Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2018**

Vectores de respuestas de las versiones:

- Versión 1. Primer ejercicio de topología:

  1 (D); 2 (D); 3 (C); 4 (B); 5 (D).

- Versión 2. Primer ejercicio de series:

  1 (A); 2 (D); 3 (B); 4 (B); 5 (B).

- Versión 3. Primer ejercicio de complejos:

  1 (B); 2 (C); 3 (A); 4 (A); 5 (A).

Ejercicio de desarrollo

Parte i. Ver teórico.

Parte ii. Consideramos $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.

Si $\beta \leq 0$, entonces se cumple que $\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta} \geq \dfrac{1}{n}\cdot$ Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ diverge.

Si $\beta \geq 0$. Consideramos la función $f : [2, +\infty] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)^\beta}$. Luego

$$f^{'}(x) = -\frac{\ln(x)^{\beta-1}(\ln(x) + \beta)}{[x\ln(x)^\beta]^2}.$$

De donde deducimos que $f^{'}$ es negativa si $x \geq 2$ y por lo tanto f es decreciente. Por lo tanto podemos aplicar el criterio integral ya que f es continua y positiva para $x \geq 2$. Por otro lado

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\ln(x)^\beta}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \ln(x)$ obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)^\beta} = \int \frac{du}{u^\beta} = \begin{cases} \frac{u^{(-\beta+1)}}{-\beta+1} & si \quad \beta \neq 1, \\ \ln(u) & si \quad \beta = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\beta \neq 1$ se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\ln(x)^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \,\Big|_2^t = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \beta < 1, \\ -\frac{\ln(2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si} \quad \beta > 1 \end{cases}$$

Si $\beta = 1$, se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{t\to+\infty} \ln(\ln(x)) \,\Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty} \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$$

Por lo tanto, por el criterio integral, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge si $\beta > 1$ y diverge si $\beta \leq 1$.