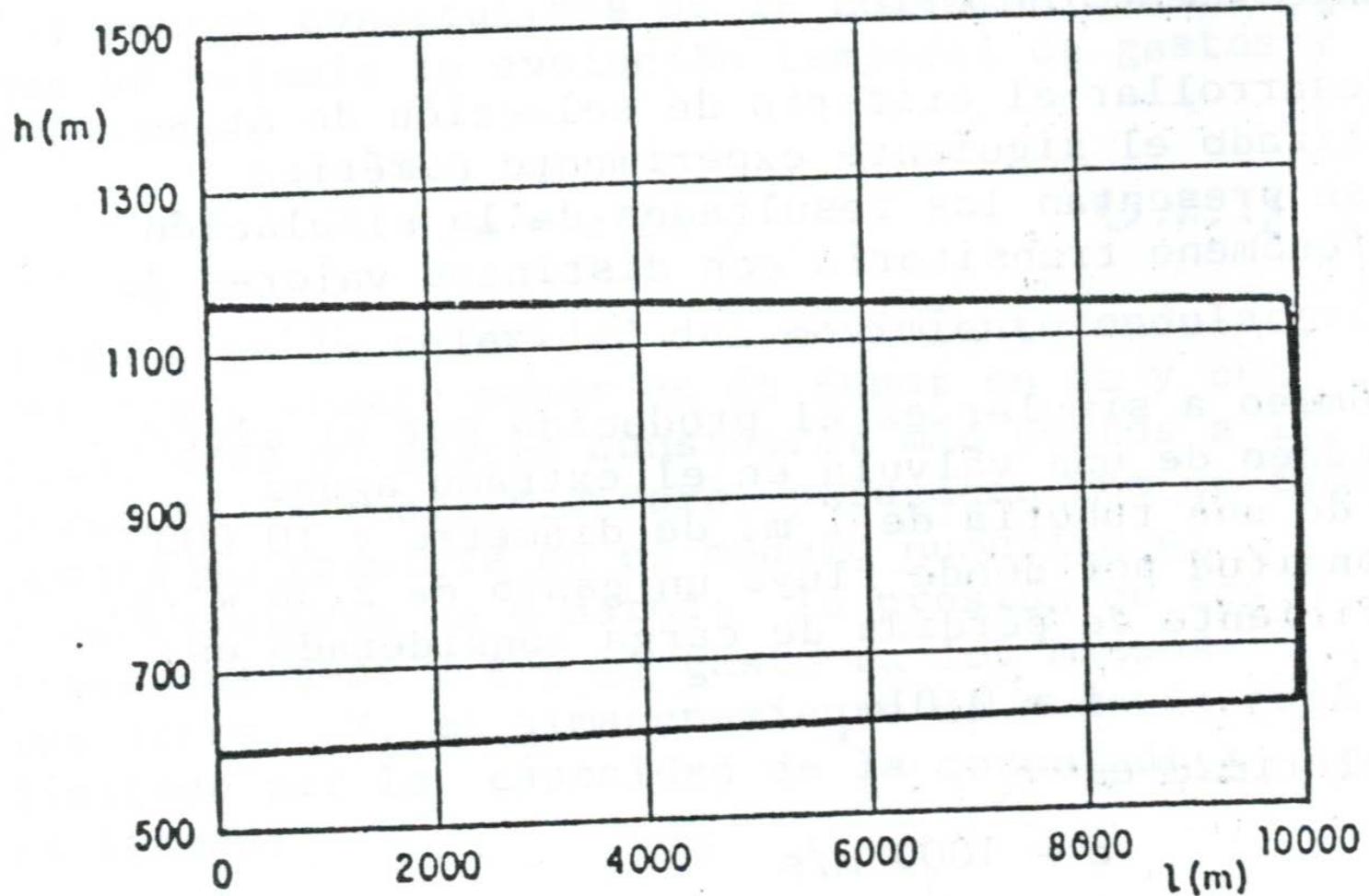
- Casos:

Δt (s)	0,05	0,1	1	5
Δx (m)	50	100	1000	5000

Intervalo Δt

Ejemplo: $\Delta t=0.05s$, $\Delta x=50 m$

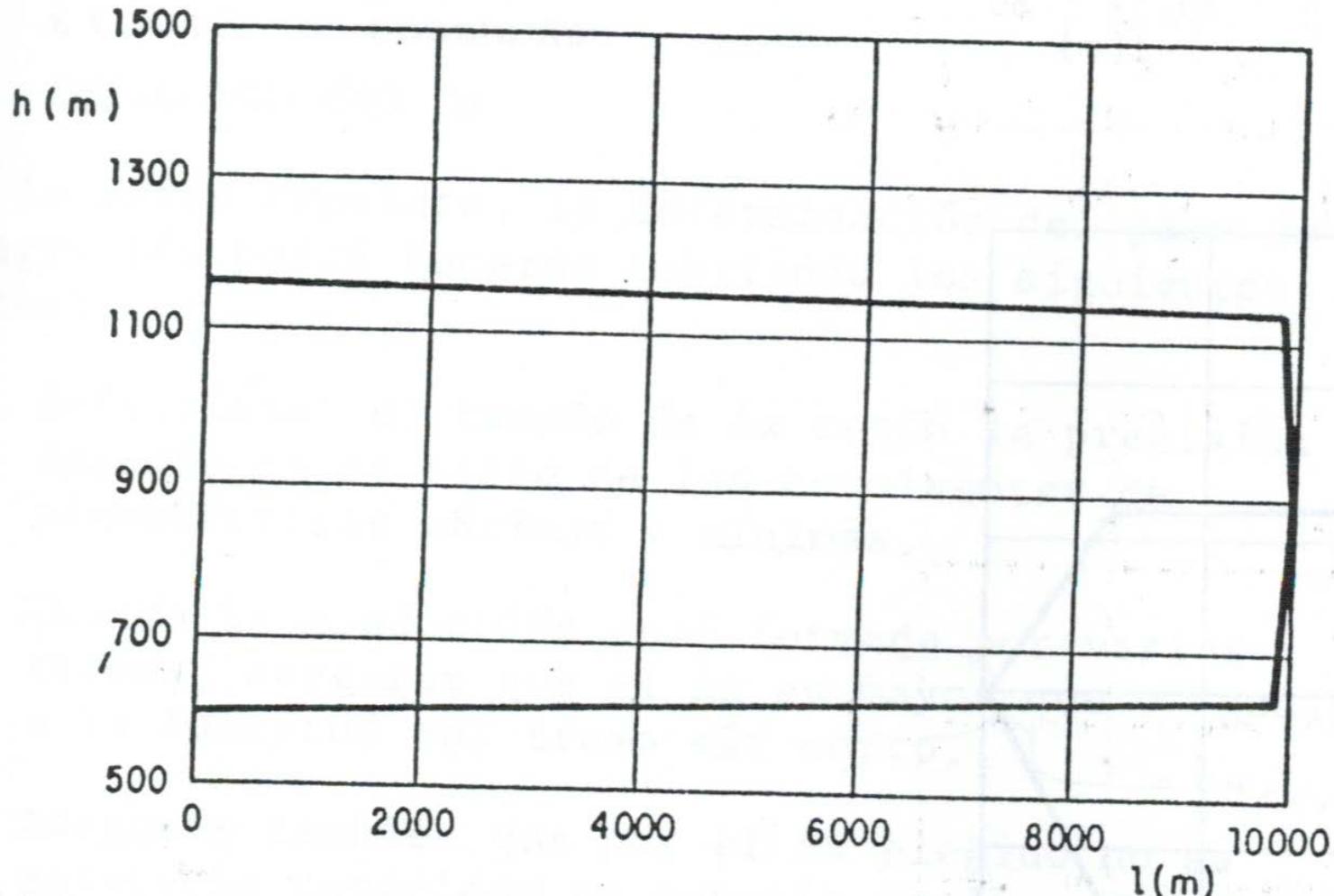
- Envoltente de carga piezométrica:



Intervalo Δt

Ejemplo: $\Delta t=0.1s$, $\Delta x=100m$

- Envoltente de carga piezométrica:

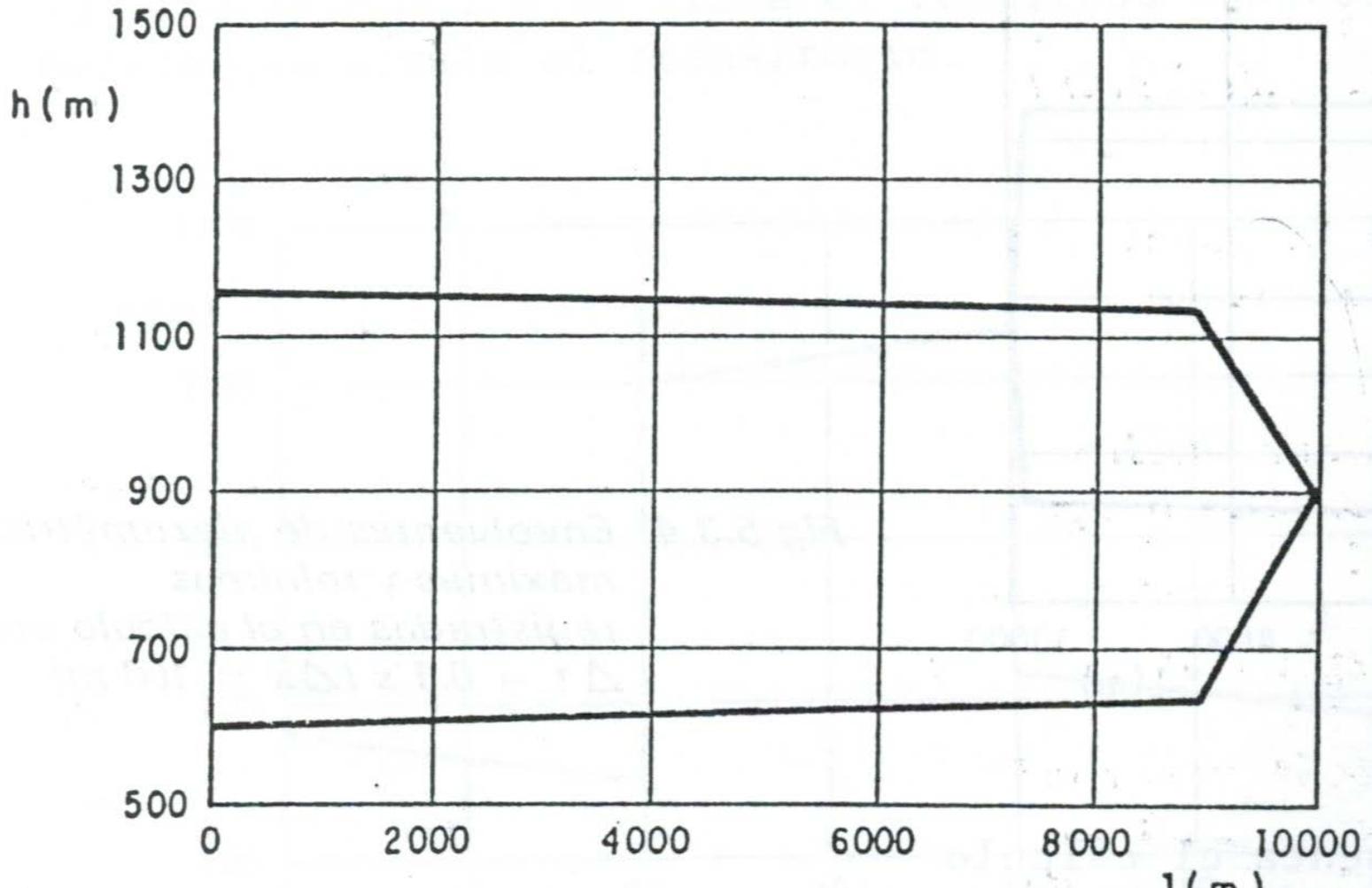


Intervalo Δt

Ejemplo:

