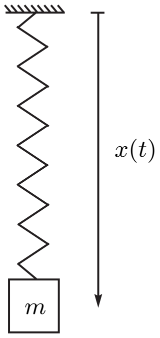
Introducción a las ecuaciones diferenciales

En este capítulo comenzaremos dando una introducción a las ecuaciones diferenciales, seguido de algunas definiciones y conceptos importantes que se trabajaran más en profundidad en el resto del texto. Aprenderemos a resolver algunas ecuaciones diferenciales y empezaremos a estudiar como bosquejar las soluciones o trayectorias de las soluciones sin la necesidad de resolver las ecuaciones.

Si ya han cursado algún curso de física, es probable que se hayan enfrentado a alguna ecuación diferencial ya que las mismas aparecen en innumerables problemas físicos. Una ecuación diferencial consiste en una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. Veamos un ejemplo.



Consideremos el sistema de una masa enganchada a un resorte de constante k y longitud natural nula como muestra la figura. Si despreciamos el rozamiento del aire, por la segunda ley de Newton sabemos que la ecuación que rige el movimiento de la masa m es:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + mg$$

donde $\ddot{x}(t)$ se corresponde con la aceleración de la masa en este caso. Esta es una ecuación diferencial donde vemos que la derivada segunda $\ddot{x}(t)$ depende de la posición de la masa. Una solución a esta ecuación diferencial es una función $x(t)$ que verifique dicha ecuación.

Este sistema tiene una posición de equilibrio cuando la fuerza del resorte se iguala al peso, esto sucede en $x = \frac{mg}{k}$. Si colocamos la masa en esa posición con velocidad nula, la masa no se moverá. De otra forma, uno esperaría que la masa oscile alrededor de ese punto, es decir que la función posición tenga la siguiente forma:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A\sin(wt + \phi).$$

Pero para que el movimiento de la masa efectivamente tenga esta forma esa función debe verificar la ecuación diferencial del sistema. Veamos si esto sucede. Derivando obtenemos que:

$$\dot{x} = Aw\cos(wt + \phi)$$
$$\ddot{x} = -Aw^2\sin(wt + \phi)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que:

$$-mAw^2\sin(wt + \phi) = -k\left(\frac{mg}{k} + A\sin(wt + \phi)\right) + mg = -kA\sin(wt + \phi)$$

Para que la igualdad se cumpla se debe verificar que $w^2 = \frac{k}{m}$ por lo tanto las soluciones a la ecuación serán de la forma:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A\sin\left(\sqrt{k/m}\;t + \phi\right). \tag{0.1}$$

Notar que tenemos infinitas soluciones para la misma ecuación, dependiendo de los valores de A y ϕ. Esto tiene sentido con el problema, ya que la masa no tiene un único movimiento posible. La masa puede oscilar con mayor o menor amplitud o permanecer en reposo en $x = \frac{mg}{k}$ dependiendo las condiciones iniciales (posición y velocidad).

A la solución particular con $A = 0$ se le llama **solución estacionaria**. Una solución estacionaria es una función que verifique la ecuación diferencial y sea de la forma:

$$x(t) = x_0(\text{cte}), \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

De ahí el nombre estacionaria, no varía con el tiempo. Diremos indistintamente que x_0 es un punto de equilibrio o un punto crítico si existe una solución estacionaria de la forma $x(t) = x_0$.

Volviendo al ejemplo del resorte vemos que si consideramos la función $x(t) = \frac{mg}{k}$ la misma tiene derivada nula. Si sustituimos esta función en la ecuación diferencial tenemos que:

$$m.0 = -k\frac{mg}{k} + mg = 0$$

por lo tanto la función verifica la misma. Hallar los puntos de equilibrio de una ecuación generalmente es la parte más sencilla del análisis (para los ejercicios del curso) ya que basta con fijarse los valores de x que anulan las derivadas.

Si bien habíamos visto que teníamos infinitas soluciones para la ecuación diferencial, intuitivamente se esperaría que dada una posición inicial y una velocidad inicial tengamos una única solución ya que el movimiento de la masa quedaría determinado. Es decir que el problema

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + mg \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

tenga una única solución. Se está suponiendo como tiempo inicial $t = 0$. Imponiendo las condiciones iniciales a las soluciones halladas en 0.1 tenemos lo siguiente:

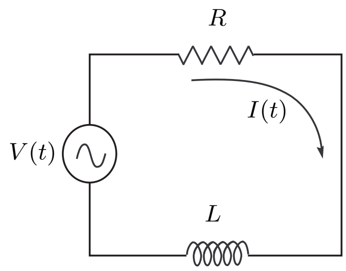
$$\frac{mg}{k} + A\sin(\phi) = x_0$$

$$A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\phi) = v_0$$

donde podemos despejar A y ϕ obteniendo una única solución de la forma (0.1) para el problema con condiciones iniciales.

