

Tópicos especiales y aplicaciones

Germán Capdehourat, Sergio Martínez, Pablo Musé
{gcapde, sematag, pmuse}@fing.edu.uy

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

24 de agosto de 2021

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

- ▶ Una señal determinística $x(t)$ de energía finita es de banda limitada B si

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(f) = \hat{x}(f) = 0 \quad \forall |f| \geq B.$$

- ▶ Una señal determinística $x(t)$ de energía infinita pero de potencia finita es de banda limitada B si su PSD es de banda limitada:

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \mathcal{F}\{\bar{R}_x(\tau)\}(f) \\ &= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t)dt \right\}(f) = 0 \quad \forall |f| \geq B. \end{aligned}$$

- ▶ Un criterio válido para los dos casos es ver si, al ser pasado por un LPF $H(f) = \mathbb{I}\{|f| < B\}$, el proceso no es modificado.
- ▶ Para procesos estocásticos es necesario trabajar con la media cuadrática $X(f)$, i.e. pedir que la PSD sea de banda limitada, ya que con este criterio un proceso puede ser de banda limitada sin requerir que todas las realizaciones sean funciones de banda limitada.

Teorema del muestreo para procesos WSS

La versión débil del teorema del muestreo, válida para procesos WSS de banda limitada en m.c. (i.e. procesos cuya PSD es de banda limitada), es la siguiente.

Teorema (Muestreo de procesos WSS de banda limitada en m.c.)

Sea $X(t)$ un proceso WSS tal que

$$S_X(f) = 0 \quad \forall |f| > \frac{1}{2T}.$$

Entonces, el error cuadrático medio entre el proceso interpolado a partir de sus muestras discretas $\{X(nT)\}$ y el proceso continuo $X(t)$ es nulo, i.e.

$$\mathbb{E} \left[\left(X(t) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T} \right)^2 \right] = 0.$$

Teorema del muestreo para procesos WSS (cont.)

Demostración

Llamaremos $\tilde{X}(t)$ a la señal interpolada

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) \operatorname{sinc}((t - nT)/T).\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) X(t) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) \tilde{X}(t) \right].\end{aligned}$$

Veremos que si $S_X(f) = 0 \forall |f| > 1/(2T)$, lo dos términos de la derecha son nulos.

Teorema del muestreo para procesos WSS (cont.)

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) X(t) \right] &= \mathbb{E} [X^2(t)] - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} [X(t)X(nT)] \operatorname{sinc}((t - nT)/T) \\ &= R_X(0) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT - t) \operatorname{sinc}((t - nT)/T).\end{aligned}$$

Como $\operatorname{supp}\{S_X\} \subset (-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T})$, vale el teorema del muestreo para R_X , i.e.

$$R_X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) \operatorname{sinc}((t - nT)/T).$$

Luego, para $a \in \mathbb{R}$, $R_X(t - a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) \operatorname{sinc}((t - a - nT)/T)$

$$\stackrel{\{mT=nT+a\}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(mT - a) \operatorname{sinc}((t - mT)/T).$$

Tomando $a = t$ tenemos $R_X(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(mT - t) \operatorname{sinc}((t - mT)/T)$,

por lo que el término en azul es nulo.

Teorema del muestreo para procesos WSS (cont.)

$$\mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) \tilde{X}(t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) X(nT) \right] \text{sinc}((t - nT)/T).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(X(t) - \tilde{X}(t) \right) X(nT) \right] &= \mathbb{E} [X(t)X(nT)] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} [X(kT)X(nT)] \text{sinc}((t - kT)/T) \\ &= R_X(t - nT) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X((k - n)T) \text{sinc}((t - kT)/T). \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos aplicar el teorema del muestreo a $R_X(t - nT)$:

$$R_X(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(kT - nT) \text{sinc}((t - kT)/T),$$

por lo que el término en **naranja** (y por lo tanto en **verde**) es nulo. \square

$$\begin{aligned} S_X(e^{i2\pi fT}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) e^{-i2\pi fnT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(u) e^{i2\pi unT} du \right] e^{-i2\pi fnT} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(u) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(u-f)nT} \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(u) \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - f - \frac{n}{T}\right) \right] du \quad (\text{Fórmula de Poisson}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(u) \delta\left(u - f - \frac{n}{T}\right) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_X\left(f + \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

(Por fórmulas de Poisson, ver apéndice.)

PSD del proceso muestreado (reconstrucción)

$$\begin{aligned}R_X(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) \operatorname{sinc}((t - nT)/T) \\ \Rightarrow S_X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) \mathcal{F}\{\operatorname{sinc}((t - nT)/T)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT) e^{-i2\pi fnT} \mathcal{F}\{\operatorname{sinc}(t/T)\} \\ \Leftrightarrow S_X(f) &= T S_X(e^{i2\pi fnT}) \mathbb{I}\{|f| \leq 1/2T\}\end{aligned}$$

\Rightarrow Si $S_X(f) = 0 \forall |f| \geq 1/(2T)$ podemos reconstruir $R_X(t)$ a partir de sus muestras, y más aún:

$$X(t) \stackrel{\text{m.c.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

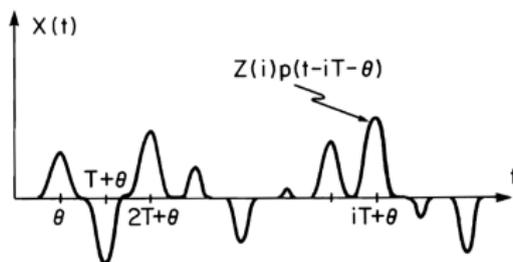
Apéndice: Fórmulas de Poisson

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Llamamos **señales PAM** (por *Pulse Amplitude Modulation*) a los procesos de la forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n p(t - nT - \theta)$$

- ▶ $\{Z_n\}$ secuencia WSS, de media m_Z y autocorrelación $R_Z[k]$
- ▶ $p(t)$ la forma del pulso utilizada para transmitir Z_n sobre el canal
- ▶ T el tiempo asignado a cada símbolo Z_n
- ▶ θ una fase determinística o aleatoria, según el modelo considerado.



Modulación por amplitud de pulso (PAM) (cont.)

- ▶ Retardo θ constante: situación de sincronismo de símbolo perfecto

$$\mathbb{E}[X(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_Z\{Z_n\} p(t - nT - \theta)$$

$$= m_Z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT - \theta) := m_Z g(t - \theta)$$

$$R_X(t + \tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_Z\{Z_n Z_m\} p(t + \tau - nT - \theta) p(t - mT - \theta)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_Z[n - m] p(t + \tau - nT - \theta) p(t - mT - \theta)$$

$$\stackrel{k=n-m}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t + \tau - nT - \theta) p(t - nT + kT - \theta)$$

$$:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] g_k^T(t - \theta)$$

Modulación por amplitud de pulso (PAM) (cont.)

Retardo θ constante (cont.)

