Ecuaciones lineales autónomas

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas autónomas en $\mathbb{R}^2$, que de paso nos ayudará a ir familiarizándonos un poco más con las ecuaciones diferenciales. Además realizaremos los posibles diagramas de fase para los distintos casos. Para este capítulo será necesario utilizar conocimientos previos de GAL2. Algunos de estos conocimientos se irán recordando en la medida que los vayamos necesitando, en caso de necesitar más información para comprender se recomienda repasar los temas.

En su forma más genérica, en $\mathbb{R}^n$, las ecuaciones diferenciales lineales autónomas las podemos escribir como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o de forma abreviada:

$$\dot{X} = AX + b.$$

Nos enfocaremos en las ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ con el vector b nulo (ecuación homogénea). Considerando que $X(t) = (x(t), y(t))$, notación que se usará en el resto del capítulo, el problema se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \tag{0.1}$$

Se puede observar que en estos problemas el origen siempre es un punto crítico. A continuación analizaremos los distintos casos que se pueden presentar discutiendo según los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

0.1. Matriz A diagonalizable con valores propios reales

0.1.1. Matriz A diagonal

Comenzaremos con los casos más sencillos cuando la matriz A es diagonal, $b = c = 0$, donde los valores propios coinciden con a y d. En este caso podemos reescribir la ecuación (0.1) como:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = dy \end{cases}$$

esto simplifica considerablemente el problema ya que las ecuaciones del sistema están desacopladas, lo que nos permite resolver cada una por el método de variables separables, obteniendo las soluciones:

$$X(t) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{dt}) \tag{0.2}$$

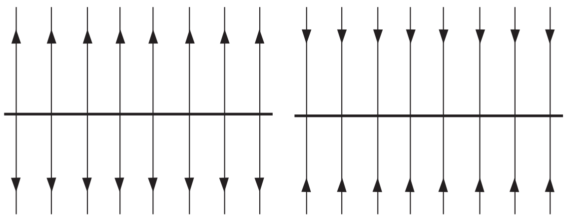
donde $X(0) = (x_0, y_0)$ es la condición inicial. Recordamos que por ser una ecuación autónoma las soluciones con la misma posición inicial tienen la misma forma pero corridas en el tiempo, por lo que no estamos perdiendo generalidad al tomar como tiempo inicial el cero.

0.1.1.1. Un valor propio cero

Supongamos $a = 0$, $d \neq 0$. En este caso la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = dy. \end{cases}$$

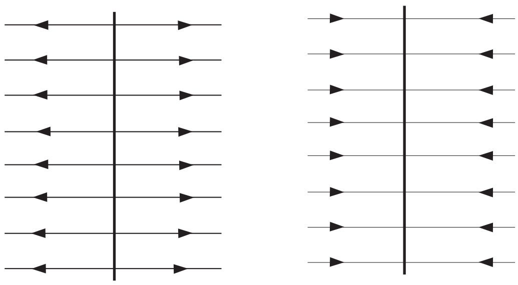
Mirando (0.2) tenemos que las soluciones son $(x_0, y_0 e^{dt})$, de donde se deduce que la recta $y = 0$ está formada por puntos de equilibrio y las soluciones están incluidas en rectas verticales. Realizando los límites cuando el tiempo tiende a más o menos infinito, o alternativamente estudiando el signo de $\dot{y}$ se obtiene el siguiente diagrama de fase:



(a) $a = 0, d > 0$ (b) $a = 0, d < 0$

Figura 1. Matriz diagonal con un valor propio cero.

De forma análoga para $a \neq 0$, $d = 0$ se obtienen diagramas de fase similares, donde las soluciones están contenidas en rectas horizontales.



(a) $0 < a, b = 0$ (b) $a < 0, b = 0$

Figura 2. Matriz diagonal con un valor propio cero.

0.1.1.2. Valores propios distintos de cero

Si ningún valor propio es nulo, el único punto de equilibrio será el origen (dentro del caso A diagonal). Si consideramos como condición inicial $x_0 = 0$, mirando (0.2), se puede observar que las trayectorias de estas soluciones permanecerán en el eje Oy, mientras que para $y_0 = 0$ las mismas pertenecen al eje Ox. Si $x_0 \neq 0$, de (0.2), despejando e^t de $x(t)$ y sustituyéndolo en $y(t)$, se obtiene que:

$$y = \left(\frac{y_0}{{x_0}^{d/a}} \right) x^{\frac{d}{a}} \tag{0.3}$$

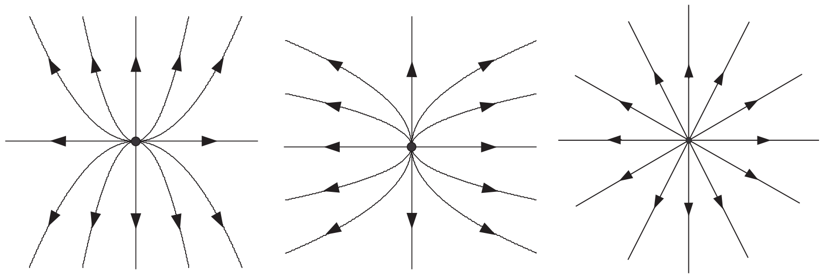
0.1.1.2.1. Valores propios del mismo signo

Si ambos valores propios son del mismo signo, el cociente $\frac{d}{a}$ de la ecuación (0.3) es positivo. Si consideramos a y d positivos, de la ecuación (0.2) vemos que las soluciones se alejan del origen a medida que pasa el tiempo, por lo que los diagramas de fase serán como muestra la figura (4).