¿Esto quiere decir que el problema tiene una única solución? En realidad, esto no basta. Tiene una única solución de la forma 0.1 pero no sabemos si existe otra función que verifique las tres condiciones que no tenga la forma mencionada. Podría pasar que en caso de existir otra solución la misma no tenga sentido físico y por lo tanto no sea de interés o que algo está faltando para dejar el movimiento determinado. Una parte importante del curso tratará acerca de la unicidad de las soluciones.

Veamos ahora otro ejemplo considerando el circuito de la figura. Este circuito está formado por una fuente sinusoidal $V(t) = A\sin(wt)$ con $A > 0$, una resistencia R y una bobina L. $I(t)$ es la intensidad que pasa por el circuito. Realizando mallas (aplicando las leyes de Kirchhoff) tenemos que:



$$A\sin(wt) = RI + L\dot{I}.$$

Nuevamente este sistema se rige por una ecuación diferencial. En este caso $\dot{I}$ no solo depende de la intensidad si no también del tiempo. Este problema no tiene ninguna solución estacionaria ya que no existe ninguna constante I_0 que anule $\dot{I}$ para todo tiempo. La derivada de I se anula cuando $A\sin(wt) = RI$, de donde $I = A\sin(wt)/R$ lo que no es constante.

La forma genérica de las ecuaciones diferenciales con las que trabajaremos será:

$$\dot{x} = f(t, x(t)).$$

Muchas veces escribiremos x en vez de $x(t)$ por comodidad, pero recordar que nos estamos refiriendo a una función que depende de t.

En el futuro, nos referiremos a la función x de la ecuación diferencial como una posición la cual dependerá del tiempo. Por esta razón, hablaremos de que pasa en el futuro o en el pasado, refiriéndonos a tiempos mayores o menores a la condición inicial. Obviamente en un problema físico la variable no tiene por que ser el tiempo, ni la función tiene que representar una posición (como en el caso del circuito, la función representa una intensidad), pero por comodidad utilizaremos estos términos.

***Ejemplo* 0.1.**

Consideremos ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = x$$

Pensemos en que nos está diciendo esta ecuación. Tenemos que la derivada de la función $x(t)$ es igual a la función. ¿Qué implica esto? Recordemos que la derivada representa la pendiente, es decir, que la pendiente será igual a la posición.

Dada una solución $x(t)$ de la ecuación, cuando $x(t)$ alcance el valor 3, en ese instante debe tener una pendiente de 3. Esto sucede para cualquier solución independientemente del tiempo en el cual alcancen el valor 3. A este tipo de ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = f(x)$ las llamaremos ecuaciones **autónomas**. Graficando estas pendientes nos quedamos con una clara idea de como son las soluciones (ver figura (1)).

Observar que para $x > 0$, $\dot{x}$ es positiva y por lo tanto las soluciones deberán ser crecientes en esa zona. Además a medida que va creciendo la función $x(t)$ también lo hace su pendiente (a mayor x mayor $\dot{x}$). De forma inversa para los $x < 0$, donde tenemos que la pendiente es negativa, las soluciones son decrecientes y decrecen cada vez más rápido. Para el caso particular $x = 0$ tenemos que la pendiente es horizontal, por lo tanto las soluciones no crecen ni decrecen en esta recta.

Resolver esta ecuación es sencillo. ¿Que función cuando la derivamos nos da la misma función? Las soluciones a esta ecuación serán de la forma $x(t) = x_0 e^t$. En particular tenemos una solución constante cuando $x_0 = 0$ por lo que 0 es un punto de equilibrio.

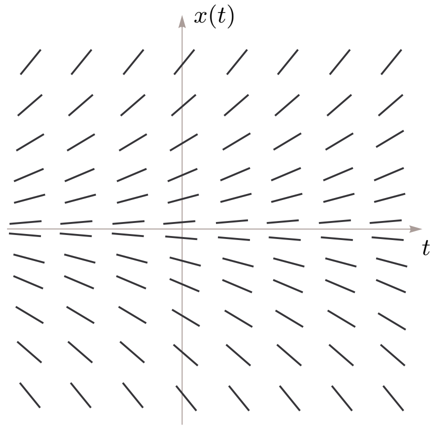


FIGURA 1. Campo de pendientes de la ecuación $\dot{x} = x$

En la mayoria de los casos, no será fácil resolver la ecuación diferencial obteniendo la forma analítica de las soluciones. Por esta razón, trataremos siempre de sacar la máxima información posible estudiando la ecuación. A continuación veremos un ejemplo de como hacer esto.

Hasta ahora hemos visto ecuaciones diferenciales donde las soluciones son funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pero también podemos tener casos de funciones que van de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si queremos saber la ecuación diferencial de como varía la demanda de la sandía, seguramente también depende de la estación, del precio, localidad, etc. Es decir que la derivada de la demanda de la sandía también depende de otras variables. Si consideramos n variables $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ la ecuación diferencial que rige el sistema la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{cases}$$

***Ejemplo* 0.2.**

Ahora tomemos un problema donde la función se encuentra en $\mathbb{R}^2$, donde llamaremos x e y a las funciones del primer y segundo elemento del vector. En otras palabras la solución será de la forma $(x(t), y(t))$. El problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Lo primero que se recomienda hacer al enfrentarse con una ecuación diferencial, es **hallar los puntos de equilibrio** de la ecuación. En este caso los puntos de equilibrio serán los puntos de la forma (x_0, y_0) donde ambas derivadas se anulen. Esto solo sucede en el origen, por lo tanto la única solución estacionaria es $(x(t), y(t)) = (0, 0)$.

