Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 2
Procesos estocásticos
PSD, filtrado lineal de procesos, ruido blanco.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1

Sea X_n una señal con características de ruido blanco e Y_n otra señal estacionaria, independiente de X_n. Mostrar que la señal $Z_n = X_n Y_n$ también es ruido blanco, o sea que $\mathrm{E}[Z_n Z_{n+m}] = A\delta(m)$, donde A es una constante.

✦ Ejercicio 2 (10.38)

Considerar que un proceso estacionario X_t con características de ruido blanco y densidad espectral de potencia $N_0/2$ se aplica a la entrada de un filtro pasa-bajos con respuesta en frecuencia $H(f) = \tau sinc(\tau f)$. Hallar la autocorrelación del proceso a la salida y su potencia.

✦ Ejercicio 3

Considerar que un proceso estocástico Y_n es la salida de un sistema LTI de transferencia

$$H(e^{j\theta}) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^{-1}$$

La entrada X_n es un proceso estacionario con características de ruido blanco, de media nula y $\mathrm{E}[X_n^2] = \sigma_X^2$.

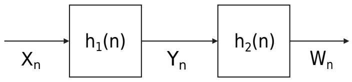
(a) Expresar $\mathrm{E}[Y_n^2]$ en función de $R_Y(n)$ o $S_Y(e^{j\theta})$.

(b) Determinar $S_Y(e^{j\theta})$, la densidad espectral de potencia de Y_n.

(c) Determinar $R_Y(n)$, la función de autocorrelación de Y_n.

★ Ejercicio 4

Sea X_n un proceso real, estacionario, con características de ruido blanco, de media nula y varianza σ_X^2. Hagamos que X_n sea la entrada a la cascada de dos sistemas discretos lineales, causales e invariantes en el tiempo, como muestra la figura.



(a) ¿Vale que $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n)$?

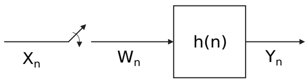
(b) ¿Vale que $\sigma_W^2 = \sigma_Y^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n)$?

(c) Sea $h_1(n) = a^n U_n$ y $h_2(n) = b^n U_n$ con $|a| < 1$ y $|b| < 1$. Determinar la respuesta al impulso del sistema en su conjunto, y de allí determine σ_W^2.

(d) ¿Su respuesta a la parte (b) es consistente con su respuesta a la parte (c)?

⋆Ejercicio 5

A menudo nos interesa conocer el comportamiento estadístico de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable, cuando a la entrada es aplicada una señal aleatoria en forma repentina, como muesstra la figura.



Sea X_n una señal estacionaria con características de ruido blanco con media nula. Entonces la entrada al sistema W_n, dada por

$$W_n = \begin{cases} X_n & si \quad n \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad n < 0 \end{cases}$$

es un proceso no estacionario, como lo es la salida Y_n.

(a) Derivar una expresión para el valor medio de la salida en función del valor medio de la entrada.

(b) Derivar una expresión para la señal de atucorrelacón $R_Y(n_1, n_2)$ de la salida.

(c) Mostrar que para n grande, las fórmulas derivadas en las partes (a) y (b) se aproximan al resultado para la entrada estacionaria.

(d) Asuma que $h(n) = a^n U_n$. Encontrar el valor medio y el valor cuadático medio de la salida en función del valor medio y el valor cuadrático medio de la entrada. Bosquejar la dependencia de estos parámetros en función de n.

⋆Ejercicio 6

La integral de la densidad espectral de potencia en cada banda de frecuencia proporciona la potencia en esa banda. Utilice el siguiente enfoque para mostrar que la densidad espectral de potencia es la única función de este tipo. Demostrar que si

$$\int_0^W S_1(f)df = \int_0^W S_2(f)df$$

para todo $W > 0$, entonces $S_1(f) = S_2(f)$ para todo $f \geq 0$.
Nota: La función $q(W) = \int_0^W S_1(f)df - \int_0^W S_2(f)df$ es identicamente a cero para todo $W \geq 0$.