En estos casos se dice que el origen es un punto *repulsor*, ya que todas las soluciones se alejan del origen. Para el caso donde los valores propios son negativos, las soluciones tienden al origen cuando el tiempo tiende a más infinito, por lo que el origen es un punto *atractor*.

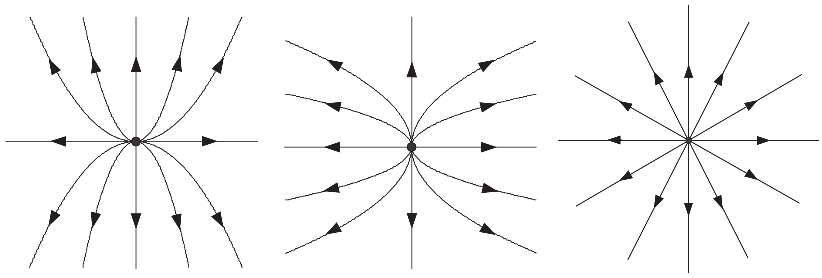
****

Es importante notar que en el caso de un valor propio cero, figuras (1) y (2), para cualquier entorno alrededor de un punto crítico, no todas las soluciones se alejan (o acercan) al punto, ya que siempre se pueden encontrar otros puntos críticos en el entorno (los puntos críticos no son aislados).



(a) $0 < a < d$ (b) $0 < d < a$ (c) $0 < a = d$

Figura 3. Matriz diagonal con valores propios del mismo signo.

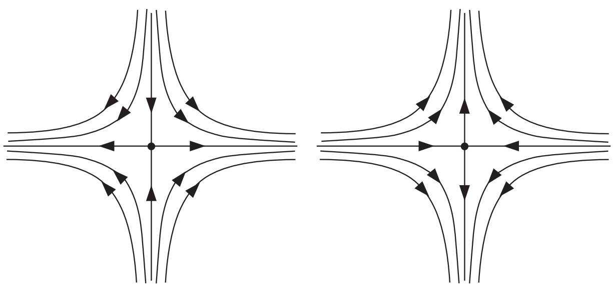


(a) $0 < a < d$ (b) $0 < d < a$ (c) $0 < a = d$

Figura 4. Matriz diagonal con valores propios del mismo signo.

0.1.1.2.2. Valores propios de distinto signo

Nuevamente podemos sacar las trayectorias de la ecuación (0.3). En estas condiciones el cociente $\frac{d}{a}$ es negativo, por lo que las soluciones estarán contenidas en trayectorias con forma hiperbólicas. Con los límites de las soluciones o estudiando los signos de las derivadas se pueden obtener la orientación de las curvas.



(a) $0 < a, d < 0$ (b) $a < 0, d > 0$

Figura 5. Matriz diagonal con valores propios de distinto signo.

En estos diagramas, se ven soluciones que se acercan al punto de equilibrio mientras que otras se alejan, por lo que el origen no será ni atractor ni repulsor. Este caso se conoce como punto silla.

Algo interesante de observar es que por la ecuación (0.3) la forma del diagrama de fases depende del cociente $\frac{d}{a}$. Dados dos problemas con distintos valores propios pero que el cociente $\frac{d}{a}$ coincide tendrán el mismo diagrama de fase pero distintas soluciones. Como ya se mencionó en el primer capítulo distintas ecuaciones diferenciales pueden tener el mismo diagrama de fases. Considerando los problemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 10x \\ \dot{y} = 20y \end{array} \right.$$

las soluciones a los mismos serán $X_1(t) = (x_0e^t, y_0e^{2t})$ y $X_2(t) = (x_0e^{10t}, y_0e^{20t})$ respectivamente. El diagrama de ambos serán parábolas, similar al de la figura (4a). La diferencia es la velocidad con la cual las soluciones recorren las curvas. En este caso particular, se observa de los exponentes de las soluciones que X_2 recorre las curvas a una mayor velocidad.

0.1.2. Matriz A diagonalizable

Hemos analizado todos los posibles casos cuando la matriz A es diagonal, ¿pero qué sucede si la matriz es diagonalizable pero no diagonal? En este caso veremos en el siguiente ejemplo que mediante un cambio de variable podremos volver a un problema diagonal que si sabemos resolver.