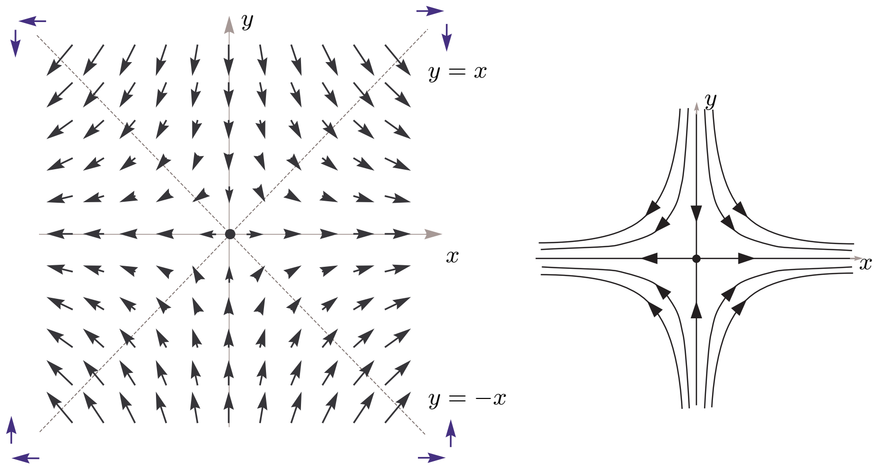
Luego, **estudiar el signo de las derivadas** y comenzar a hacerse un dibujo indicando en que zonas la solución será creciente o decreciente. Dado que nuestra solución se encuentra en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto, el gráfico de las soluciones estaría en $\mathbb{R}^3$ no dibujaremos las soluciones, si no que dibujaremos las trayectorias. En un plano $x - y$ iremos indicando como se mueven las soluciones.

En nuestro problema tenemos que para $x > 0$, $\dot{x} > 0$, por lo tanto las soluciones tendrán que ir moviéndose hacia la derecha (crece x). De modo contrario para $x < 0$. Para $y > 0$, tenemos que $\dot{y} < 0$ y por lo tanto las soluciones tienen que bajar. Para $y > 0$, las soluciones tendrán que subir. Las flechas azules en los extremos de la imagen (2.a) indican lo dicho en este párrafo.

En la curva donde $\dot{x} = 0$, tenemos que $x(t)$ no está creciendo ni decreciendo, en consecuencia, las trayectorias tendrán pendiente vertical en esta curva. Razonando de forma análoga donde $\dot{y} = 0$ concluimos que en esa zona las trayectorias tendrán pendiente horizontal. En nuestro caso las derivadas se anulan en los ejes. En $y = 0$ tenemos que las soluciones tendrán pendiente horizontal mientras que en $x = 0$ tendrán pendiente vertical. Esto nos permite pensar que existen posibles soluciones donde las trayectorias sean semirectas del eje x o y. Observar que las funciones $(x_0e^t, 0)$ o $(0, y_0e^{-t})$ son soluciones a nuestra ecuación diferencial y sus trayectorias son justamente semirectas de los ejes. El tercer paso conveniente, es **encontrar soluciones fáciles**, como las recién mencionadas. Esto no siempre es posible.

Por último, se puede realizar un estudio más profundo de las velocidades. Supongamos que en un punto del plano tenemos que $\dot{y} = 2\dot{x}$, esto implicaría que cuando las soluciones pasen por ahí se estarán moviendo el doble de rápido según la dirección y que la de x. Por lo tanto, la tangente a la trayectoria en ese punto será 2. De la comparación de $\dot{x}$ con $\dot{y}$ podemos ver según que dirección crece más y por lo tanto ver como es la tangente a la trayectoria.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior podemos generar la imagen (2.a) donde vemos las tangentes a las trayectorias de las soluciones. Las flechas cambian de tamaño ya que tenemos en cuenta el módulo de la velocidad. Este diagrama nos permite hacernos una idea de como son las trayectorias de estas soluciones, las cuales se muestran en la imagen (2.b). Las flechas indican el sentido en que las soluciones recorren estas curvas a medida que pasa el tiempo.



