Transformada de Laplace

Este capítulo es un adaptación de las Notas hechas por J. Vieitez y N. Moller para el curso de funciones de variable compleja.
Comenzamos recordando que por definición, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)dt$. Si $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)dt$ es finito decimos que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge y si el limite es infinito decimos que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Definición 0.1. Decimos que una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua a trozos, si es continua excepto en un conjunto $D = \{t_1, ..., t_n, ...\}$ (D puede ser vacío o tener infinitos elementos), tal que para todo $K \in R$, $K > 0$ se cumple que $D \cap [0, K]$ es un conjunto finito. Además, existen los limites laterales $\lim_{t\to t_i^+} f(t)$, $\lim_{t\to t_i^-} f(t)$ y son finitos para todo $t_i \in D$.

Definición 0.2. Decimos que una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos es de orden exponencial si existen $\alpha > 0$ y $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$.

Proposición 0.1. *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de orden exponencial ($|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$). Entonces:*

1. *Para todo s, con $s > \alpha$, se cumple que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ es convergente.*
2. *Para todo $s > \alpha$ se cumple que $\lim_{t\to+\infty} e^{-st}f(t) = 0$.*
3. *$F(t) = \int_0^t f(u)du$ es de orden exponencial.*

Prueba del item 1. *Sea s con $s > \alpha$, entonces*

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right| dt \overset{|f(t)|\leq Me^{\alpha t}}{\leq} \int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-s)t}dt =$$

$$\left.\frac{Me^{(\alpha-s)t}}{(\alpha-s)}\right|_0^{+\infty} = \frac{M}{s-\alpha}.$$

Prueba del item 2. *Consideremos $s > \alpha$, entonces*

$$\left|\lim_{t\to+\infty} e^{-st}f(t)\right| \leq \lim_{t\to+\infty} |e^{-st}f(t)| \leq \lim_{t\to+\infty} e^{-st}Me^{\alpha t} = \lim_{t\to+\infty} Me^{(\alpha-s)t} = 0.$$

Prueba del item 3.

$$|F(t)| = \left|\int_0^t f(u)du\right| \leq \int_0^t |f(u)|du \leq \int_0^t Me^{\alpha u}du = \left.\frac{Me^{\alpha u}}{\alpha}\right|_0^t = \frac{M(e^{\alpha t}-1)}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}.$$

Ejercicio

1. Probar que la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = e^{t^2}$ **no** es de orden exponencial y además para todo $s \in \mathbb{R}$ se cumple que la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ es divergente.
2. Dar un ejemplo de una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos que no es de orden exponencial y que la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ sea convergente.

Ejemplos de funciones de orden exponencial.

1. La función constante.
2. $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{R}$.
3. La función Pulso. Esta función es definida por (mirar figura 1):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & si \quad t \in [t_0 - \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}], \\ 0 & si \quad t \notin [t_0 - \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}]. \end{cases}$$

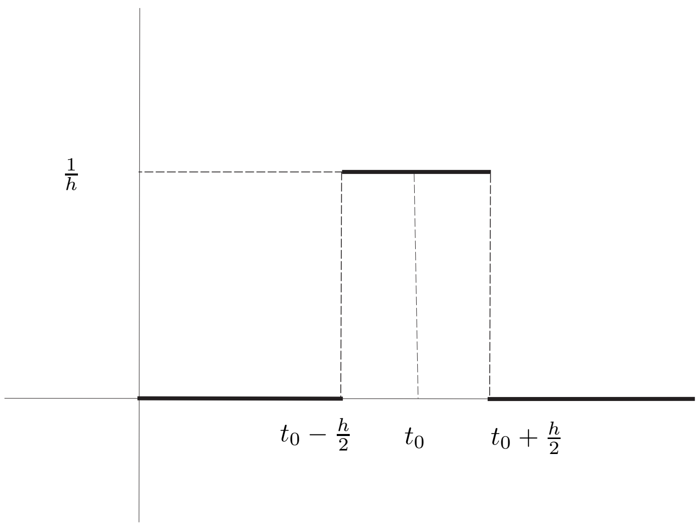

Figura 1

4. Los polinomios, $\log(t)$, $\cos(t)$ y $sen(t)$.

Definición 0.3. Llamamos transformada de Laplace de la función continua a trozos $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a la función

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

siempre que la integral impropia sea convergente.

Observación 1. *Si f es de orden exponencial, entonces , por la Proposición 0.1 item 1, la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ es convergente para $s > \alpha$. Luego la transformada de Laplace está definida para todo $s > \alpha$.*

Ejemplos de Transformadas de Laplace.