Se recuerda que:

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y una base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tenemos que $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son combinaciones lineales de v_1, v_2 por lo que existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que cumplen:

$$T(v_1) = av_1 + cv_2$$
$$T(v_2) = bv_1 + dv_2.$$

La matriz asociada a la transformación T en la base B es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sea C una matriz diagonalizable con valores propios α y β con vectores propios v_α y v_β respectivamente y $B = \{v_\alpha, v_\beta\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios. Entonces existe una matriz P tal que:

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

donde la matriz P tiene los vectores propios v_α y v_β “colgados” en columnas (en ese orden). Geométricamente esto representa un cambio de base de la base canónica a la base B.

***Ejemplo* 0.1.**

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La ecuación asociada a esta matriz es:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

la cual ya no podemos resolver directamente mediante el método de variables separables.

Es fácil verificar que A tiene valores propios 1 y -1 con vectores propios $v_1 = (1, 0)$ y $v_{-1} = (1, 1)$ respectivamente [1]. Tomando $B = \{u, v\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ la matriz cambio de base P es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$, que representa el vector X expresado en la base B (se utilizará esta notación de aquí en más), y teniendo en cuenta que $X(t) = PY(t)$ se tiene que:

$$\dot{Y} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hemos traducido nuestro problema a un problema diagonal, tomando $Y(t) = (u(t), v(t))$:

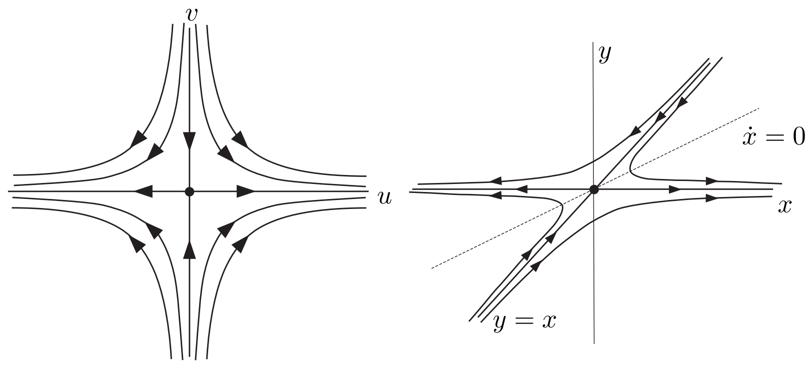
$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = -v. \end{cases}$$

De donde se obtiene por lo visto anteriormente (ecuación 0.2) que $Y(t) = (u_0e^t, v_0e^{-t})$. El diagrama de fases en la base B es como el de la figura (6a). Deshaciendo el cambio de variable:

$$X(t) = PY = (u_0e^t + v_0e^{-t}, v_0e^{-t})$$

[1] Si no se recuerda como obtener los valores y vectores propios de una matriz, ir al ejemplo del Capítulo 3: Matriz fundamental.

donde las condiciones iniciales son $(u_0 + v_0, v_0)$. Para realizar el diagrama simplemente llevamos los



(a) Diagrama en la base formada por vectores propios

(b) Diagrama en la base canónica

Figura 6. Ejemplo con matriz diagonalizable.

ejes u y v a su lugar en el sistema cartesiano. En este caso el eje u no cambia, ya que tiene la dirección $(1, 0)$ y el eje v se mueve hasta la recta $y = x$, lo que corresponde con la dirección $(1, 1)$. El diagrama de fase correspondiente a este ejemplo se encuentra en la figura (6).

En resumen, si estamos frente a una matriz diagonalizable, procediendo como se hizo en este ejemplo, se puede llevar el problema a uno de los casos donde la matriz es diagonal. De forma más genérica, las soluciones a ecuaciones lineales donde la matriz A tiene valores propios α y β, con vectores propios v_α y v_β respectivamente son de la forma:

$$X(t) = u_0 e^{\alpha t} v_\alpha + v_0 e^{\beta t} v_\beta$$

con posición inicial $u_0 v_\alpha + v_0 v_\beta$.

0.2. Matriz de Jordan

Se recuerda que:

- La multiplicidad algebraica de un valor propio λ ($ma(\lambda)$) representa la multiplicidad de λ como raíz en el polinomio característico de A.
- La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio ($mg(\lambda)$), es decir $dim(N(A - \lambda I))$.

Se le llama matriz de Jordan a las matrices con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Esta matriz tiene valor propio doble λ y un único vector propio $(0, 1)$, es decir que $ma(\lambda) = 2$ y $mg(\lambda) = 1$.