(a) (b)

Figura 2

Una solución se encontrará en una trayectoria o en otra dependiendo de la condición inicial. Si la condición inicial es $(x_0, 0)$ la solución se mantendrá en la semirecta correspondiente. Si $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ la solución se mantendrá en la curva con forma hiperbólica a la que pertenezca la condición inicial. Al segundo diagrama de la figura (2.b) se le llama **diagrama de fases**, el cual nos permite ver distintas trayectorias de las soluciones con distinta condición inicial. $\square$

Es interesante notar que distintas ecuaciones diferenciales pueden tener el mismo diagrama de fases. Tener el mismo diagrama de fases implica tener la misma trayectoria y recorrerla en igual sentido, pero en el diagrama de fases no vemos el tiempo. No sabemos cuanto tiempo demoró la solución en ir de un punto hasta otro. Dos ecuaciones pueden tener el mismo diagrama pero recorrer las órbitas a distintas velocidades.

Veremos un ejemplo de lo mencionado en el párrafo anterior. Consideremos los problemas

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Los puntos críticos de ambas soluciones son la recta $x = y$. Si tomamos cualquier función de la forma $(x(t), y(t)) = (x_0, x_0)$ se puede comprobar fácilmente que verifica la ecuación. Las derivadas son positivas cuando $x > y$ (zona debajo de dicha recta) y negativas por arriba de la recta. Dado $\dot{x} = \dot{y}$ en cualquier punto, tenemos que tanto x como y crecen con la misma velocidad, lo que hace que las trayectorias de las soluciones sean rectas a 45 grados. Si esa forma de verlo no los convence, también tenemos que dado que $\dot{x} = \dot{y}$, integrando de ambos lados respecto al tiempo obtenemos que $x = y + C$, llegando a la misma conclusión. El diagrama de fase para ambos problemas es el de la figura (3).

Dado que las trayectorias de las soluciones son de la forma $y = x + C$, tenemos que $x(t) - y(t) = -C$. En consecuencia las soluciones al segundo problema recorrerán a velocidad constante la recta ($\dot{x} = \dot{y} = -C$) y en particular la recorrerán más rápido cuanto mayor sea $|C|$. Esto no sucede en el primer problema, la velocidad con la cual recorren la curva va cambiando ($x^3 - y^3$ no es constante en la trayectoria).

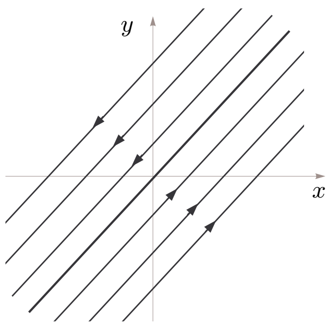


FIGURA 3

0.1. Métodos para resolver ecuaciones diferenciales

Si bien como ya mencionamos trataremos de saber lo más posible acerca de las soluciones sin resolverlas, veremos como resolver algunos casos sencillos. Para eso mencionaremos dos métodos, aunque existen muchos más. Comenzamos dando, informalmente, la definición de que entendemos por una ecuación diferencial y que es una solución.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Una ecuación diferecial es una ecuación del tipo $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. Una solución es una función $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ para todo $t \in (a, b)$.

0.1.1. Separación de variables

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Esta ecuación tiene un punto de equilibrio en $x = 0$, es creciente cuando x y t tienen el mismo signo y decreciente en caso contrario. Vemos que la derivada también se anula en $t = 0$, esto nos está diciendo que todas las soluciones a esta ecuación tienen pendiente horizontal ($\dot{x} = 0$) en tiempo cero. Si despejamos el tiempo de la ecuación diferencial tenemos que

$$\frac{\dot{x}}{x} = 2t.$$

Integrando de ambos lados según el tiempo:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}}{x}\ dt = \int_{t_0}^{t} 2t\ dt$$

Entonces $\log|x(t)|_{t_0}^{t} = t^2|_{t_0}^{t}$ de donde obtenemos que $\log|x(t)| = \log|x(t_0)| + t^2 - t_0^2$.

Despejando $|x(t)|$ y usando que $x(t_0) = x_0$, se obtiene lo siguiente.

$$|x(t)| = |x_0|e^{t^2 - t_0^2}.$$

Por lo tanto, $|x(t)| = \pm|x_0|e^{t^2-t_0^2}$, donde tomamos $+$ si $x_0 > 0$ y $-$ si $x_0 < 0$.

Este método sirve cuando tenemos una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = f(x)g(t)$. En este caso:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}}{f(x)}\ dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{f(u)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\ dt$$

donde en la segunda igualdad hicimos el cambio de variable $u = x(t)$.

0.1.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones de la forma $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en algún intervalo I son llamadas lineales de primer orden. Vamos a resolver este tipo de ecuaciones de dos formas. El primer método es una fórmula que nos permite resolver la ecuación y el segundo método es conocido como variación de constantes.

a) **Formula para lineales.**

Vamos a probar que si x verifica $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ entonces

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int e^{\int a(t)dt} b(t)dt + K\right) \text{ donde } K \text{ es una constante .}$$

Prueba: Primero observemos que

$$\left(xe^{\int a(t)}\right)^{\cdot} = \dot{x}e^{\int a(t)} + xe^{\int a(t)}a(t). \tag{0.2}$$

Por otro lado, partiendo de la igualdad $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, si la multiplicamos a ambos miembros por $e^{\int a(t)}$, tenemos que $(\dot{x} + a(t)x)e^{\int a(t)} = e^{\int a(t)}.b(t)$. Usando (0.2), tenemos que