1. La función constante $f(t) = 1$ para $t \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} f(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^T = \frac{1}{s}.$$

Es claro que este último integral converge si y solo si $s > 0$.

2. $f(t) = e^{at}$ para $t \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} e^{(a-s)t}dt = \lim_{T\to+\infty} \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^T = \frac{1}{s-a}.$$

Este último integral converge si y solo si $s > a$.

3. $f(t) = t^\alpha$, con $\alpha > -1$, para $t \geq 0$.
Antes de hacer los cálculos, recordamos que la función Γ de Euler definida por $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ es convergente para $x > 0$ y si $x = n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Por otro lado

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty,\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^{T} t^\alpha e^{-st}dt.$$

Tomando $s > 0$ y haciendo el cambio de variable $u = st$, se tiene que

$$\lim_{T\to+\infty,\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^{T} t^\alpha e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty,\varepsilon\to0^+} \int_{s\varepsilon}^{sT} \frac{u^\alpha e^{-u}}{s^\alpha}\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Para el caso en que $\alpha = n \in \mathbb{N}$, como $\Gamma(n+1) = n!$ se tiene que si $f(t) = t^n$ entonces $\mathcal{L}[f](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Propiedades.

Para las siguientes propiedades asumimos que las funciones f y g son de orden exponencial.

1. **Linealidad.** $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s)$ para todo α y β reales.
   La demostración se deduce fácilmente de la definición y del hecho que suma de funciones exponenciales es exponencial.

2. **Transformada de la derivada.** Si $f^{'}$ es continua para todo $t \geq 0$ entonces $\mathcal{L}[f^{'}](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.
   Antes de comenzar la prueba, hacemos notar que la función $f(t) = sen(e^{t^2})$ es de orden exponencial y $f^{'}(t) = cos(e^{t^2})e^{t^2}2t$ no es de orden exponencial.

   Demostración. Por la proposición 0.1 item 2, para todo $s \geq \alpha$ se cumple que $\lim_{t\to+\infty} e^{-st}f(t) = 0$. Por definición $\mathcal{L}[f^{'}](s) = \int_0^{+\infty} f^{'}(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T f^{'}(t)e^{-st}dt$. Usando partes, se tiene que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f^{'}(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} f(t)e^{-st}\Big|_0^T - \lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)(-s)e^{-st}dt =$$

$$-f(0) + s.\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f](s).$$

□

   A partir de esto último se deduce fácilmente que

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k\mathcal{L}[f](s) - f(0)s^{k-1} - f^{'}(0)s^{k-2} - f^{''}(0)s^{k-3} - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

   (Para esta última igualdad asumimos que podemos aplicar la transformada a $f^{(k)}$ para todo k)

3. **Transformada del integral.** Si f es continua para todo $t \geq 0$, entonces $\mathcal{L}[\int_0^t f](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$.

   Demostración. Tomando $F(t) = \int_0^t f$ se tiene que $F^{'} = f$ y $F(0) = 0$. Además, como f es de orden exponencial, por la Proposición 0.1 item 3, se tiene que F es de orden exponencial y por el item 2 se tiene que $\lim_{t\to+\infty} e^{-st}F(t) = 0$.

   Por la transformada de la derivada tenemos que $\mathcal{L}[F^{'}](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0)$. De donde se deduce que $\mathcal{L}[f](s) = s\mathcal{L}[\int_0^t f](s)$. Despejando se obtiene que $\mathcal{L}[\int_0^t f](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$.

□

4. **Transformada de la convolución.** Dadas dos funciones f y g se define la convolución de f con g como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u).g(t-u)du.$$

   Vamos a probar que si f y g son funciones primarias entonces $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s).\mathcal{L}[g](s)$.

   Demostración.