Cuando $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ mediante un cambio de base la matriz se puede llevar a la forma de la ecuación (0.4). O lo que es lo mismo, existe P tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz P esta formada por los vectores de la base de Jordan "colgados" en columnas. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ la base de Jordan, la misma debe verificar que:

$$Av_1 = \lambda v_1 + v_2 \qquad Av_2 = \lambda v_2$$

De manera que v_2 será un vector propio y estará relacionado con v_1 mediante la siguiente expresión:

$$(A - \lambda I)v_1 = v_2 \tag{0.5}$$

0.2.1. Matriz A de Jordan

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases} \tag{0.6}$$

donde la matriz asociada es una matriz de Jordan. Trataremos de encontrar una solución para este tipo de problemas discutiendo según λ.

0.2.1.1. Valor propio cero

Para el caso particular $\lambda = 0$ la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Se observa que la recta $x = 0$ está formada por puntos de equilibrio. De la primera ecuación se obtiene rápidamente que $x(t) = x_0$, por lo que $\dot{y} = x_0$, obteniendo la solución:

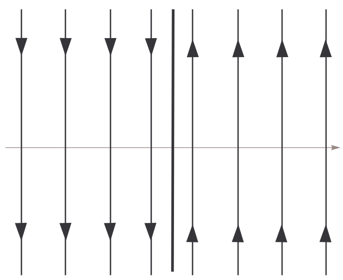
$$X(t) = (x_0, x_0 t + y_0).$$

En este caso las trayectorias son rectas con $x = x_0$, de modo que el diagrama de fases es:

0.2.1.2. Valor propio distinto de cero

De forma rápida, de la primera ecuación del sistema (0.6), se puede obtener que $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, permitiéndonos escribir la segunda ecuación como:

$$\dot{y} = x_0 e^{\lambda t} + y$$



(a) $\lambda = 0$

FIGURA 7. Matriz de Jordan con $\lambda = 0$.

Separando la solución $y(t)$ en una solución homogénea más una particular, la ecuación anterior se puede resolver por el método de variación de constantes obteniéndose que:

$$y(t) = e^{\lambda t}(y_0 + x_0 t)$$

Por lo que la solución es:

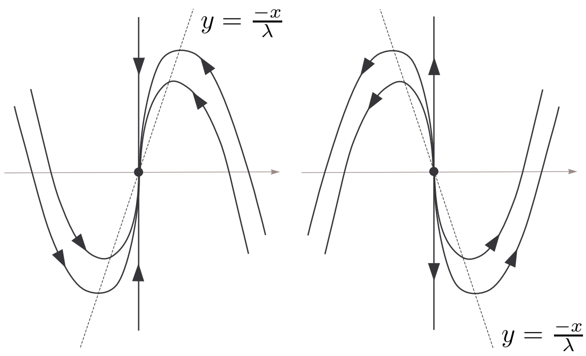
$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{\lambda t}, e^{\lambda t}(y_0 + x_0 t)) \tag{0.7}$$

Se puede ver que para $x_0 = 0$ las trayectorias están incluidas en el eje Oy y que $\dot{y} = 0$ en la recta $y = \frac{-x}{\lambda}$, lo que significa que en el diagrama de fases las trayectorias tendrán pendiente horizontal cuando crucen la recta.

Despejando el tiempo de $x(t)$ y sustituyéndolo en $y(t)$ se obtiene que para $x_0 \neq 0$ y $\lambda \neq 0$:

$$y = x\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{\lambda}\right)$$

Graficando esta función se obtiene lo que está representado en la imagen (8).



(a) $\lambda < 0$ (b) $\lambda > 0$

FIGURA 8. Matriz de Jordan con $\lambda \neq 0$.

0.2.2. Matriz A semejante a una matriz de Jordan

Al igual que en el caso de las matrices diagonalizables, de tener una matriz con valor propio doble λ con $dim(N(A - \lambda I)) = 1$, mediante un cambio de variable transformaremos el problema en otro como este último.

***Ejemplo* 0.2.**

Trabajaremos con el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$

La matriz asociada a este problema tiene valor propio 1 doble y su subespacio propio es $S_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ de modo que $mg(1) < ma(1)$ [2]. Escogiendo $v_2 = (-1, -1)$ debemos obtener v_1 que verifique la ecuación (0.5) para hallar la base de Jordan. Sea $v_1 = (a, b)$:

$$(A - I)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De donde $-a + b = -1$. Eligiendo $v_1 = (1, 0)$ tenemos que la base de Jordan es $B = \{u, v\} = \{(1, 0), (-1, -1)\}$. De forma análoga al caso diagonal, realizado el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$ se tiene el problema:

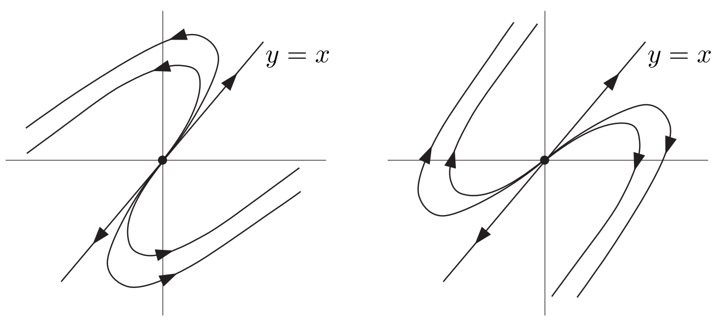
$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = u + v \end{cases}$$

que ya sabemos resolver. De la expresión (0.7) tenemos que las soluciones son $Y(t) = (u_0 e^t, e^t(u_0 t + v_0))$, con el diagrama de fases de la figura (8b).