$(\dot{x} + a(t)x)e^{\int a(t)} = \left(xe^{\int a(t)}\right)^{\cdot}$. Por lo tanto

$$\left(xe^{\int a(t)}\right)^{\cdot} = e^{\int a(t)}.b(t)$$

Integrando esta última igualdad (y simplificando el integral con la derivada) obtenemos

$$xe^{\int a(t)} = \int e^{\int a(t)}.b(t)dt + K$$

despejando, se llega a

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int e^{\int a(t)dt} b(t)dt + K\right)$$

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación $\dot{x} - 3x = e^t$. Por lo tanto $a(t) = -3$ y $b(t) = e^t$. Claramente $\int a(t) = -3t$. Aplicando la formula, tenemos que

$$x(t) = e^{3t}\left(\int e^{-3t}e^t dt + K\right) = e^{3t}\left(-e^{-2}/2dt + K\right) = -e^t/2 + Ke^{3t}.$$

b) **Variación de contantes.**

Una solución genérica a este tipo de ecuaciones es de la forma $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ donde las funciones de la derecha de la igualdad se les llama solución homogénea y particular. La solución particular es una solución a la ecuación diferencial lineal mientras que la homogénea debe cumplir que:

$$\dot{x}_H + a(t)x_H = 0.$$

Es fácil de verificar que la suma de una solución homogénea más una particular es solución.

$$(\dot{x}_H + \dot{x}_P) + a(t)(x_H + x_P) = \left(\dot{x}_H + a(t)x_H\right) + \left(\dot{x}_P + a(t)x_P\right) = b(t)$$

Lo que propone este método es que la solución particular sea de la forma

$$x_P = K(t)x_H.$$

Esto facilita mucho las cosas ya que la solución homogénea es fácil de calcular mediante variables separables. Veamos un ejemplo de como resolver una ecuación diferencial por este método. Consideremos la siguiente ecuación:

$$\dot{x} - 2tx = t$$

Por lo tanto la solución homogénea deberá cumplir:

$$\dot{x}_H - 2tx_H = 0.$$

Este es el mismo problema que se resolvió con variables separables, por lo que tenemos que $x_H(t) = Ae^{t^2}$, de modo que la solución particular será de la forma $x_P(t) = AK(t)e^{t^2}$. Para que esta función sea solución tendrá que verificar la ecuación diferencial, por lo tanto:

$$A\dot{K}(t)e^{t^2} + 2AtK(t)e^{t^2} - 2tAK(t)e^{t^2} = t$$

$$A\dot{K}(t)e^{t^2} = t$$

En consecuencia $K(t)$ debe cumplir que:

$$\dot{K}(t) = \frac{te^{-t^2}}{A}$$

Integrando tenemos que la función $K(t)$ es

$$K(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2A} \Rightarrow x_P(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2A}Ae^{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Observar que $-\frac{1}{2}$ es un punto de equilibrio. Esto también lo podíamos deducir estudiando donde se anula $\dot{x}$. Por último una solución genérica la podremos escribir como:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ae^{t^2} - \frac{1}{2}$$

Ejercicio: imponiendo que la función particular debe ser una solución a la ecuación diferencial $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ demostrar que:

$$\dot{K}(t)x_H = b(t)$$

0.1.3. Ecuaciones lineales de segundo orden.

Comenzamos recordando algunos conceptos de álgebra lineal que serán de mucha ayuda.
Sea $W = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua }\}$. No es difícil probar que W es un espacio vectorial. El vector nulo de este espacio es la función $\overrightarrow{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{0}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dos funciones φ_1 y φ_2 son linealmente independientes, si $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \overrightarrow{0}$ implica $C_1 = C_2 = 0$. La igualdad $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \overrightarrow{0}$ implica que $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$. Entonces las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$ son linealmente independientes.
Como vimos antes la igualdad $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \overrightarrow{0}$ implica que $C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\alpha \neq \beta$, podemos suponer, sin pérdidad de generalidad, que $\beta > \alpha$. Luego Dividiendo ambos miembros por $e^{\alpha t}$ la igualdad $C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} = 0$ se transforma en $C_1 + C_2e^{(\beta-\alpha)t} = 0$. Entonces

$$0 = \lim_{t\to-\infty} C_1 + C_2e^{(\beta-\alpha)t} = C_1.$$

Como $C_1 = 0$ entonces $C_2e^{\beta t} = 0$, lo que implica que $C_2 = 0$.

Lineales de segundo orden homogenea.

Consideremos la ecuación diferencial $(*)$ $\;a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ donde a, b y c son números reales. Para esta ecuación sea $V = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0\}$, o sea el conjunto de todas las soluciones de $(*)$. El siguiente resultado que será probado más adelante nos ayuda a resolver la ecuación.