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \int_0^{+\infty}(f * g)(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(u).g(t-u)du\right)e^{-st}dt =$$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left(\int_0^t f(u)g(t-u)e^{-st}du\right)e^{-st}dt.$$

   La región de integración está dada por la figura 2. Primero integramos la variable u, desde $u = 0$ hasta $u = t$ y luego la variable t desde $t = 0$ hasta $t = T$. Usando el Teorema de Fubbini, si cambiamos el orden de integración, primero integramos la variable t, desde $t = u$ hasta $t = T$ y luego la variable u desde $u = 0$ hasta $u = T$, se tiene que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left(\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left(\int_u^T f(u)g(t-u)e^{-st}dt\right)du =$$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(u)e^{-su}\left(\int_u^T g(t-u)e^{-s(t-u)}dt\right)du =$$

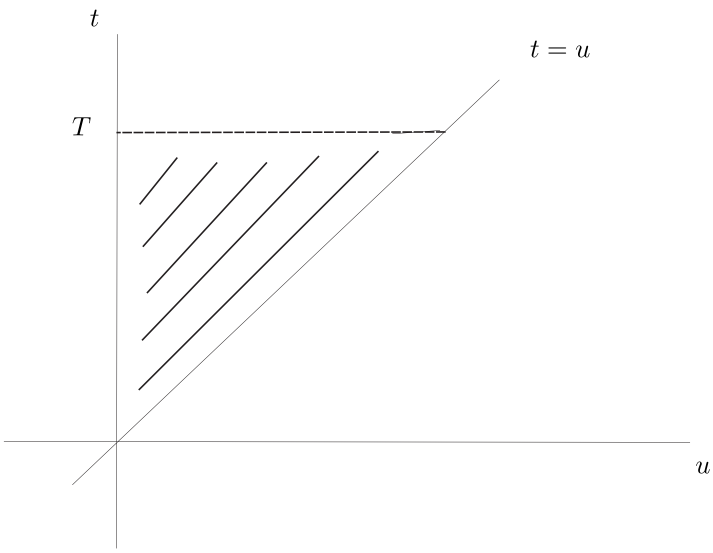

FIGURA 2

haciendo el cambio de variable $x = t - u$, tenemos

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(u)e^{-su} \left(\int_0^{T-u} g(x)e^{-sx} dt \right) du =$$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(u)e^{-su} du. \left(\int_0^{T-u} g(x)e^{-sx} dt \right) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du. \left(\int_0^{\infty} g(x)e^{-sx} dt \right) = \mathcal{L}[f](s).\mathcal{L}[g](s).$$

$\square$

Pruebe, como ejercicio, que $f * g = g * f$.

Antitransformada de Laplace.
Dos preguntas surgen muy naturalmente: ¿Podrían dos funciones diferentes f_1 y f_2 tener la misma transformada de Laplace?
¿Existe un procedimiento constructivo o explícito para determinar $f(t)$ a partir de $\mathcal{L}[f](s)$?

Existe un problema potencial al trabajar con la transformada inversa, y es que esta puede no ser única. En efecto, es posible que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, siendo $f \neq g$. Para nuestro propśito esto no es tan malo como parece, pues, si f y g son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty]$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces $f = g$; pero, si f y g no son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty]$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces se puede demostrar que las funciones f y g son casi iguales; esto quiere decir, que pueden diferir sólo en puntos de discontinuidad.

Teorema 0.4. *Sean f y g dos funciones continuas y de orden exponencial. Si $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces $f = g$.*

No daremos la demostración de este resultado ya que requiere técnicas que estan fuera del alcance de este curso.

Denotaremos por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ a la antitransformada de la función $F(s)$. Por ejemplo, como $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{at}$.

Ejemplos de antitransformada.

Vamos a hallar la antitransformada de $F(s) = \frac{2}{s^3(s+1)}$. Como

$$\frac{2}{s^3(s+1)} = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{-2}{s+1}.$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3(s+1)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{-2}{s^2}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{-2}{s+1}]\cdot$$

Como $\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s}] = 2$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{-2}{s^2}] = 2t$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3}] = t^2$ y $\mathcal{L}^{-1}[\frac{-2}{s+1}] = -2e^{-t}\cdot$ Se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3(s+1)}] = 2 - 2t + t^2 - 2e^{-t}.$$

Veamos algunos ejemplos de como aplicar la transformada para resolver ecuaciones diferenciales:

1) Hallar la solución de la siguiente ecuación: $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = e^t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

Llamemos $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$. Por la propiedad de la transformada de la derivada se tiene que $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = s\mathcal{L}(x(t)) - x(0) = sX(s) - 1$. Usando nuevamente esta propiedad, se cumple que

$$\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - s - 1.$$

Por último, usando la tabla de transformadas, tenemos que $L(e^t) = \frac{1}{s-1}$. Por lo tanto, al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad $\ddot{x}+\dot{x} = e^t$ obtenemos que $\mathcal{L}(\ddot{x}+\dot{x}) = \mathcal{L}(e^t)$. Usando las igualdades anteriores se llega a que

$$[s^2X(s) - s - 1] + [s.X(s) - 1] = \frac{1}{s-1}\cdot$$

Operando obtenemos $(s^2 + s).X(s) = \frac{1}{s-1} + 2 + s$, que se reduce a

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 - s}\cdot$$

Por el método de fracciones simples obtenemos

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 - s} = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}$$