Obs: Vemos que g, g_k^T son T -periódicas

$\Rightarrow \mathbb{E}[X(t)], R_X(t + \tau, t)$ T -periódicas en t

$\Rightarrow X(t)$ **no es WSS** (energía infinita) pero sí ciclo-estacionario (potencia finita)

\Rightarrow Para obtener su PSD promediamos sobre un intervalo:

$$\begin{aligned}\bar{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T R_X(t + \tau, t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \frac{1}{T} \int_0^T g_k^T(t - \theta) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \bar{g}_k^T.\end{aligned}$$

- ▶ Retardo $\theta \sim f_\theta(\theta)$, independiente de Z_n : defasaje desconocido

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}_\theta\{\mathbb{E}_Z\{X(t)|\theta\}\} \\ &= m_Z \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\theta)f(\theta)d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_X(t+\tau, t) &= \mathbb{E}_\theta\{\mathbb{E}_Z\{X(t+\tau)X(t)|\theta\}\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^T(t-\theta)f(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Modulación por amplitud de pulso (PAM) (cont.)

Retardo $\theta \sim f_\theta(\theta)$, independiente de Z_n (cont.)

Obs: Vemos que el proceso **no es WSS** pero sí **WS-ciclo-estacionario**, por lo que **nos interesa el promedio temporal de la autocorrelación**:

$$\begin{aligned}\bar{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_k^T(t-\theta) f(\theta) d\theta \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}_k^T(t-\theta) dt \right) f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \overline{\mathbf{g}_k^T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \overline{\mathbf{g}_k^T}\end{aligned}$$

Modulación por amplitud de pulso (PAM) (cont.)

- ▶ Caso particular: $f_\theta = \mathcal{U}[0, T)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}_\theta\{\mathbb{E}_Z\{X(t)|\theta\}\} = m_Z \frac{1}{T} \int_0^T g(t-\theta) d\theta \\ &= m_Z \bar{g}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_X(t+\tau, t) &= \mathbb{E}_\theta\{\mathbb{E}_Z\{X(t+\tau)X(t)|\theta\}\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \frac{1}{T} \int_0^T g_k^\tau(t-\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \bar{g}_k^\tau\end{aligned}$$

En este caso el proceso sí es WSS

⇒ En todos los casos obtenemos la misma media y autocorrelación

$$\mathbb{E}[X(t)] = m_Z \bar{g}, \quad \bar{R}_X(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \bar{g}_k^\tau$$

Para calcular la PSD de la PAM basta con calcular \bar{g} y $\overline{g_k^T}$:

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T p(t - nT) dt \\ &\stackrel{u=t-nT}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-nT}^{T-nT} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \langle p(t) \rangle \\ \overline{g_k^T} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t + \tau - nT) p(t - nT + kT) dt \\ &\stackrel{u=t-nT}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-nT}^{T-nT} p(u + \tau) p(u + kT) du \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p(u + \tau) p(u + kT) du = \frac{1}{T} R_p(\tau - kT).\end{aligned}$$

(Autocorrelación normalizada de los pulsos en $\tau - kT$).

Luego,

$$\mathbb{E}[X(t)] = m_Z \langle p(t) \rangle$$
$$\bar{R}_X(t + \tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \bar{g}_k^\tau = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] R_p(\tau - kT)$$

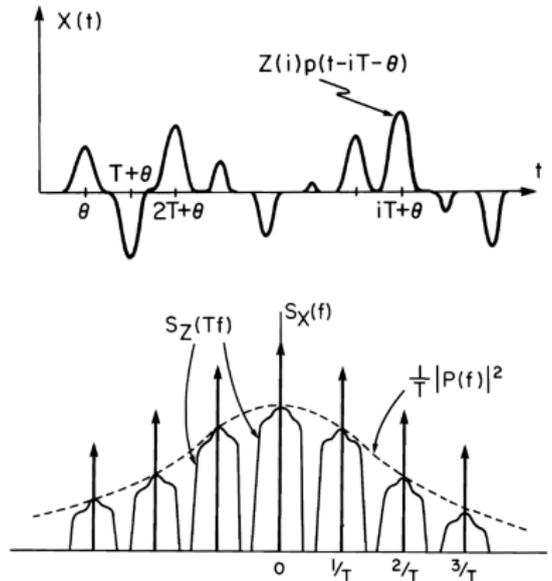
Aplicando la FT tenemos la PSD:

$$S_X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] \mathcal{F}\{R_p(\tau - kT)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] |\hat{p}(f)|^2 e^{-i2\pi f k T}$$
$$= \frac{|\hat{p}(f)|^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_Z[k] e^{-i2\pi f k T} = \frac{|\hat{p}(f)|^2}{T} S_Z(e^{i2\pi f T}).$$

(Tasa de símbolos $1/T$) \times (Densidad de energía del pulso) \times (PSD de $\{Z_n\}$).

$$S_X(f) = \frac{|\hat{p}(f)|^2}{T} S_Z(e^{i2\pi f T})$$

PSD de la PAM (cont.)



Como $\mathbb{E}[X(t)] = m_Z \langle p(t) \rangle$, si $m_Z \neq 0$ y $\langle p(t) \rangle \neq 0$, $S_X(f)$ tiene Diracs en k/T .

Ejemplo: Z_n iid de media μ , varianza σ^2

Tenemos

$$\begin{aligned} R_Z(k) &= \mathbb{E}[Z_{n+k}Z_n] = \mathbb{E}[(Z_{n+k} - \mu)(Z_n - \mu)] + \mu^2 \\ &= \sigma^2\delta[k] + \mu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_Z(e^{i2\pi fT}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma^2\delta[k]e^{-i2\pi fkT} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-i2\pi fkT} \\ &= \sigma^2 + \frac{\mu^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T) \quad (\text{usamos fórmula de Poisson}) \end{aligned}$$

Luego,

$$S_X(f) = \frac{\sigma^2}{T} |\hat{p}(f)|^2 + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{p}(k/T)|^2 \delta(f - k/T).$$

Ejemplo: PAM con pulso seno cardinal

Sea $X(t)$ WSS, ancho de banda W , i.e. $S_X(f) = 0 \quad \forall |f| \geq W$.

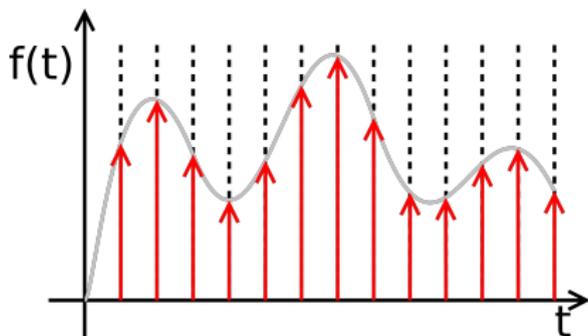
$Z_n := X(nT_s)$ con $T_s < 1/(2W)$:

$$\Rightarrow S_Z(e^{i2\pi f T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_X\left(f - \frac{k}{T_s}\right).$$

Consideramos $p(t) = \text{sinc}(t/T_s) \leftrightarrow \hat{p}(f) = T_s \mathbb{I}\left\{|f| \leq \frac{1}{2T_s}\right\}$.

La señal PAM es $X_{\text{PAM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}((t - nT_s - \theta)/T_s)$.

Como $T_s < 1/(2W)$, tenemos $X_{\text{PAM}}(t) \stackrel{\text{m.c.}}{=} X(t - \theta)$.