Proposición 0.1. *Sea* $V = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0\}$. *Entonces*

1. *V es un espacio vectorial.*
2. *La dimensión de V es dos.*

El item 1. es muy fácil de probar. Para probar el item 2. necesitamos utlizar el Teorema de Picard, el cuál será enunciado más adelante.
La proposiciíon 0.1 nos dice que el conjunto solución de $(*)$ es un espacio vectorial de dimensión dos, por lo que, para resolver dicha ecuación basta con encontrar dos soluciones φ_1 y φ_2 que sean linealmente independientes. Luego toda solución es de la forma $\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Polinomio carácteristico.
El siguiente método nos permite encontrar dos soluciones linealmente independintes de la ecuación $(*)$. Dada la ecuación $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx = 0$ consideramos el polinomio, en la variable λ, $P(\lambda) = a\lambda^2+b\lambda+c$. Como es un polinomio de grado dos, tenemos tres posibilidades para las raices de P:

1. P tiene dos raices reales α y β con $\alpha \neq \beta$.
2. P tiene una raiz real doble α.
3. P tiene dos raices complejas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$.

Para el item 1. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$. Como las funciones φ_1 y φ_2 son linealmente independientes, entonces por la proposición 0.1, toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para el item 2. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = te^{\alpha t}$. Nuevamente, como son li se tiene que toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2te^{\alpha t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para el item 3. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}cos(\beta t)$ y $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}sen(\beta t)$. Como son li, toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t}cos(\beta) + C_2e^{\alpha t}sen(\beta)$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$.
Su polinomio carácteristico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Luego sus raices son $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Por el item 1. todas las soluciones son de la forma $\varphi(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Lineales de segundo orden no homogenea.

Ahora consideramos la ecuación $(*)$ $\quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = R(t)$ donde a, b y c son números reales y $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Vamos a notar por φ_H todas las soluciones de la ecuación homogenea $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ y por φ_p una solución particular de $(*)$.

Proposición 0.2. *φ es solución de la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = R(t)$ si y solo si $\varphi = \varphi_H + \varphi_p$.*

Los que nos dice esta proposición es si conocemos una solución particular, como las soluciones de la homogenea son fáciles de hallar, conocemos todas las soluciones de $(*)$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^t$.
Busquemos una solución particular φ_p de la forma $\varphi_p(t) = Ae^t$. Como $\varphi_p^{''}(t) = \varphi_p^{'}(t) = \varphi_p(t) = Ae^t$. Se tiene que cumplir

$$\varphi_p^{''}(t) - 5\varphi_p^{'}(t) + 6\varphi_p(t) = Ae^t - 5Ae^t + 6Ae^t = e^t.$$

Por lo tanto tomando $A = 1/2$ se tiene que $\varphi_p(t) = 1/2e^t$ es solución de $(*)$. Luego, por la proposición 0.2, se tiene que las soluciones son de la forma $\varphi(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} + 1/2e^t$.

0.2. Ecuaciones autónomas

Como ya se mencionó anteriormente, las ecuaciones autónomas son aquellas con la forma:

$$\dot{x} = f(x(t))$$

donde no aparece el tiempo directamente en la ecuación. En estos casos decimos que la derivada depende solo de la posición y no del tiempo ya que si bien la posición depende del tiempo, lo que nos da la derivada es su posición. Distintas soluciones pueden tener la misma posición en distintos tiempos pero tendrán la misma pendiente en esa posición.

Consideremos el problema $\dot{x} = f(x)$ y una solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Ahora tomemos la función $y(t) = x(t - t_0)$ lo que gráficamente es la función x corrida en el tiempo (a la derecha o a la izquierda dependiendo del signo de t_0). Veremos que $y(t)$ también es solución. Para eso debemos fijarnos que verifique la ecuación diferencial.

$$\dot{y} = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(y(t))$$

De modo que la función $y(t)$ es solución a la ecuación. La diferencia es que esta solución tiene distinta condición inicial ya que $y(t_0) = x(0) = x_0$ ¿Que nos dice esto? Que las soluciones con condición inicial $x(t_0) = x_0$ tendrán la misma forma independientemente de t_0 pero estarán corridas en el tiempo. Es por esta razón que generalmente pondremos como tiempo inicial el cero y no por esto perderemos generalidad en las ecuaciones autónomas.

***Ejemplo* 0.3.**

Estudiemos la ecuación:

$$\dot{x} = \sin(x).$$

Como dijimos anteriormente lo primero es ver los puntos de equilibrio. En este caso tenemos infinitos puntos de equilibrio que son de la forma $n\pi$, es decir que tenemos infinitas soluciones estacionarias (ir dibujándose estas soluciones). Luego tenemos que las soluciones serán crecientes mientras x está entre 0 y π, decrecientes entre π y 2π y asi sucesivamente. Supongamos que la solución al problema con condición inicial es única, es decir que

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución. Esto implicaría que los gráficos de las soluciones no se pueden cortar, ya que si consideráramos el problema con condición inicial el punto donde se cortan tendríamos dos soluciones posibles para ese problema. Haciendo esa suposición tenemos entonces que el resto de las soluciones estarán contenidas entre las soluciones estacionarias (franjas de espesor π).