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que:

$$X(t) = (u_0 e^t - e^t(u_0 t + v_0), -e^t(u_0 t + v_0))$$

donde la condición inicial es $(u_0 - v_0, -v_0)$. Se puede observar que las soluciones tienden a infinito en el futuro y que para $u_0 = 0$, $x(t) = y(t)$. Al volver a la base cartesiana pueden aparecer algunas dudas de como quedaría el diagrama. Hay dos posibles opciones representadas en la figura (9).



(a) (b)

Figura 9

Para saber cual de las dos es, se recomienda estudiar el signo de las derivadas $\dot{x}$ y/o $\dot{y}$. En este caso, vemos que $\dot{x}$ es positivo para los valores de $y > 0$, por lo que el diagrama será similar a la segunda opción. Respetando los signos de las derivadas el diagrama de fase correcto es el de la figura (10).

[2] En caso de no recordar como se obtiene el valor y vector propio ir al ejemplo del Capítulo 3: Matriz fundamental.

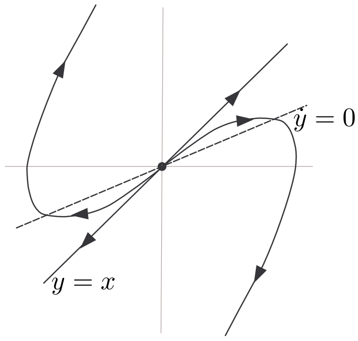


FIGURA 10. Ejemplo con una matriz con valor propio doble no diagonalizable.

Vale la pena aclarar que la elección de la base de Jordan NO cambia el resultado. De forma rápida se puede verificar que la trayectoria recta queda en la dirección del valor propio, la cual no cambia al elegir otra base. ◯

La solución a cualquier ecuación diferencial con una matriz asociada con valor propio doble λ con mg(λ)=1 y base de Jordan asociada $B = \{u, v\}$ es:

$$X(t) = u_0 e^{\lambda t} u + e^{\lambda t}(v_0 + u_0 t) v$$

con condición inicial $u_0 u + v_0 v$.

0.3. Valores propios complejos

0.3.1. Caso sencillo con valores propios complejos

Ya hemos analizado todos los casos donde la matriz A tiene valores propios reales. Por último analizaremos que sucede cuando la misma tiene valores propios complejos. Empecemos considerando el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = -bx + ay \end{array} \right. \tag{0.8}$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

Esta matriz tiene valores propios $a \pm bi$. Para obtener la solución y el diagrama de fases procederemos realizando un cambio de variable a coordenadas polares donde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, tratando de obtener un sistema de ecuaciones con $\dot{r}(r,\theta)$ y $\dot{\theta}(r,\theta)$. Sabemos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Derivando:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

Sustituyendo $\dot{x}$ e $\dot{y}$ de la ecuación (0.8):

$$\dot{r}r = x(ax + by) + y(-bx + ay) = a(x^2 + y^2) = ar^2$$

En consecuencia:

$$\dot{r} = ar$$

Derivando la expresión $x = r\cos\theta$ tenemos que:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\ \dot{\theta}$$

Sustituyendo nuevamente $\dot{x}$ y $\dot{r}$:

$$ax + by = ar\cos\theta - r\sin\theta\ \dot{\theta}$$

Remplazando $r\cos\theta$ y $r\sin\theta$ por x e y:

$$ax + by = ax - y\dot{\theta}$$

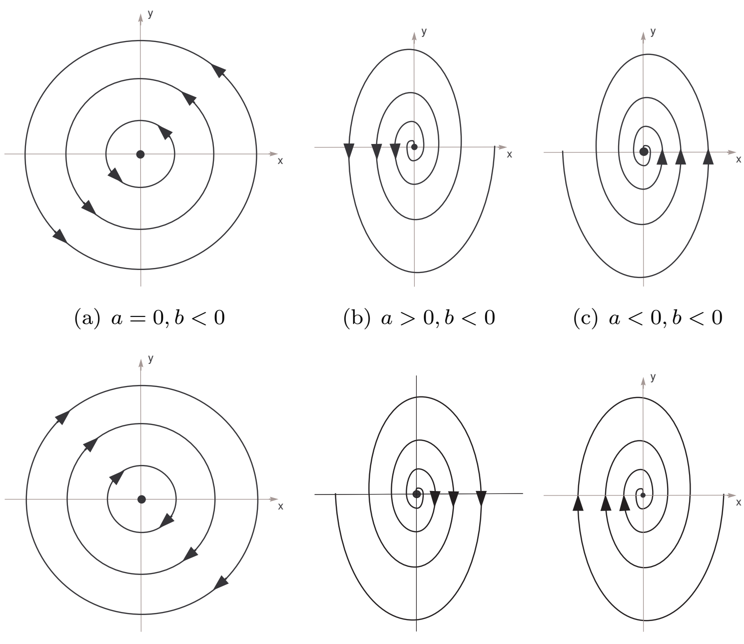
Por último:

$$\dot{\theta} = -b$$

De manera que, en coordenadas polares, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = -b \end{cases} \tag{0.10}$$