Además, como sabemos,

$$\begin{aligned} S_{X_{\text{PAM}}}(f) &= \frac{|\hat{p}(f)|^2}{T_s} S_Z(e^{i2\pi f T_s}) \\ &= \frac{1}{T_s} \left| T_s \mathbb{I} \left\{ |f| \leq \frac{1}{2T_s} \right\} \right|^2 S_Z(e^{i2\pi f T_s}) \\ &= \mathbb{I} \left\{ |f| \leq \frac{1}{2T_s} \right\} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_X \left(f - \frac{k}{T_s} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S_{X_{\text{PAM}}}(f) = S_X(f).$$

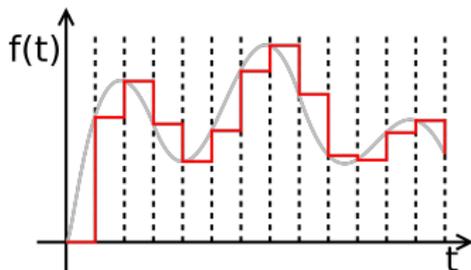
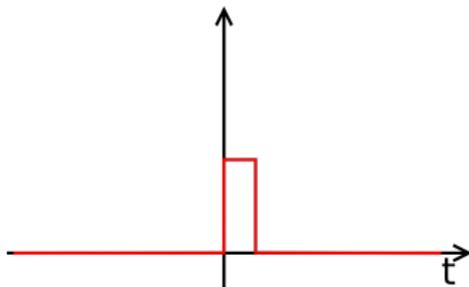
(reconstrucción perfecta).

Ejemplo: bloqueador de orden 0

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \leftrightarrow e^{-i2\pi fT/2} T \operatorname{sinc}(fT)$$

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kT) \Pi\left(\frac{t - kT - T/2}{T}\right)$$

$$S_Y(f) = \operatorname{sinc}^2(fT) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_X(f - k/T).$$

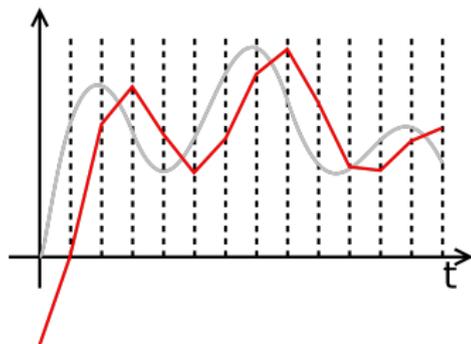
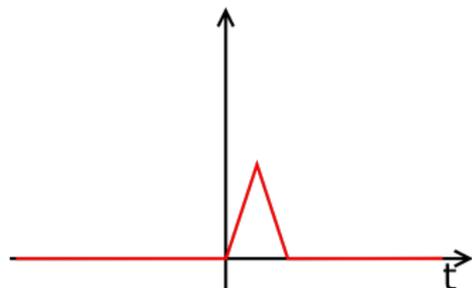


Ejemplo: bloqueador de orden 1

$$p(t) = \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right) \leftrightarrow e^{-i2\pi fT} T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kT) \Lambda\left(\frac{t-kT-T}{T}\right)$$

$$S_Y(f) = \operatorname{sinc}^4(fT) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_X(f - k/T).$$



Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

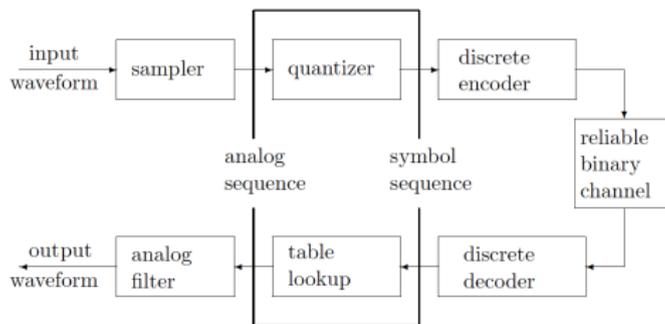
- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Cuantización de señales a valores continuos

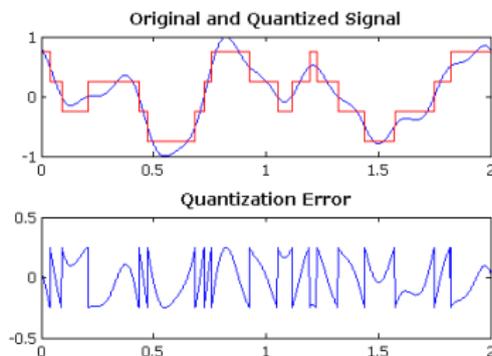
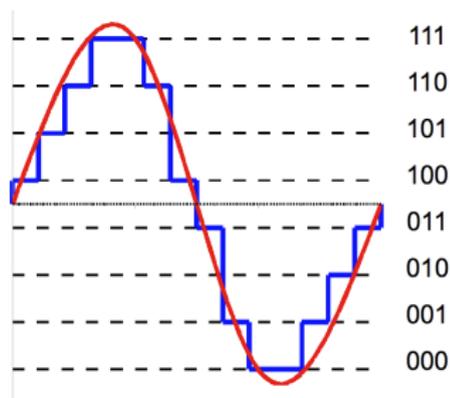
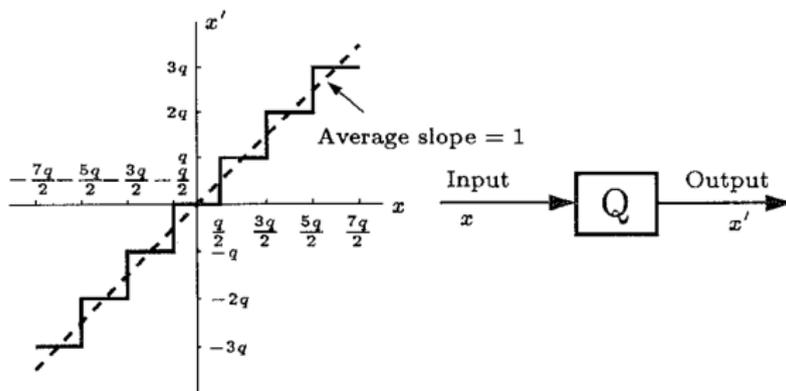
En los sistemas de comunicación digital:

- (i) Se discretiza la señal: $X(nT_s)$, $n \in \mathbb{Z}$
- (ii) Se cuantiza sus valores: $Q[X(nT_s)] = X_q(nT_s)$
- (iii) Se codifica sus valores cuantizados (típicamente en binario)
- (iv) Se envían '0's y '1's por el canal (e.g. como $\pm A$, o 0 y $+A$ voltios)



Seguiremos la exposición de Widrow et al., *Statistical theory of quantization*, IEEE Trans. on Instr. and Meas., 45(6), 1996.

Cuantización de señales a valores continuos (cont.)

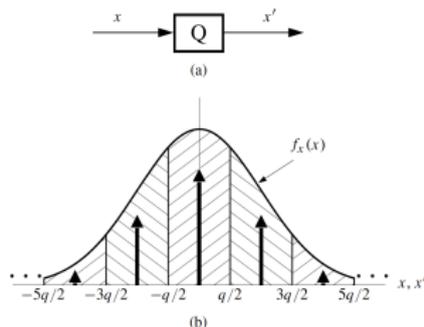


Modelado del proceso de cuantización

Sea $X(t)$ un proceso, $X(\omega, t) : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos la VA $X = X(t_0)$ para un tiempo t_0 dado, con pdf $f_X(x)$.

