Universidad de la República **16 de julio de 2019**

Facultad de Ingeniería - IMERL

EXAMEN: CALCULO III

Nº de examen	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicio 1

(a) Demostrar el teorema de Gauss.

(b) Se considera a $E(x,y,z)$ el campo eléctrico generado por una carga puntual ubicada en el origen, es decir $E(x,y,z) = k\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, con $k \neq 0$.
Sea S la superficie de un cubo de lado 1 centrado en el origen, orientada con normal saliente.
Calcular $\iint_S E$.

(c) Probar que el campo eléctrico definido anteriormente no es de rotores.

Ejercicio 2

Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [0, e^x - 1]\}$ región del plano.
Consideramos los campos:

$$F(x,y) = \left(\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} \right), \quad G(x,y) = \left(\frac{x}{x+1}, \frac{y^2}{y+1} \right).$$

Calcular $\int_{\delta D}(F+G)$ justificando detalladamente.

Ejercicio 3

(a) Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 e irrotacional. Probar que X es de gradientes.

(b) Sea $X(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0 \right)$ y $\mathcal{C}$ una curva que une los puntos $(1,1,0)$ y $(-1,1,1)$ incluida en $D = \{(x,y,z) : y > 0\}$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} X$.

Sugerencia: Puede ser útil recordar que $\int \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + k$, con $k \in \mathbb{R}$ e $y > 0$.

Solución

Ejercicio 1

(a) Ver Teórico.

(b) El campo eléctrico E posee divergencia nula en todo su dominio, por lo tanto si tomamos S' la esfera centrada en el origen, de radio 1 orientada con normal saliente se obtiene que:

$$\iint_S E\,dS = \iint_{S'} E\,dS$$

Por otro lado,

$$\iint_{S'} E\,dS = \iint_{S'} \left\langle k\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{(x,y,z)}{||(x,y,z)||} \right\rangle dS = kA(S') = 4\pi k.$$

Entonces

$$\iint_S E\,dS = 4\pi k$$

(c) Supongamos por absurdo que E es de rotores, entonces existe $G : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Rot}(G) = E$.
Dado S definida en el item anterior, consideremos $S^+ = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ y $S^- = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$, entonces por aditividad:

$$\iint_S E\,dS = \iint_{S^+} E\,dS + \iint_{S^-} E\,dS$$

Por otro lado, usando el teorema de Stokes se tiene que:

$$\iint_{S^+} E\,dS = \iint_{S^+} \mathrm{Rot}(G)\,dS = \int_{\delta S^+} G\,ds$$

$$\iint_{S^-} E\,dS = \iint_{S^-} \mathrm{Rot}(G)\,dS = \int_{\delta S^-} G\,ds$$

Observa que $\delta S^+ = \delta S^-$ pero están orientadas de manera opuesta, por lo cual

$$\iint_S E\,dS = \iint_{S^+} E\,dS + \iint_{S^-} E\,dS = 0$$

Esto es absurdo ya que $\iint_S E\,dS \neq 0$.

Ejercicio 2

Observar que el punto $(1,1)$ pertenece al interior de D, por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon = B((1,1),\epsilon) \subset D$. Entonces por Green se obtiene que:

$$\int_{\delta D} F\,ds - \int_{\delta B_\epsilon} F\,ds = \iint_{\Omega} \mathrm{Rot}(F)\hat{k}\,dxdy$$

donde δD y δB_ϵ están orientadas con normal saliente y Ω es la región comprendida entre las curvas. Dado que F es irrotacional se tiene que:

$$\int_{\delta D} F\,ds = \int_{\delta B_\epsilon} F\,ds$$

y calculando la última integral se obtiene que vale cero.
Por otro lado, para G se puede aplicar directamente el teorema de Green y dado que también es irrotacional la integral sobre δD de G es cero. Luego

$$\int_{\delta D} F + G\,ds = 0$$

También es posible realizar este ejercicio demostrando que el campo $F + G$ es de gradientes.

Ejercicio 3

(a) Ver Teórico.

(b) Observar que D es simplemente conexo y X es irrotacional por lo cual X es de gradientes en D. Esto implica la integral pedida no depende del camino. De echo la función $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de expresión $f(x,y,z) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ es un potencial escalar de X. Por lo tanto

$$\int_C X\,ds = f(-1,1,1) - f(1,1,0) = \mathrm{Arctg}(-1) - \mathrm{Arctg}(1) = -\frac{\pi}{2}$$