A partir de este sistema se tiene que para $a = 0$, r es constante ($\dot{r} = 0$), por lo que las trayectorias serán circunferencias. Si $a \neq 0$, dado que r es siempre positivo, el radio irá aumentando ($a > 0$) o disminuyendo ($a < 0$). El signo de $\dot{\theta}$ determina el sentido de giro, para $\dot{\theta} > 0$ ($b < 0$) las trayectorias giran en sentido antihorario mientras que para $\dot{\theta} < 0$ ($b > 0$) en sentido horario[3]. Como el sentido de giro es siempre el mismo y el radio siempre crece o decrece las trayectorias tienen forma de espiral. Teniendo en cuenta esto, los diagramas de fases correspondientes son:



(a) $a = 0, b < 0$ (b) $a > 0, b < 0$ (c) $a < 0, b < 0$

(d) $a = 0, b > 0$ (e) $a > 0, b > 0$ (f) $a < 0, b > 0$

Figura 11. Matriz con valores propios complejos.

Se puede ver que el origen es repulsor para el caso $a > 0$ y atractor para $a < 0$. Las soluciones explícitas las podemos hallar utilizando el método de separación de variables para el problema en coordenadas polares, obteniendo:

$$r(t) = r_0 e^{at} \qquad \theta(t) = -bt + \theta_0 \tag{0.11}$$

Pasando las soluciones a coordenadas cartesianas:

$$X(t) = (r_0 e^{at}\cos(-bt + \theta_0), r_0 e^{at}\sin(-bt + \theta_0)) \tag{0.12}$$

donde la condición inicial es $(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$

0.3.2. Cambio de base

Sin embargo no todas las matrices con valores propios complejos son de la forma de la expresión (0.9). Procederemos de forma análoga que en los casos anteriores, realizando un cambio de variable que nos permita reescribir la matriz de forma más sencilla, en este caso la reescribiremos como en la ecuación (0.9). A continuación demostraremos que siempre podremos realizar un cambio de variable que nos lleve una matriz con valores propios complejos a una con la forma vista recientemente.

[3] Observar que si $b = 0$ estamos en el caso de valores propios reales, el cual ya fue estudiado.

Notación:
Sea $v_\lambda \in \mathbb{C}^2$ el vector propio del valor propio $\lambda = a + bi$, $v_\lambda = (z, w)$ donde $z = c + di$ y $w = e + fi$. Llamaremos $Re(v_\lambda) = (c, e)$ e $Im(v_\lambda) = (d, f)$ de modo que $v_\lambda = Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i$.

Lema 0.1.

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con valores propios complejos $\lambda = a + bi$ y $\overline{\lambda} = a - bi$ y vectores propios v_λ y $v_{\bar{\lambda}}$ respectivamente. Se cumple que:

1. $B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$
2. *Sea P la matriz con los vectores $Re(v_\lambda)$ y $Im(v_\lambda)$ "colgados" en columnas, se tiene que:*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Demostración:

Comenzaremos con la primera afirmación. Sabemos que por la definición de vector propio v_λ cumple que:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \overline{Av_\lambda} = \overline{\lambda v_\lambda}.$$

Como la matriz A es real y por propiedades del conjugado la igualdad queda:

$$A\overline{v_\lambda} = \overline{\lambda}\overline{v_\lambda} \Rightarrow v_{\overline{\lambda}} = \overline{v_\lambda}.$$

Por ende podemos escribir los vectores propios como:

$$v_\lambda = Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i$$

$$v_{\overline{\lambda}} = Re(v_\lambda) - Im(v_\lambda)i.$$

Por otro lado, como v_λ y $v_{\overline{\lambda}}$ son vectores propios, tenemos que:

$$\{v_\lambda, v_{\overline{\lambda}}\} \xrightarrow{b} \mathbb{C}^2 \Rightarrow B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{C}^2$$

$$\Rightarrow \text{B es un conjunto L.I. en } \mathbb{C}^2 \Rightarrow \text{ B es un conjunto L.I. en } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$$

por lo que queda demostrada la primera afirmación. Ahora vamos por la segunda.