Supondremos que el rango del cuantizador cubre todo el rango dinámico de la señal (no hay saturación).



A toda amplitud en $[x - nq/2, x + nq/2)$ se le asigna el valor en nq :

$$f_{X_q}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nq) \int_{nq - q/2}^{nq + q/2} f_X(x) dx.$$

Modelado del proceso de cuantización (cont.)

Considerando el pulso rectangular de área 1

$$f_N(x) = \begin{cases} 1/q, & -q/2 < x \leq q/2 \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tenemos

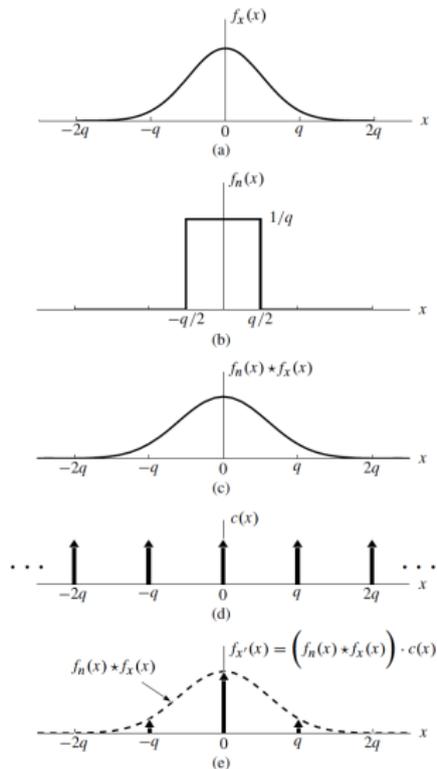
$$f_N * f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x-z)f_X(z)dz = \frac{1}{q} \int_{x-q/2}^{x+q/2} f_X(z)dz.$$

Multiplicando por el peine $c(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q\delta(x-nq)$, obtenemos

$$\begin{aligned} (f_N * f_X(x)) \cdot c(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q\delta(x-nq) \frac{1}{q} \int_{x-q/2}^{x+q/2} f_X(z)dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q\delta(x-nq) \frac{1}{q} \int_{nq-q/2}^{nq+q/2} f_X(z)dz = f_{X_q}(x). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X_q}(x) = (f_N * f_X(x)) \cdot c(x)}$$

Modelado del proceso de cuantización (cont.)



Paréntesis:

Se define la **función característica de X (CF)** como

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E} [e^{iuX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_X(x) dx.$$

(Es una transformada de Fourier)

Los momentos de X se obtienen de las derivadas de su CF en $u = 0$:

$$\left[\frac{d^n}{du^n} \Phi_X(u) \right]_{u=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^n e^{iux} f_X(x) dx \right]_{u=0} = i^n \mathbb{E} [X^n]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [X^n] = i^{-n} \left[\frac{d^n}{du^n} \Phi_X(u) \right]_{u=0}.$$

Q: Dada $\Phi_X(u)$, ¿cuánto vale $\Phi_{X_q}(u)$?

$$\Phi_N(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{iux} dx = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} e^{iux} dx = \text{sinc} \left(\frac{qu}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi_{X_q}(u) = \left(\Phi_X(u) \text{sinc} \left(\frac{qu}{2} \right) \right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u + k\Psi) \quad \left(\Psi := \frac{2\pi}{q} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi_{X_q}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_X(u + k\Psi) \text{sinc} \left(\frac{q(u + k\Psi)}{2} \right)$$

Obs: Analogía de la cuantización con el muestreo temporal:

- ▶ Aquí se cuantizan las amplitudes (cuantificación uniforme): $x \leftrightarrow t$
- ▶ El paso q juega el rol del intervalo de muestreo T_s : $q \leftrightarrow T_s$
- ▶ $\Psi = 2\pi/q$ juega el rol de la frec. de muestreo $\omega_s = 2\pi/T_s$: $\Psi \leftrightarrow \omega_s$

Modelado del proceso de cuantización (cont.)

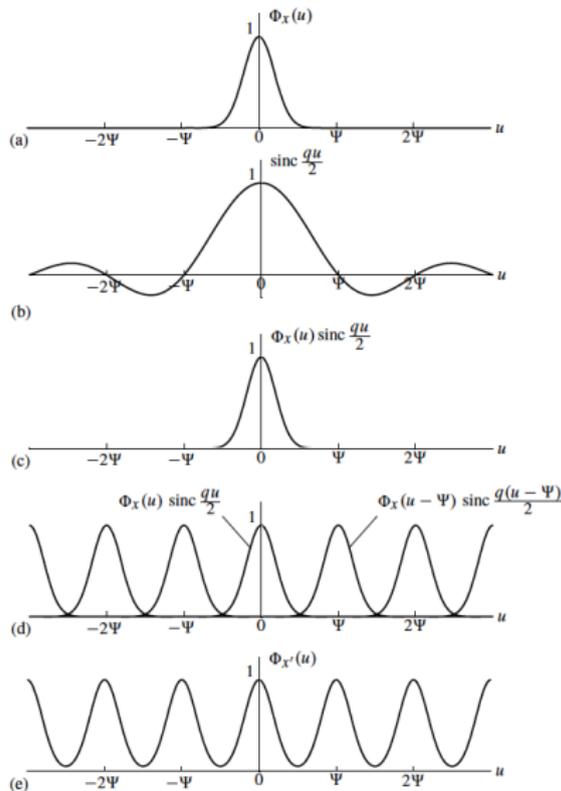
Teorema (Teorema de cuantización)

Si la CF de X es tal que

$$\Phi_X(u) = 0, \quad |u| \geq \frac{\Psi}{2} = \frac{\pi}{q},$$

entonces f_X se puede recuperar a partir de f_{X_q} .

⇒ Para que la señal cuantizada caracterice bien a la señal original, tenemos que cuantificar suficientemente fino.



Modelo de cuantización simplificado

- ▶ Postularemos un **modelo simplificado del proceso de cuantificación**
- ▶ Veremos **en qué circunstancias es válido**

Sea N una **VA independiente de X** , con pdf $f_N(x) = \mathcal{U}[-q/2, q/2]$.

N representará el **ruido de cuantización**, aditivo a X .

- ▶ Tenemos $\mathbb{E}[N] = 0$, $\text{var}[N] = q^2/12$.
- ▶ Como X y N son independientes,

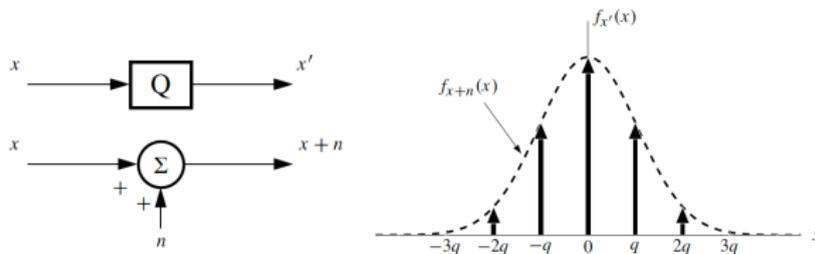
$$f_{X+N}(x) = f_N * f_X(x)$$

$$\Phi_{X+N}(u) = \Phi_X(u) \cdot \Phi_N(u) = \Phi_X(u) \cdot \text{sinc}\left(\frac{qu}{2}\right).$$

Modelo de cuantización simplificado (cont.)