A su vez las soluciones son estrictamente crecientes o decrecientes en estas franjas y están acotadas, por lo que las soluciones tendrán que tener asíntotas horizontales tanto en el futuro como en el pasado. Si una función tiene una asíntota horizontal la pendiente está tendiendo a cero. Esto solo sucede cuando nos acercamos a $x = n\pi$ por lo tanto las asíntotas tendrán que estar en esos valores.

Por último, por ser una ecuación autónoma tenemos que las soluciones se repiten corridas en el tiempo. En la figura (4) tenemos algunas soluciones a la ecuación diferencial con distinta condición inicial. Este problema se puede resolver por variables separables, queda a cargo del lector resolverlo y comparar los resultados.

Si la condición inicial es de la forma $n\pi$ sabemos que las soluciones permanecerán ahí, pero veamos que sucede si la condición inicial es cercana a $n\pi$. Vemos que si la condición inicial es $x_0 \approx 0$ las soluciones se van alejando del cero a medida que pasa el tiempo sin importar que tan chico sea x_0. Por esta razón decimos que el punto de equilibrio 0 es <u>inestable</u>. Esto no sucede si consideramos una condición inicial muy cerca de π. En este caso, las soluciones se van acercando a π a medida que pasa el tiempo. Diremos que π es un punto de equilibrio <u>asintóticamente estable</u>, ya que no solo las soluciones se mantienen cerca de π si no que también se acercan al punto. Estos conceptos los formalizaremos más adelante.

Si quisiéramos realizar el diagrama de fases en este caso el mismo sería una recta ya que las soluciones están en $\mathbb{R}$.

En este caso las trayectorias son los puntos de equilibrio o un conjunto de la forma $n\pi < x < (n+1)\pi$. Tener en cuenta que en cada trayectoria tenemos infinitas soluciones con la misma forma pero corridas en el tiempo. Esto mismo pasaba en el ejemplo 2 en la ecuación en $\mathbb{R}^2$, esta también era autónoma ya que no aparecía directamente el tiempo en la ecuación. Cada trayectoria representa infinitas soluciones corridas en el tiempo. ○

***Ejemplo* 0.4.**

Consideremos una nueva ecuación diferencial que es la siguiente:

$$\dot{x} = x^2 - 1.$$

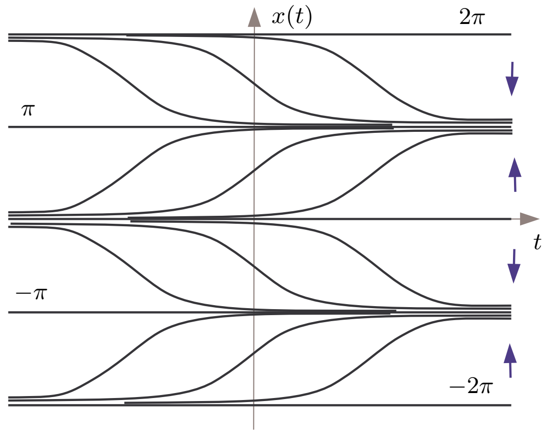
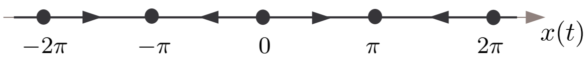


FIGURA 4. Soluciones de la ecuación $\dot{x} = \sin(x)$



Esta ecuación se anula en $|x| = 1$ donde tiene los puntos de equilibrio, es creciente cuando $|x| > 1$ y decreciente cuando $|x| < 1$. Este problema lo podemos resolver mediante variables separables. Consideraremos $t_0 = 0$ para facilitar las cuentas.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(L\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - L\left|\frac{1-x_0}{1+x_0}\right|\right) = t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0 + 1 - (1 - x_0)e^{2t}}{e^{2t}(1 - x_0) + x_0 + 1}$$

Podemos ver que esta función podría tener un tiempo donde se anule el denominador y por lo tanto no estar definida para todo tiempo. Esto sucede cuando:

$$e^{2t}(1 - x_0) + x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2t} = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

Se puede deducir que para $|x_0| < 1$ el término de la derecha de la igualdad anterior es negativo y por lo tanto no existe ningún tiempo que anule el denominador, mientras que para los $x_0 < -1$ el término de la derecha es positivo pero menor que 1, por lo que se anula para un tiempo menor que cero (en el pasado) y al contrario cuando $x_0 > 1$. Tenemos entonces que las soluciones del medio, estarán definidas tanto para el futuro como para el pasado. Las soluciones de más arriba no estarán definidas para todo tiempo en el futuro y las de más abajo no lo estarán para todo tiempo en el pasado.

Deducimos que **el dominio de las soluciones depende de la condición inicial**. Realizando los límites cuando el tiempo tiende a más o menos infinito pudimos realizar un bosquejo de las soluciones que se encuentra en la figura (5). Todas las funciones con $x_0 > 1$ son iguales pero corridas en el tiempo y lo mismo pasa con las otras condiciones iniciales. Vemos claramente que el 1 es un punto inestable mientras que el -1 es asintóticamente estable.