Nuevamente por definición de vector propio tenemos que:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow A(Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i) = (a + bi)(Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i).$$

Para que se cumpla la igualdad, se tiene que igualar la parte real y la parte compleja. Dado que A es real, tenemos que:

$$ARe(v_\lambda) = aRe(v_\lambda) - bIm(v_\lambda)$$

$$AIm(v_\lambda) = bRe(v_\lambda) + aIm(v_\lambda).$$

utilizando lo que se recordó previamente en la parte de la matriz A diagonalizable acerca de los coeficientes de la matriz asociada a una transformación queda demostrado. $\square$

***Ejemplo* 0.3.**

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ que tiene asociada la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Esta matriz tiene valores propios $1 \pm 2i$. Trabajaremos con $\lambda = 1 + 2i$, por lo que $a = 1$ y $b = 2$ (la elección de $b = 2$ o $b = -2$ es arbitraria) y el subespacio propio es $S_\lambda = \{(z, z\frac{1-i}{2}) : z \in \mathbb{C}\}$. Escogiendo como vector propio:

$$v_\lambda = (2, 1-i) = (2, 1) + (0, -1)i$$

se tiene que $Re(v_\lambda) = (2, 1)$ y $Im(v_\lambda) = (0, -1)$. Por el lema anterior se sabe que, dado $B = \{u, v\} = \{(2, 1), (0, -1)\}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto realizando el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$ el problema obtenido es:

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v \\ \dot{v} = -2u + v \end{cases}$$

De la ecuación (0.12) se llega a que:

$$Y(t) = (r_0 e^t \cos(-2t + \theta_0), r_0 e^t \sin(-2t + \theta_0))$$

con el diagrama de fases como la figura (11e). Finalmente, deshaciendo el cambio de variable:

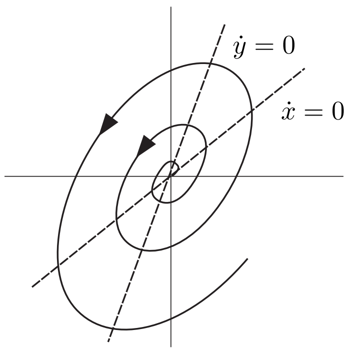


FIGURA 12. Ejemplo de matriz con valores propios complejos.

$$X(t) = r_0 e^t (2cos(-2t + \theta_0), \cos(-2t + \theta_0) - \sin(-2t + \theta_0))$$

con condición inical $(2r_0 \cos(\theta_0), r_0(\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0)))$.

Observaciones:

1. r_0 y θ_0 son las condiciones iniciales pasando a polares desde la base B, las cuales no tienen por qué coincidir con el radio y el ángulo inicial en la base cartesiana.
2. En caso de haber tomado $b = -2$, la base B sería $B = \{u, v\} = \{(2, 1), (0, 1)\}$. El diagrama de $Y(t)$ quedaría girando en sentido antihorario, pero al deshacer el cambio de variable los resultados son los mismos.

3. Para saber en que sentido gira al deshacer el cambio de variable, se recomienda pararse en un punto del eje Ox o Oy y estudiar el signo de las derivadas $\dot{x}$ y $\dot{y}$. Por ejemplo, si nos paramos en el punto $(1,0)$ tenemos que $\dot{x}=3$ e $\dot{y}=2$, por lo que el sentido del giro al deshacer el cambio de base es antihorario. ◯

De forma genérica, las soluciones a ecuaciones donde su matriz asociada A tiene valores propios complejos $\lambda = a+bi$ y $\bar{\lambda} = a-bi$ con v_λ el vector propio asociado a λ son:

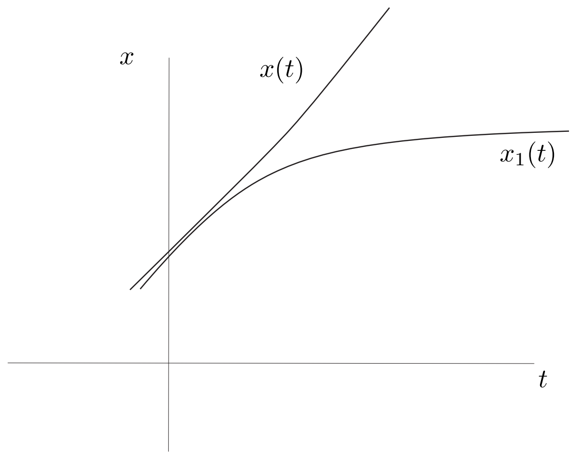
$$X(t) = r_0 e^{at}(\cos(-bt+\theta_0)Re(v_\lambda) + \sin(-bt+\theta_0)Im(v_\lambda))$$

con condición inicial $r_0(\cos(\theta_0)Re(v_\lambda) + \sin(\theta_0)Im(v_\lambda))$.