Recordando la expresión de f_{X_q} , tenemos que $f_{X_q}(x) = f_{X+N}(x) \cdot c(x)$.

Es claro que los dos modelos representan procesos bien distintos:



- ▶ El cuantizador $Q[\cdot]$ es no lineal; el modelo de ruido aditivo es lineal
- ▶ f_{X_q} es un tren de Diracs; f_{X+N} es en general continua y suave
- ▶ La CF de X_q es Ψ -periódica; la CF de $X + N$ no es periódica

⇒ ¿Cuál es el interés del modelo simplificado?

Relación entre modelo exacto y modelo simplificado

Para ver su interés, **comparemos los momentos de X_q y de $X + N$.**

Vimos que para una VA Z , sus momentos pueden obtenerse de su CF:

$$\mathbb{E}[Z^n] = i^{-n} \left[\frac{d^n}{du^n} \Phi_Z(u) \right]_{u=0}.$$

Si la **cuantización es lo suficientemente fina** como para que las réplicas de $\Phi_X(u) \cdot \text{sinc}\left(\frac{qu}{2}\right)$ no se solapen en $u = 0$ (i.e. $\Phi_X(u) = 0 \forall |u| \geq \Psi - \epsilon$):

- ▶ En un entorno de $u = 0$, $\Phi_{X_q}(u) = \Phi_{X+N}(u)$
 - ⇒ Sus derivadas en $u = 0$ son iguales
 - ⇒ **Los momentos de X_q y $X+N$ son idénticos!**
 - ⇒ **Bajo estas condiciones, el modelo simplificado es válido.**

Tenemos entonces el **resultado** siguiente:

Si $\Phi_X(u) = 0$ para $|u| \geq \pi/q = \Psi/2$, por el teorema de cuantización

$$\Phi_{X_q}(u)\mathbb{I}\{|u| \leq \pi/q\} = \Phi_X(u) \operatorname{sinc}\left(\frac{qu}{2}\right),$$

*que coincide con $\Phi_{X+N}(u)$. Por ende, **ambos modelos son equivalentes**.*

Obs: Para que la igualdad de momentos siga siendo válida, **basta con**

$$\Phi_X(u) = 0 \text{ para } |u| \geq 2\pi/q - \epsilon = \Psi - \epsilon,$$

con $\epsilon > 0$ pequeño, ya que no afecta las derivadas de $\Phi_{X_q}(u)$ en $u = 0$.

Relación entre modelo exacto y modelo simplificado (cont.)

⇒ En la práctica usaremos el modelo simplificado, asumiendo que

$$\Phi_X(u) = 0 \text{ para } |u| \geq \Psi - \epsilon :$$

El *error de cuantificación* de un proceso $X(t)$, para sus muestras $X(nT_s)$, se modela como un *ruido aditivo* $N(nT_s) \sim \mathcal{U}[-q/2, q/2)$, blanco, independiente de las muestras de $X(t)$.

⇒ El ruido de cuantización $N(nT_s) = X_q(nT_s) - X(nT_s)$ verifica:

- ▶ $\mathbb{E}[N(nT_s)] = 0$, $R_N(k) = \frac{q^2}{12} \delta[k]$
- ▶ $N(nT_s)$ independiente de $X(mT_s) \forall m, n$.

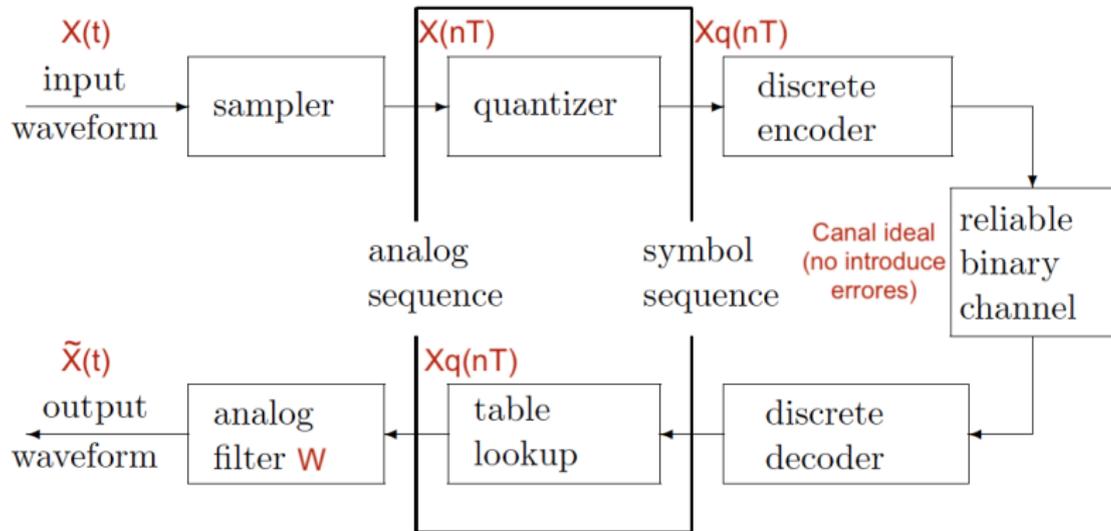
Para ver cuánto vale la PSD de $N(nT_s)$, usamos que:

- ▶ $S_N(e^{i2\pi f T_s}) = K$ constante (TF de una delta de Kronecker)
- ▶ Potencia del ruido de cuantización: $\mathbb{E}[N(nT_s)^2] = R_N(0) = \frac{q^2}{12}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N(nT_s)^2] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_N(e^{i2\pi f T_s}) df = K f_s \Rightarrow S_N(e^{i2\pi f T_s}) = \frac{q^2}{12 f_s}$$

Relación señal a ruido de cuantización

Consideremos una señal aleatoria $X(t)$ WSS de ancho de banda W .



Relación señal a ruido de cuantización (cont.)

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_q(nT_s) \operatorname{sinc}(2W(t - nT_s)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \operatorname{sinc}(2W(t - nT_s)) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(nT_s) \operatorname{sinc}(2W(t - nT_s)) \\ &= X(t) + N_{\text{out}}(t)\end{aligned}$$

De forma general, para cualquier señal $X(t)$ contaminada con ruido aditivo $N(t)$, se define la **relación señal a ruido** como

$$\text{SNR} := \frac{P_X}{P_N} = \frac{\mathbb{E}[X^2(t)]}{\mathbb{E}[N^2(t)]}.$$

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

En el caso del **ruido de cuantización** sabemos que

$$S_N(e^{i2\pi f T_s}) = \frac{\sigma_q^2}{f_s} = \frac{q^2}{12f_s}.$$

Luego,

$$S_{N_{\text{out}}}(f) = |\mathbb{I}\{|f| \leq W\}|^2 S_N(e^{i2\pi f T_s}) = \frac{q^2}{12f_s} \mathbb{I}\{|f| \leq W\}$$

$$P_{N_{\text{out}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{N_{\text{out}}}(f) df = \int_{-W}^W \frac{q^2}{12f_s} df = \frac{q^2 W}{6f_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{SNR_{\text{quant}} = \frac{P_X}{P_{N_{\text{out}}}} = \frac{6P_X f_s}{q^2 W}, \quad f_s \geq 2W}$$

