**Universidad de la República** **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
**Facultad de Ingeniería** **IMERL**

# Examen.

Diciembre 2018

| Nº. Examen | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

PARA USO DOCENTE

| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 | Ej 6 | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**Ejercicios de Múltiple Opción.**

Total: 70 puntos.

14 puntos respuesta correcta, -3 puntos respuesta incorrecta, 0 puntos si no contesta.

**1.** Se considera el conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq x - z + 2\}$.
Indicar la opción correcta:

(A) $Vol(V) = \frac{75}{8}\pi$. ☐

(B) $Vol(V) = \frac{81}{32}\pi$. ☐

(C) $Vol(V) = \frac{9}{4}\pi$. ☐

(D) $Vol(V) = \frac{45}{8}\pi$. ☐

**2.** Se considera la sucesión $x_0 = 1, x_1 = 1 + 1/1, x_2 = 1 + \frac{1}{1+1/1}, \cdots$ definida por inducción mediante la regla $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Indicar la opción correcta:

(A) La sucesión es monótona y está acotada. ☐

(B) La sucesión no es monótona pero esta acotada. ☐

(C) La sucesión no está acotada pero es monótona. ☐

(D) La sucesión no es monótona ni acotada. ☐

**3.** Sean, $a, b, \varphi$ y $\theta$ números reales positivos. Consideremos los números complejos $z = ae^{i(\theta+\varphi)}$ y $w = be^{i\varphi}$. Definiendo $c = |z - w|$ indicar la opción correcta:

(A) $c^2 = a^2 + b^2$. ☐

(B) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\theta)$. ☐

(C) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$. ☐

(D) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta)$. ☐

**4.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) Existen $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2$, $\forall\, v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$. ☐

(B) $f$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. ☐

(C) Existen $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2$, $\forall\, v = (v_1, v_2) : v_1 v_2 \neq 0$. ☐

(D) Existe $f_{yx}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0) = 1$. ☐

**5.** Se consideran las siguientes integrales impropias:

$$(I) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{x^2(1+e^x)} \qquad\qquad (II) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)(1+\sqrt{|x|})}$$

Indicar la opción correcta:

(A) La integral (I) converge, pero la integral (II) diverge. ☐

(B) La integral (II) converge, pero la integral (I) diverge. ☐

(C) Ambas integrales convergen. ☐

(D) Ambas integrales divergen. ☐

**Ejercicio de Desarrollo**

Total: 30 puntos.

**6.**

1. (20 puntos) Probar el siguiente resultado:

   Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto, tales que las derivadas parciales de $f$ existen en una bola de centro $(x_0, y_0)$ y ambas son continuas en $(x_0, y_0)$. Entonces $f$ es diferenciable en $(x_0, y_0)$.

2. (10 puntos) ¿Es cierto el recíproco? Demostrar o dar un contraejemplo.