$\Delta t=1s, \Delta x=1000m$

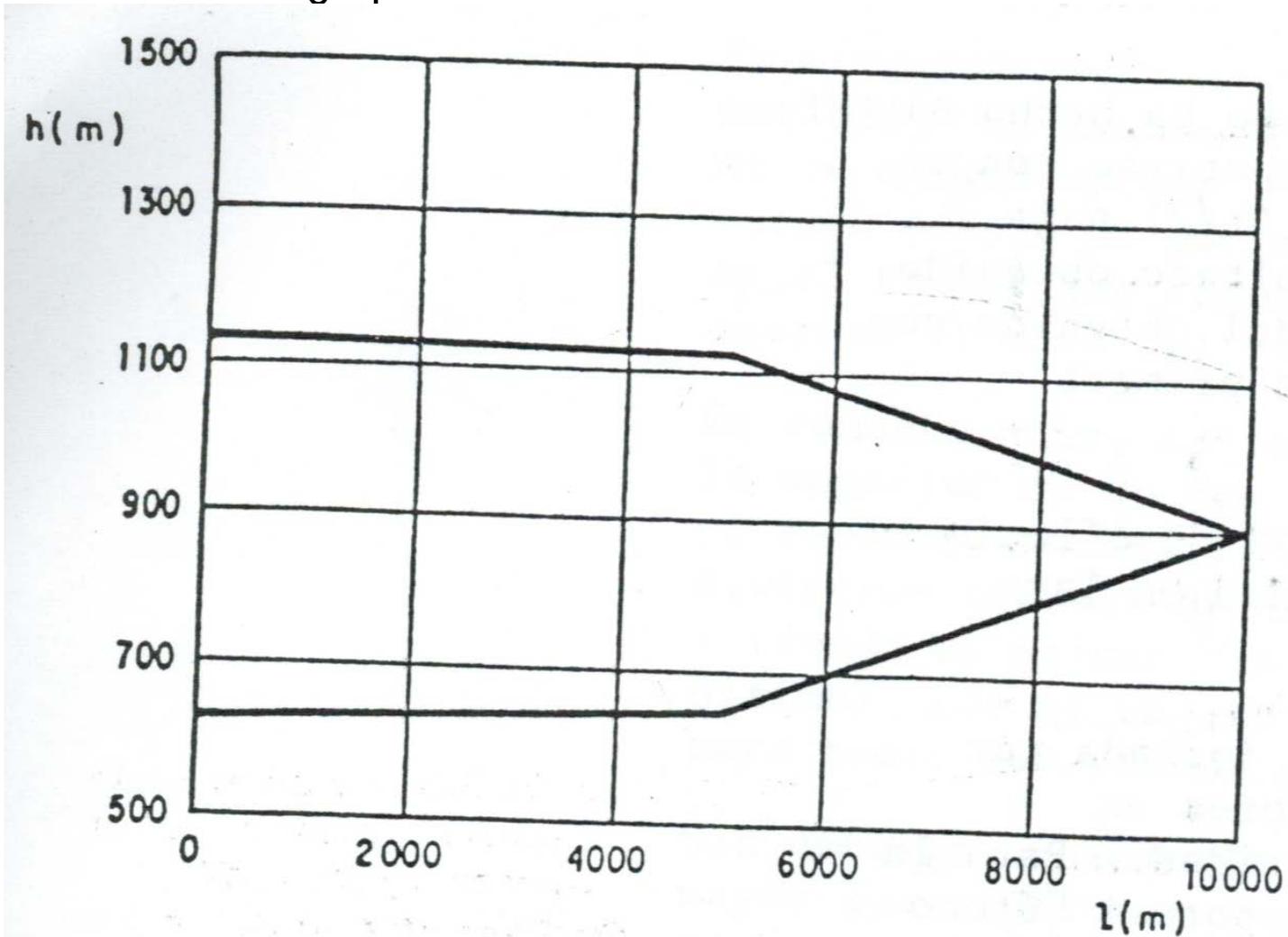
- Envolverte de carga piezométrica:



Intervalo Δt

Ejemplo: $\Delta t=5s, \Delta x=5000m$

- Envoltente de carga piezométrica:



Intervalo Δt

Selección

1. Seleccionar Δx , según la precisión deseada en las envolventes de piezométricas máximas y mínimas.
2. Verificar: $\Delta x \leq L$ tramo más corto.
3. Calcular $\Delta t = \Delta x / a$.
4. Verificar que Δt es suficientemente pequeño para simular el comportamiento dinámico de los dispositivos hidromecánicos. En caso contrario reducir el Δx para reducir Δt .

Intervalo Δt

Selección – varias tuberías

- ❑ **Ajuste de la celeridad (acueductos formados por varias tuberías).**
- ❑ Número j de tuberías, longitudes L_j , celeridades a_j .

$$\Delta t = \Delta x / a$$

- ❑ Se mantiene el Δt fijo.
- ❑ **$L_j / \Delta x = N_j \rightarrow$ puede no resultar entero.**

\Rightarrow Alternativas :

- ❑ Interpolación numérica: puede producir problemas con condiciones de borde
- ❑ **Ajuste de a_j para que N_j sea entero**
- ❑ Ajuste de L_j para que N_j sea entero

$$N_j = \frac{L_j}{\Delta t \cdot a_j}$$

Intervalo Δt

Selección – varias tuberías

- La celeridad es el parámetro que se conoce con menos precisión.
 - Variaciones de la celeridad en un margen de 10 a 15% no influyen significativamente en la máxima sobrepresión alcanzada.
 - La celeridad no es rigurosamente constante, sino que depende de la presencia de gases disueltos en el agua o burbujas y de la presión.
- ⇒ **Es preferible realizar ajuste sobre la celeridad.**

Intervalo Δt

Selección – varias tuberías

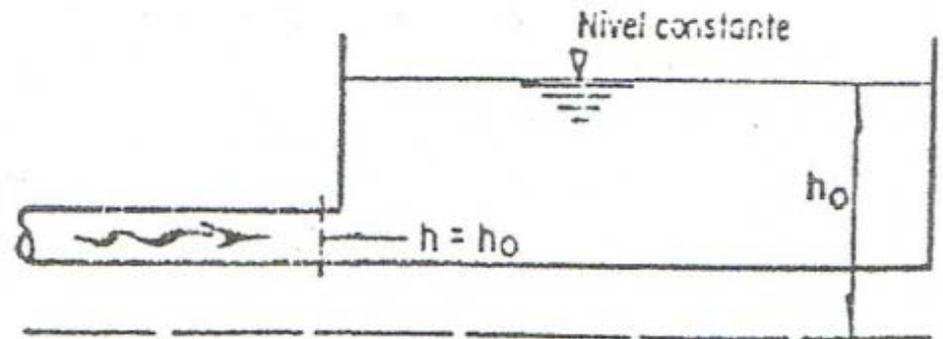
- Para el conducto más corto se elije Δx :
$$\Delta x_{\min} = \frac{L_{j\min}}{N_{\min}} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_{\min}}{a_{j\min}}$$
- Se calcula para el resto de los conductos:
$$N'_j = \frac{L_j}{\Delta t \cdot a_j}$$
- Se toma el entero más próximo:
$$N_j \rightarrow \Delta x_j = \frac{L_j}{N_j}$$
- Se ajusta la celeridad de forma de mantener Δt :
$$a_{j\text{Ajustada}} = \frac{\Delta x_j}{\Delta t}$$
- ⇒ Variación de la celeridad:
$$\psi = \frac{a_{j\text{Ajustada}} - a_j}{a_j} = \frac{L_j}{N_j \cdot \Delta t \cdot a_j} - 1$$
- En general ψ es suficientemente pequeño, en caso contrario se debe reducir N_{\min} y repetir el procedimiento.