Sobremuestrear aumenta la SNR de cuantización (reduce el ruido de cuantización sin afectar a la señal)

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

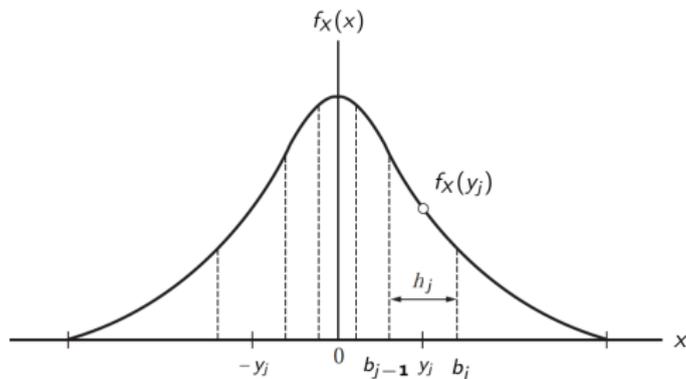
- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Cuantización no uniforme



- ▶ **Cuantización uniforme:** óptima para señales con distrib. uniforme
- ▶ **Cuantización no uniforme:** Si el factor de cresta $|X(t)|_{\max}/\sigma_X$ es grande,
 - ⇒ Conviene **cuantizar más finamente los valores más probables.**

Objetivo:

Suponiendo conocida $f_X(x)$, encontrar

- ▶ Los intervalos de cuantización $[b_{j-1}, b_j)$
- ▶ los valores cuantizados y_j

que **minimicen** la varianza del **error de cuantización**:

$$\sigma_q^2(b_0, b_1, \dots, b_{M-1}, y_1, y_2, \dots, y_M) = \sum_{i=1}^M \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 f_X(x) dx$$

Cuantización no uniforme (cont.)

$$(i) \quad \frac{d\sigma_q^2}{dy_j} = 0 \iff y_j \int_{b_{j-1}}^{b_j} f_X(x) dx = \int_{b_{j-1}}^{b_j} x f_X(x) dx$$

$$\iff y_j = \frac{\int_{b_{j-1}}^{b_j} x f_X(x) dx}{\int_{b_{j-1}}^{b_j} f_X(x) dx} \quad (\text{centroide de la pdf en } [b_{j-1}, b_j])$$

$$(ii) \quad \frac{d\sigma_q^2}{db_j} = 0 \iff \frac{d}{db_j} \left\{ \int_{b_{j-1}}^{b_j} (x - y_j)^2 f_X(x) dx + \int_{b_j}^{b_{j+1}} (x - y_{j+1})^2 f_X(x) dx \right\} = 0$$

$$\iff (b_j - y_j)^2 f_X(b_j) - (y_{j+1} - b_j)^2 f_X(b_j) = 0$$

$$\iff b_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \quad (\text{punto medio de } [y_j, y_{j+1}])$$

Algoritmo de Lloyd-Max: cuantización no uniforme óptima

Resolver iterativamente, de forma numérica, las ecuaciones acopladas:

$$y_j = \frac{\int_{b_{j-1}}^{b_j} x f_X(x) dx}{\int_{b_{j-1}}^{b_j} f_X(x) dx}, \quad b_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

Data: f_X, X_{min}, X_{max}, M

Result: Intervalos y centroides de cuantización

Inicialización: Elegir $y_1^{(0)} < y_2^{(0)} < \dots < y_M^{(0)}, \epsilon > 0$

$(\sigma_q^2)^{(0)} \leftarrow +\infty$

$b_j^{(0)} \leftarrow (y_j^{(0)} + y_{j+1}^{(0)})/2, \quad j = 0, \dots, M-1$

$(\sigma_q^2)^{(1)} \leftarrow \sigma_q^2(b_0^{(0)}, \dots, b_{M-1}^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_M^{(0)})$

$t \leftarrow 1$

while $|(\sigma_q^2)^{(t)} - (\sigma_q^2)^{(t-1)}| > \epsilon$ **do**

$y_j^{(t)} = 2b_j^{(t-1)} + y_j^{(t-1)}, \quad j = 0, \dots, M-1$

$b_j^{(t)} \leftarrow (y_j^{(t)} + y_{j+1}^{(t)})/2, \quad j = 0, \dots, M-1$

$(\sigma_q^2)^{(t+1)} \leftarrow \sigma_q^2(b_0^{(t)}, \dots, b_{M-1}^{(t)}, y_1^{(t)}, \dots, y_M^{(t)})$

$t \leftarrow t + 1$

end

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

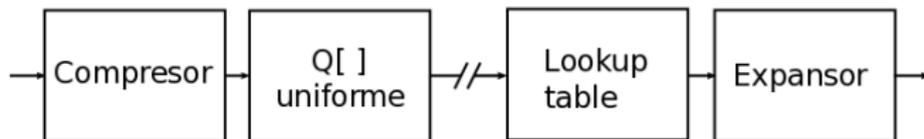
- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Cuantización no uniforme por compansión

Idea: comprimir el rango dinámico antes de cuantizar uniforme, y expandirlo en recepción:



Supondermos que $|X| < X_{\max}$ y cuantizador uniforme de M niveles.

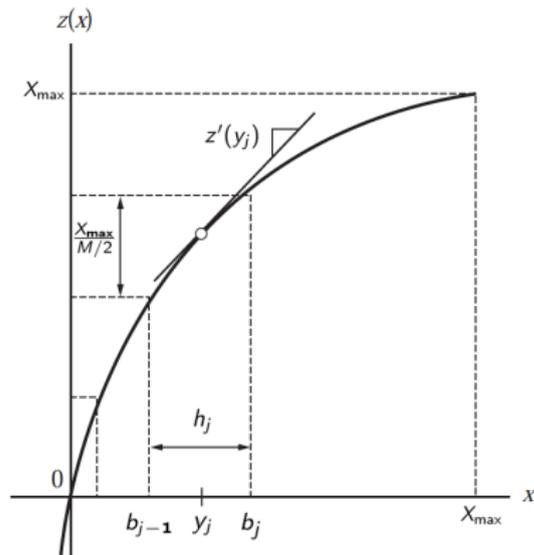
Objetivo:

- ▶ Encontrar una función de compresión que reduzca σ_q^2
- ▶ Si fuera posible, queremos que la compresión no dependa de $f_X(x)$

Cuantificación no uniforme por compansión (cont.)

Si los intervalos de cuantización son suficientemente chicos,

$$\begin{aligned}\left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=y_k} &= z'(y_k) \\ &\approx \frac{z(b_k) - z(b_{k-1})}{h_k} \\ &= \frac{2X_{\max}}{Mh_k} \\ \Rightarrow h_k &= \frac{2X_{\max}}{Mz'(y_k)}.\end{aligned}$$



Calculemos la varianza del ruido cuantización:

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \sum_{i=1}^M \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 f_X(x) dx \simeq \sum_{i=1}^M f_X(y_i) \underbrace{\int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 dx}_{h_i \sigma_q^2(h_i) = h_i^3 / 12} \\ &= \sum_{i=1}^M f_X(y_i) \frac{h_i^2}{12} h_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^M f_X(y_i) \left(\frac{2X_{\max}}{Mz'(y_i)} \right)^2 h_i \\ &= \frac{X_{\max}^2}{3M^2} \sum_{i=1}^M \frac{f_X(y_i)}{[z'(y_i)]^2} h_i \simeq \frac{X_{\max}^2}{3M^2} \int_{-X_{\max}}^{X_{\max}} \frac{f_X(x)}{[z'(x)]^2} dx\end{aligned}$$

Cuantificación no uniforme por compansión (cont.)

$$\sigma_q^2 \simeq \frac{X_{\max}^2}{3M^2} \int_{-X_{\max}}^{X_{\max}} \frac{f_X(x)}{[z'(x)]^2} dx$$

¿Podemos encontrar $z(x)$ tal que $\text{SNR}_{\text{cuant}}$ sea independiente de f_X ?