Recurriendo a la tabla de transformadas deducimos que la solución es

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = 1 + sh(t).$$

2) Sea $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, resolver $\dot{V}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.V(t)$ y $V(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Observemos en primer lugar que podemos escribir la ecuación anterior como un sistema en coordenadas dado por $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$

LLamando $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ e $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, entonces, tomando transformada a ambos lados obtenemos $\begin{cases} s.X(s) + 1 = 2X(s) + Y(s) \\ s.Y(s) - 5 = X(s) + 2Y(s) \end{cases}$

Equivalentemente, $\begin{cases} (2-s).X(s) + Y(s) = 1 \\ X(s) + (2-s).Y(s) = -5 \end{cases}$

Resolviendo llegamos a que $X(s) = \frac{7-s}{s^2-4s+3}$ y que $Y(s) = \frac{5s-11}{s^2-4s+3}$, descomponiéndolas en fracciones simples tenemos que $X(s) = \frac{-3}{s-1} + \frac{2}{s-3}$ y que $Y(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-3}$. Luego, utilizando las tablas podemos determinar que las soluciones vienen dadas por $x(t) = -3.e^t + 2.e^{3t}$ e $y(t) = 3.e^t + 2.e^{3t}$ lo que nos permite determinar el vector $V(t)$ solución de la ecuación diferencial.$\square$

Algunos resultados sin demostración.

Para terminar vamos a enuciar unas propiedaes de las cuales daremos una idea de la demostración. Para las siguientes propiedades asumimos que la función f es de orden exponencial.

1. $\lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s) = f(0)$.
2. $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.
3. $\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Prueba del item 1. Por lo probado anteriormente (transformada de la derivada) tenemos que $\mathcal{L}[f^{'}](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por lo tanto $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f^{'}](s) = \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Para probar el item 1. basta probar que $\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f^{'}](s) = 0$.

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f^{'}](s) = \lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} f^{'}(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f^{'}(t) \underbrace{\lim_{s\to+\infty} e^{-st}}_{=0} dt = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$$

La parte informal de la demos tración es que no hemos probado que se pueda intercambiar el límite con el integral (segunda igualdad).

Prueba del item 2.

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = \lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{\lim_{s\to+\infty} e^{-st}}_{=0} dt = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$$

Prueba del item 3. Nuevamente, por la transformada de la derivada tenemos que $\mathcal{L}[f^{'}](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por lo tanto

$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}[f^{'}](s) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por otro lado

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}[f^{'}](s) = \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} f^{'}(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f^{'}(t) \underbrace{\lim_{s\to 0} e^{-st}}_{=1} dt = \int_0^{+\infty} f^{'}(t)dt =$$
$$\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0).$$

Combinando las dos igualdades anteriores se tiene que $\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Note que

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{s}dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{s\to+\infty} \frac{t}{s}dt\cdot$$

Tabla de transformadas y transformadas inversas.

$f(t)$	$[\mathcal{L}(f)](s) = F(s)$	$G(s)$	$[\mathcal{L}^{-1}(G)](t)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^2}$	t
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$t^\alpha, \alpha > 1$	$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{1+\alpha}}$	$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$cos(\omega t)$
$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} sen(\omega t)$
$cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$cosh(\omega t)$
$senh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} senh(\omega t)$
$f'(t)$	$s.F(s) - f(0)$	-	-
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}.F(s)$	-	-
$a.f(t) + b.g(t)$	$a.F(s) + b.G(s)$	$a.F(s) + b.G(s)$	$a.f(t) + b.g(t)$
$f(t).e^{at}$	$F(s-a)$	$F(s-a)$	$e^{-at}.\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(s)ds$	si existe	$lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	-	-
$E(t) = \begin{cases} 0 \le t \le a : 1 \\ t \ge a : 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}.(1 - e^{-as})$	-	-
$A(t) = \begin{cases} 0 \le t < a : 0 \\ t \ge a : 1 \end{cases}$	$\frac{1}{s}.e^{-as}$	-	-
$f(t).A(t)$	$e^{-as}.\mathcal{L}[f(t+a)]$	-	-
$f(t)$ de período T	$\frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$	-	-
$(f * g)(t)$	$F(s).G(s)$	-	-