CONDICIONES DE FRONTERA – MOC

Condiciones de frontera - MOC

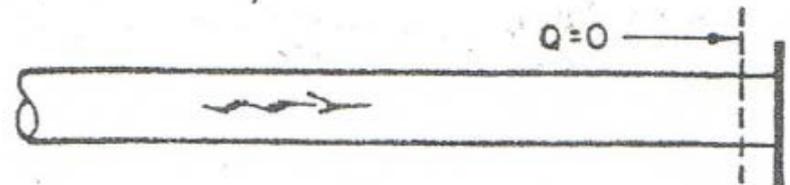
Tanque de carga constante

- $h_p(L) = h_0$ para todo t .



Tubería con extremo cerrado

- $Q_p(L) = 0$ para todo t .

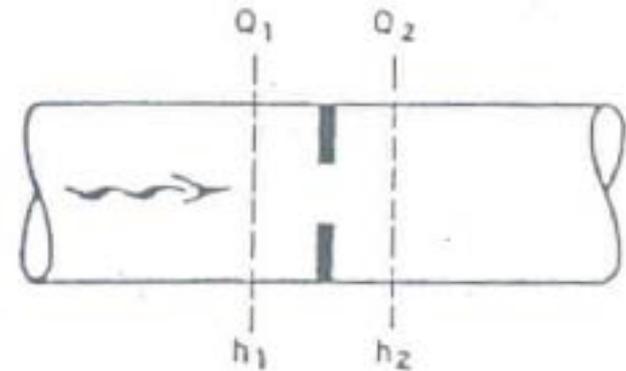


Condiciones de frontera - MOC

Pérdida de carga localizada

Para todo t:

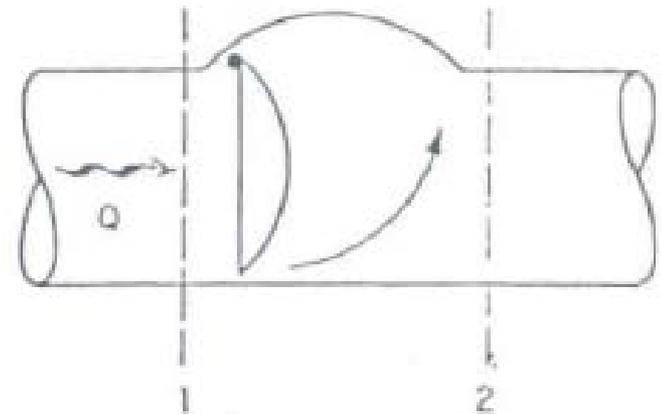
- $Q_{1p} = Q_{2p} = Q_p$
- $Q_p = C_q A \sqrt{2g(h_{1p} - h_{2p})}$



Válvula de retención

Para todo t:

- Si $h_1 \leq h_2$, $Q_p = 0$
- $h_1 > h_2$, $Q_p = C_q A \sqrt{2g(h_{1p} - h_{2p})}$