Tomemos $z(x)$ tal que $z'(x) = \frac{X_{\max}}{\alpha|x|}$.

$$\implies \sigma_q^2 \simeq \frac{\alpha^2}{3M^2} \int_{-X_{\max}}^{X_{\max}} x^2 f_X(x) dx = \frac{\alpha^2 \sigma_X^2}{3M^2}$$

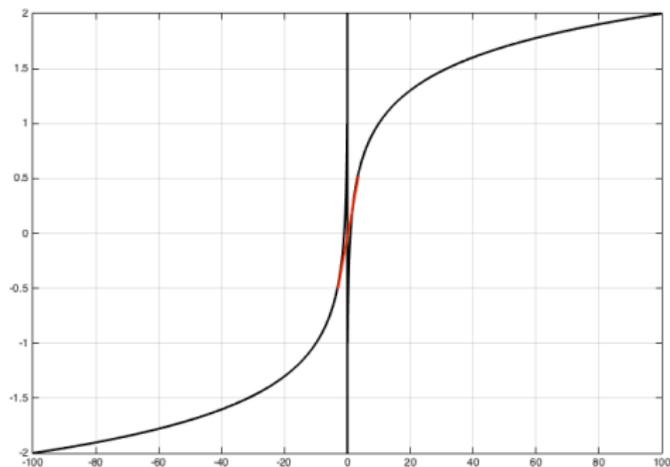
$$\implies \text{SNR}_{\text{cuant}} := \frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} \simeq \frac{3M^2}{\alpha^2}$$

Para ese $z'(x)$ tenemos

$$z(x) = A + \frac{X_{\max}}{\alpha} \text{sign}(x) \ln(|x|) \quad (A \text{ cte, tomamos } A = 0)$$

Cuantificación no uniforme por compansión (cont.)

$$z(x) = \frac{X_{\max}}{\alpha} \text{sign}(x) \ln(|x|) \quad \text{no está definida en } x = 0.$$



⇒ Se interpola linealmente los dos logaritmos

Cuantificación no uniforme por compansión (cont.)

Este método se usa comúnmente en **telefonía**. Para amplitudes normalizadas a $[-1, 1]$:

► **Ley μ : USA & Japón**

$$z(x) = \text{sign}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)}, \quad |x| \leq 1.$$

► **Ley **A**: Resto del mundo**

$$z(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) \frac{A|x|}{1+\ln(A)}, & |x| < \frac{1}{A} \\ \text{sign}(x) \frac{1+\ln(A|x|)}{1+\ln(A)}, & \frac{1}{A} \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

- ▶ Consiste en **agregar un ruido $d(t)$** a la señal $X(t)$, independiente
 - ⇒ Claramente esto **deteriorará la SNR**
 - ⇒ **¿Tiene sentido?**

Ejemplos

- ▶ Audio
- ▶ Imágenes

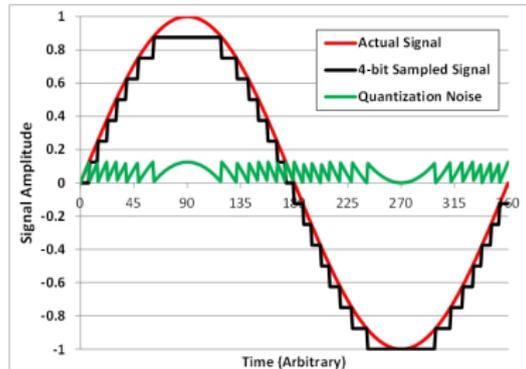


Original; cuantizada en dos niveles; dithering + cuantizada en dos niveles

¿Por qué funciona?

Cuantización gruesa

⇒ El error de cuantización se vuelve correlacionado con la señal



- ▶ El error de cuantización **deja de percibirse como ruido**
- ▶ Acople que **distorsiona la señal** (efecto auditivo más nocivo).
- ▶ **Agregando ruido se decorrelacionan** error de cuantización y señal.
- ▶ **Fácil de ver en imágenes:** cuánto más cerca se está del nivel superior, más puntos saltan de nivel generando una especie de *dégradé*.

Dithering: justificación (cont.)

Idea: sumar ruido d independiente de la señal

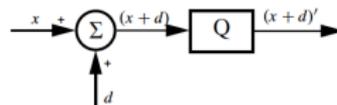


Figure 19.1 Dither added to the quantizer input.

► d, X independientes

$$\Rightarrow f_{X+d} = f_X * f_d$$

$$\Rightarrow \Phi_{X+d} = \Phi_X \cdot \Phi_d$$

► Como vemos, si $\Phi_d(f) = 0$
 $\forall |f| \geq \Psi - \epsilon = \frac{2\pi}{q} - \epsilon$

\Rightarrow modelo simplificado válido
para $X + d$

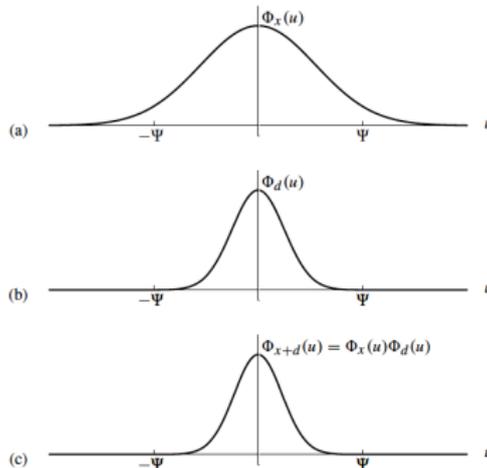
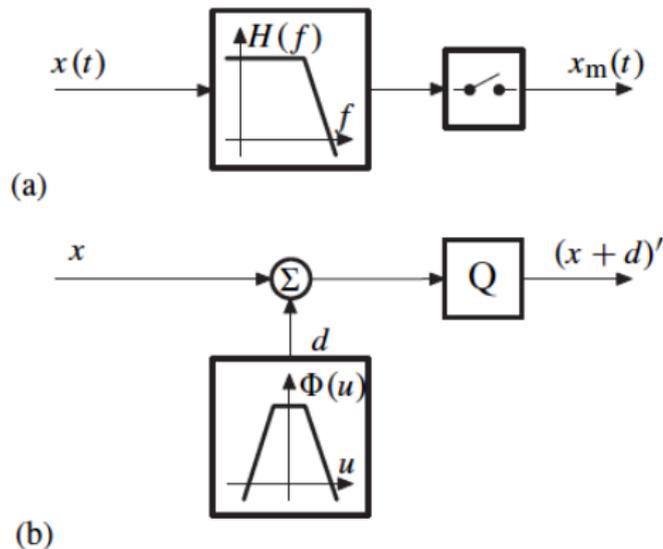


Figure 19.2 Bandlimitation of quantizer input CF resulting from dithering with a band-limited independent dither signal: (a) CF of x ; (b) CF of d ; (c) CF of $(x+d)$. $\Psi = 2\pi/q$.