0.3.3. Estabilidad de soluciones.

La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo.
Supongamos que modelamos un problema y necesitamos saber como se comporta en el futuro la solución de una ecuación diferencial con condición inicial $x(0)=e$. Como del número e solo conocemos aproximaciones, supongamos que consideramos la solución x_1 tal que $x_1(0) = 2,718$ y supongamos, además, que las soluciones x y x_1 en el futuro se separan como en la figura 13. Por lo tanto las conclusiones que obtengamos para el futuro de la solución x_1, no son válidas para la solución x. Para poder predecir el comportamiente de x a partir de una solución, suficientemente cercana x_1, necesitamos saber que ambas soluciones en el futuro no se separen.

FIGURA 13



(a)

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

- Decimos que una solución X es estable, para el futuro, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||Y_0 - X(0)|| < \delta$, la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que $||Y(t) - X(t)|| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
- Decimos que una solución X es asintóticament estable, para el futuro, si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que si $||Y_0 - X(0)|| < \delta$, la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que
$$\lim_{t\to+\infty} ||Y(t) - X(t)|| = 0.$$
- Decimos que una solución X es inestable, si no es estable.

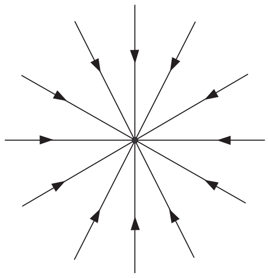
Análogamente, se pueden definir los conceptos de estable y asintóticamente estable para el pasado.

Ejemplos.

1) Considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la solución $X(t) = (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que la solución X es asintóticamente estable. Por lo visto anteriormente, tenemos que el diagrama de fase es el dado por la siguiente figura



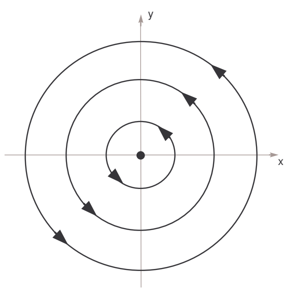
(b)

De esto último deducimos que dada cualquier condición inicial Y_0, la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.

2) Sea la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la solución $X(t) = (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que la solución X es estable pero no asintóticamente estable. Los valores propios son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$. Como la parte real es cero, entonces tenemos que el diagrama de fase es el dado por la siguiente figura



(c) $a = 0, b < 0$

Por lo tanto, las soluciones Y con condición inicial $Y(0) = Y_0 \neq (0,0)$ están incluidas en una cfa. Por lo tanto permanecen cercanas al origen pero se cumple que $\lim_{t\to+\infty} Y(t) \neq 0$.

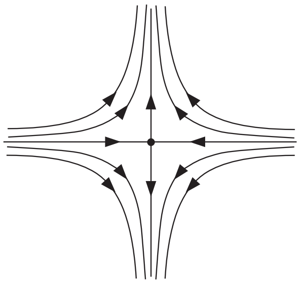
3) Por último, la ecuación Sea la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tiene valores propios reales y de distinto signo.

Mirando el diagrama de fase, es claro que si tomamos $Y_0 = (0, \delta/2)$. La solución Y con $Y(0) = Y_0$ se aleja del origen y por lo tanto la solución $X(t) = (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es inestable.

Ejercicio



(d)

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

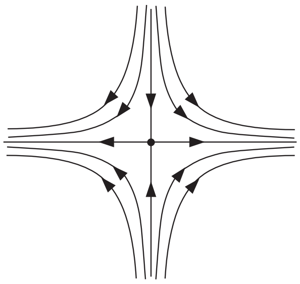
Probar que si la solución $X(t) = (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es estable entonces cualquier otra solución es estable. Idem con asintóticamente estable.

Explique que esta mal en el siguiente razonamiento: Considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tiene valores propios reales y de distinto signo, por lo tanto el diagrama de fase es el dado por la figura 14

Figura 14



(a)

Mirando el diagrama de fase, es claro que si tomamos $Y_1 = (1,0)$. La solución Y con $Y(0) = Y_1$ es estable. Nuevamente, mirando el diagrama de fase es claro que la solución $X(t) = (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ no es estable. ¿donde está el error?

Para finalizar vamos a enunciar un resultado sobre estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$.

Teorema 0.2. Estabilidad de un sistema lineal. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño n con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y la ecuación $\dot{X} = AX$. Entonces:*

1. *Si todos los valores propios de A tiene parte real negativa, entonces todas las soluciones son asintóticamente estables.*
2. *Si existe un valor propio de A con parte real positiva, entonces todas las soluciones son inestables.*
3. *Supongamos que todos los valores propios tienen parte real menor o igual a cero. Sean $\lambda_1 = i\alpha_1, ..., \lambda_l = i\alpha_l$ todos los valores propios de A con parte real cero. Sea k_j la multiplicidad algebraíca de λ_j. O sea que si p es el polinomio caracteristo de A, entonces p se factoriza de la forma*
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{k_l} Q(\lambda)$$
donde todas las raices de Q tienen parte real negativa.
Si para todo $j = 1, ..., l$ la matriz A tiene k_j vectores propios linealmente independiente para el valor propio λ_j entonces toda solución es estable pero no asintóticamente estable. En otro caso, toda solución es inestable.