Condiciones de frontera - MOC

Válvula que cierra o abre en el tiempo

$$Q_{1p} = Q_{2p} = Q_p$$

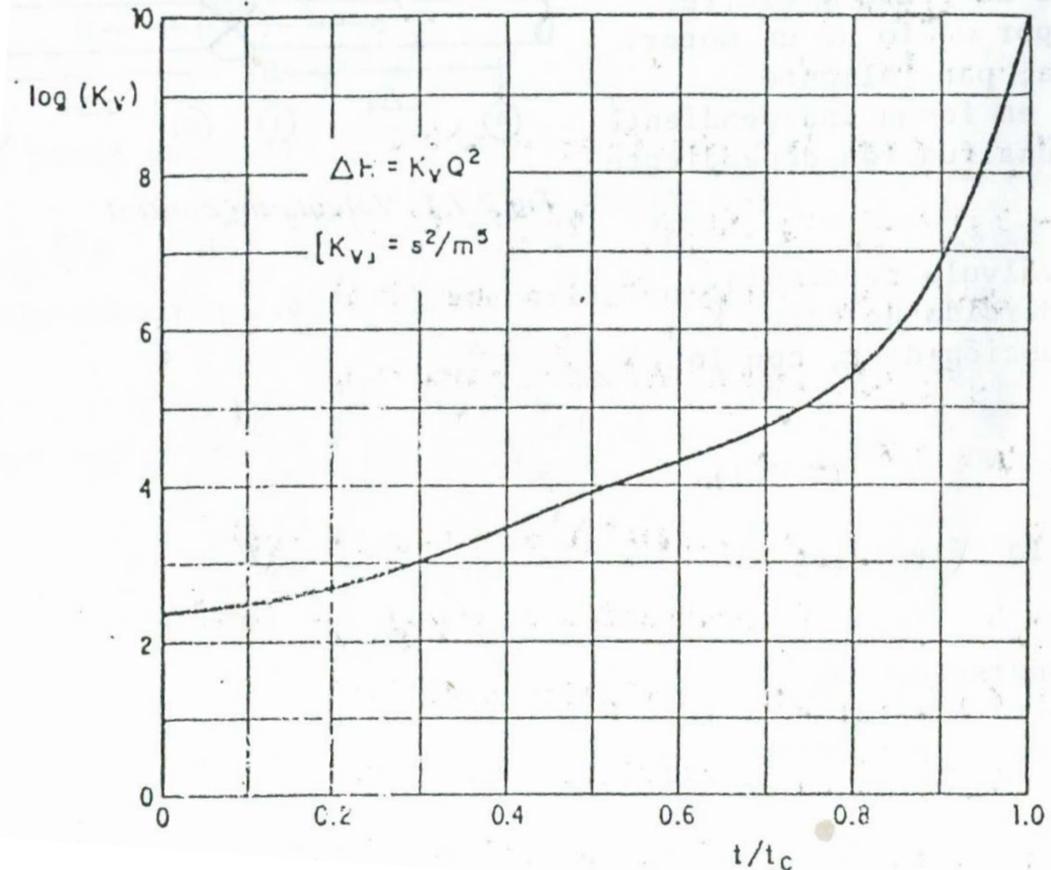
$$h_{1p} = h_{2p} + k_v(t)Q_p|Q_p|$$

Siendo:

$$k_v(t) = k_v(\theta(t))$$

$k_v(\theta)$: depende de la válvula

$\theta(t)$: ley de cierre de la válvula (depende del mecanismo de cierre)

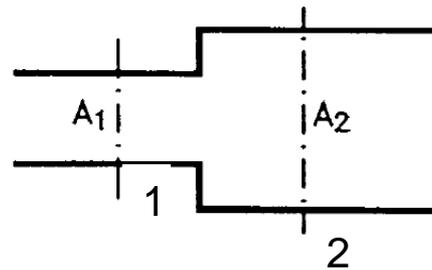


Condiciones de frontera - MOC

Cambio de tubería (D, e, material, f, etc.)

$$Q_{1p} = Q_{2p}$$

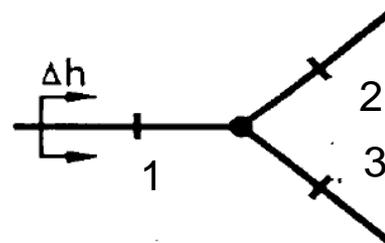
$$h_{1p} = h_{2p}$$



Bifurcación

$$Q_{1p} = Q_{2p} + Q_{3p}$$

$$h_{1p} = h_{2p} = h_{3p}$$



Otras

- Bombas
- Dispositivos de control antiarriete (tanques de oscilación, tanque unidireccional, cámaras de aire, válvulas de alivio, etc)