Dithering: justificación (cont.)

Funciona de forma análoga a filtrar pasabajo para evitar aliasing al muestrear:



Dithering uniforme:

- ▶ Si $d \sim \mathcal{U}[-q/2, q/2]$ indep. de X , su CF es $\Phi_d(u) = \text{sinc}(qu/2)$.
- ▶ Si bien no hay solapamiento de las réplicas de $\Phi_{X+d}(u) \text{sinc}(qu/2)$, las derivadas en $u = 0$ pueden verse afectadas por éstas.
- ▶ En general el ruido de cuantización estará correlacionado con d , pudiendo generar distorsiones indeseables.

Dithering triangular:

- ▶ Sumamos dos ruidos independientes entre sí y de X con distribución $\mathcal{U}[-q/2, q/2]$
 - ⇒ La pdf de de la suma es triangular y su CF es $\text{sinc}^2(qu/2)$.
- ▶ Como $\text{sinc}^2(qu/2)$ tiene derivada nula $u = 0$, y es bastante plana en una vecindad de $u = 0$, las réplicas casi no afectan los momentos
- ▶ El modelo simplificado es prácticamente válido.

Dithering gaussiano de $\sigma \geq q/2$:

- ▶ Este dithering es muy utilizado en la práctica.
- ▶ Si bien ni las réplicas de Φ_{X+d} ni sus derivadas son nulas en $u = 0$, son lo suficientemente pequeñas para no afectar los momentos.

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Noise shaping

- ▶ Permite procesar el dither para hacerlo menos audible
- ▶ Permite manipular el ruido de cuantización y el dither con criterios psicoacústicos.

Principio:

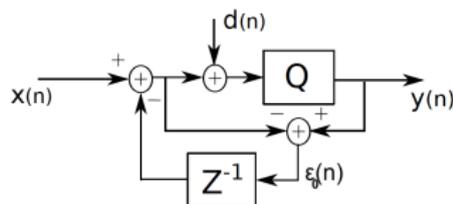
$$Y(n) = Q[X(n) + d(n) - \varepsilon_0(n-1)] \\ = X(n) + d(n) - \varepsilon_0(n-1) + \varepsilon(n) \quad (1)$$

$$\Rightarrow Y(n) - (X(n) - \varepsilon_0(n-1)) = d(n) + \varepsilon(n) \quad (2)$$

$$\varepsilon_0(n) = Y(n) - (X(n) - \varepsilon_0(n-1)) \stackrel{(2)}{=} d(n) + \varepsilon(n) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0(n-1) \stackrel{(3)}{=} d(n-1) + \varepsilon(n-1)$$

$$\Rightarrow Y(n) \stackrel{(1)}{=} X(n) + \underbrace{d(n) - d(n-1) - \varepsilon(n-1) + \varepsilon(n)}_{\varepsilon_{\text{total}}(n)}$$

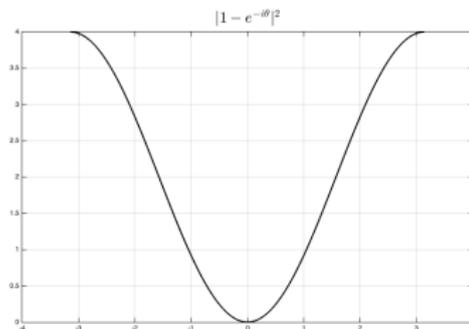


Noise shaping (cont.)

$$\varepsilon_{\text{total}}(n) = (d(n) + \varepsilon(n)) - (d(n-1) - \varepsilon(n-1))$$

$$\Rightarrow \widehat{\varepsilon}_{\text{total}}(e^{i\theta}) = (1 - e^{-i\theta})(\widehat{d}(e^{i\theta}) + \widehat{\varepsilon}(e^{i\theta}))$$

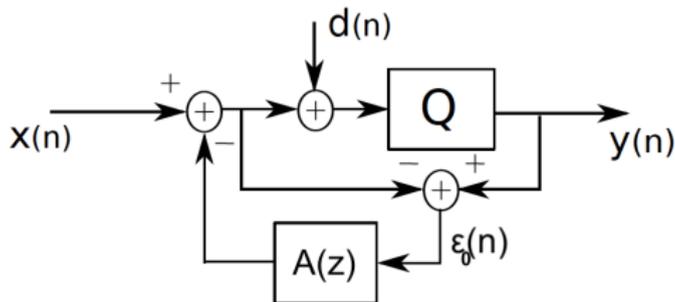
$$\Rightarrow S_{\varepsilon_{\text{total}}}(e^{i\theta}) = |1 - e^{-i\theta}|^2 S_{d+\varepsilon}(e^{i\theta})$$



Filtro pasa-altos \Rightarrow mueve el ruido hacia las altas frecuencias

Noise shaping (cont.)

De forma general, podemos sustituir el retardo por otro filtro $A(e^{i\theta})$:



$$\widehat{Y}(e^{i\theta}) = X(e^{i\theta}) + \widehat{\varepsilon}_{\text{total}}(e^{i\theta})$$

$$S_{\varepsilon_{\text{total}}}(e^{i\theta}) = |1 - A(e^{i\theta})|^2 S_{d+\varepsilon}(e^{i\theta}).$$

- ▶ Se puede **diseñar $A(e^{i\theta})$** para modificar el dither y el error de cuantización **usando criterios psicoacústicos**.

Muestreo de procesos estocásticos en tiempo continuo

Modulación por amplitud de pulso (PAM)

Cuantización de señales a valores continuos

- Relación señal a ruido de cuantización: sobremuestreo

- Cuantización no uniforme

- Cuantización no uniforme por compansión

- Dithering

- Noise shaping

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Apéndice: Fórmulas de Poisson

Sea $T > 0$. Se demuestra que para toda g continua e integrable que verifique:

- ▶ $\forall x, |g(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$ para constantes $C > 0, \alpha > 1$;
- ▶ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(2\pi n/T)| < +\infty$;

se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(2\pi n/T) e^{i2\pi nt/T}$$

En particular:

- ▶ Si $g(t) = \delta(t) \leftrightarrow \hat{g}(\omega) = 1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi nt/T}.$$

- ▶ En frecuencia, reemplazando t por f y T por $1/T$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi fnT}.$$

Apéndice: Transformada de Fourier del Peine de Dirac

Tenemos: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi nt/T}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right\} (f) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \left\{ e^{i2\pi nt/T} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi nt/T} e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f - n/T)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T} \right). \end{aligned}$$

La TF de un peine de dirac de período T , es otro peine de Dirac de período $1/T$.



W. A. Gardner

Introduction to Random Processes, with Applications to Signals and Systems

McGraw-Hill Publishing Company, 1989 (Chap. 11).



B. Widrow and I. Kollár

Quantization Noise: Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications

Cambridge University Press, 2008 (Chap. 4, 19).



K. Pohlmann

Principles of Digital Audio

McGraw-Hill Publishing Company, 2010 (Chap. 2).