***Ejemplo* 0.5.**

Veamos un último ejemplo en $\mathbb{R}^2$ al que le realizaremos el diagrama de fase y esta conectado con el ejemplo anterior. Nuevamente, ir marcando en el plano $x - y$ la información que vamos obteniendo.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

La ecuación de $\dot{x}$ es igual al ejemplo anterior por lo que ya sabemos como es la primera componente de las soluciones a este problema. De la segunda componente tenemos que $\dot{y} = 0$ en $x = 0$ e $y = 0$ donde las trayectorias tendrán pendiente horizontal. Los puntos de equilibrio serán donde ambas derivadas se anulen, por lo que los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son de equilibrio. Luego tenemos que:

$$\dot{x} > 0 \Rightarrow |x| > 1 \qquad \dot{y} > 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ tienen el mismo signo}$$

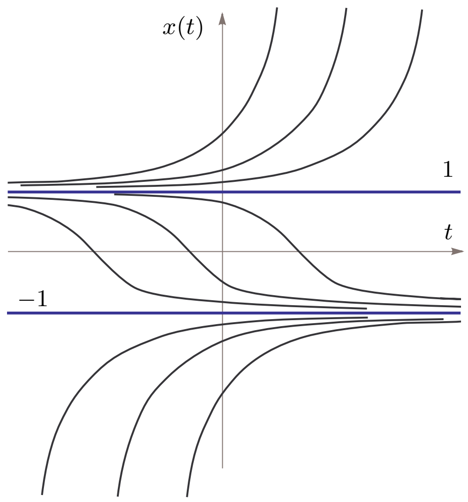


FIGURA 5. Soluciones de la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1$

$$\dot{x} < 0 \Rightarrow |x| < 1 \qquad \dot{y} < 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ tienen distinto signo}$$

Si nos paramos en $x = 1$ con $y \neq 0$ tendremos velocidad según y pero no según x. Esto, al igual que en el segundo ejemplo, nos permite pensar que podríamos tener soluciones de la forma $(1, y(t))$. De la misma forma podríamos pensar para las rectas $x = -1$ e $y = 0$. Veamos si esto es cierto. Tratemos de buscar una solución de la forma $(1, y(t))$. Vamos a sustituir esta función en la ecuación diferencial e imponer que la misma verifique la ecuación.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

La primera condición con $\dot{x} = 0$ ya la verifica. La segunda ecuación ya la hemos resuelto y basta con tomar $y(t) = y_0 e^t$. Entonces si consideramos la función $(1, y_0 e^t)$ la misma verifica la ecuación. Por si quedan dudas, podemos corroborarlo.

$$(x(t), y(t)) = (1, y_0 e^t) \Rightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (0, y_0 e^t)$$

Si sustituimos la función en la ecuación:

$$\dot{x} = 1 - 1 = 0$$
$$\dot{y} = 1.y_0 e^t = y_0 e^t$$

Por lo tanto la función verifica la ecuación diferencial. Análogamente tenemos soluciones de la forma $(-1, y_0 e^t)$ y $(x(t), 0)$ donde $x(t)$ es de la forma hallada en el ejemplo anterior. Respetando los signos de las derivadas, teniendo en cuenta que ya conocemos la forma de la primera componente de las soluciones y teniendo en cuenta las soluciones sencillas encontradas, podemos realizar un bosquejo del diagrama de fases que se encuentra en la imagen (6).

Por la primer componente de las soluciones, sabemos que las soluciones con $|x_0| < 1$ deben tender a $x = -1$ en el futuro y a $x = 1$ en el pasado. En la zona de la derecha las soluciones tienen que tender en el pasado a $x = 1$ y sabemos que las mismas no están definidas para todo tiempo en el futuro, ya que la primera componente no está definida para todo tiempo (para que la solución $(x(t), y(t))$ este definida ambas componentes deben estarlo). De forma contraria para la zona de la izquierda.

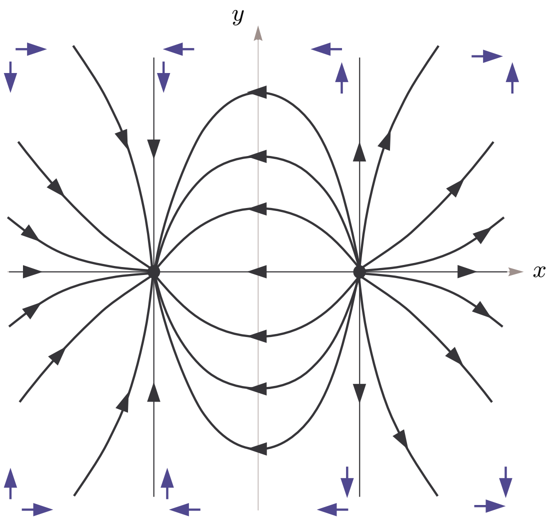


Figura 6. Diagrama de fases del ejemplo 5

○