

## **INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS**

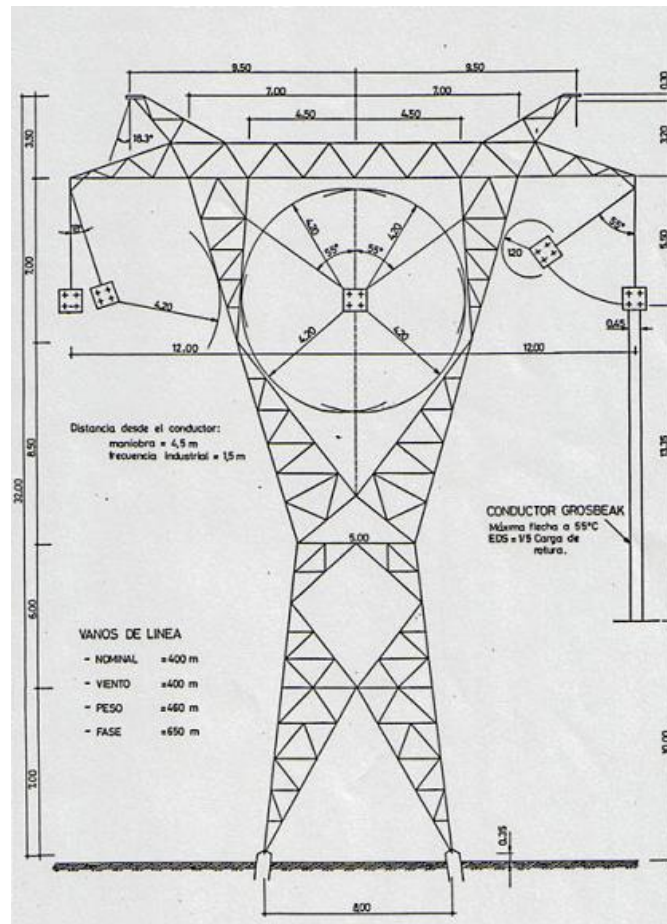
## INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del curso es describir y analizar las técnicas empleadas habitualmente para calcular transitorios electromagnéticos en sistemas de potencia, y la aplicación de estas técnicas de cálculo al diseño y especificación de los componentes del sistema.

### Ejemplo: Coordinación de aislación de líneas aéreas

El objetivo de un estudio de coordinación de aislación de una línea aérea es la definición (o verificación, si la línea es existente) de los siguientes parámetros principales (Ver figura):

- Distancias en aire entre partes vivas y torre y entre fases
- Características principales de las cadenas de aisladores
- Resistencia de puesta a tierra de las torres
- Disposición de los cables de guardia



Para conseguir este objetivo, será necesario :

a) Evaluar las tensiones a las cuáles podrá estar sometida la línea (“stress voltages” o “tensiones impuestas”), ya sea de origen interno (tensión de operación normal, maniobras en la red, cortocircuitos) o externo (descargas atmosféricas).

El cálculo de estas tensiones requiere necesariamente un estudio del sistema eléctrico, tanto de régimen (flujos de carga) como transitorio (análisis de transitorios electromagnéticos).

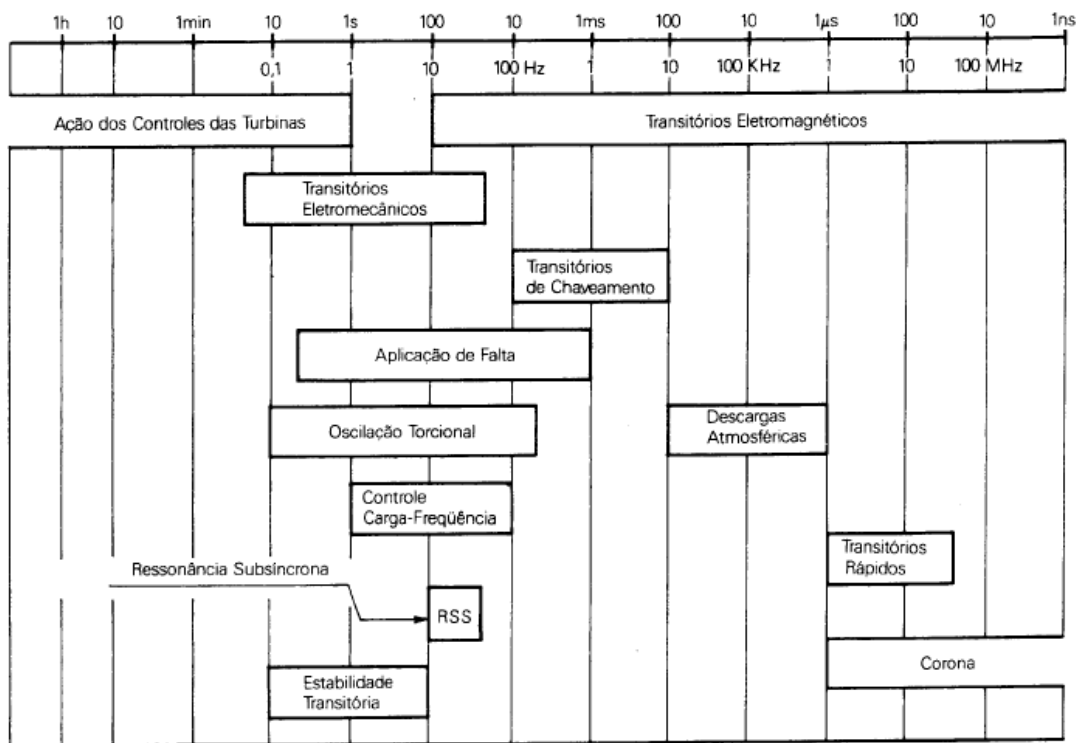
b) Evaluar la soportabilidad de las aislaciones involucradas (distancias en aire, aisladores) a las tensiones impuestas (“withstand voltages” o “tensiones soportadas”). Las curvas de soportabilidad de las aislaciones se obtienen en la literatura a partir de ensayos de laboratorio o de campo en condiciones normalizadas.

c) Definir los parámetros de la aislación comparando las tensiones impuestas con las soportadas, por medio de procedimientos de cálculo y criterios normalizados.

Una simulación de transitorios electromagnéticos tiene por objeto, esencialmente, evaluar las tensiones y corrientes (y ocasionalmente las energías) en diversos elementos del sistema durante el período transitorio inmediatamente posterior a la ocurrencia de perturbaciones en el sistema.

Los intervalos de tiempo en que ocurren los transitorios electromagnéticos dependen del tipo de perturbación estudiada, variando desde decenas de  $\mu$ s hasta decenas de milisegundos, de acuerdo a la gráfica adjunta.

Los intervalos de tiempo totales de estudio pueden ser bastante más grandes cuando se analizan los casos en que el sistema está sometido a varias perturbaciones sucesivas (una línea aérea sometida a energización y reenganche, por ejemplo ).



Si bien estrictamente los transitorios electromagnéticos son (por definición) aquéllos que surgen a consecuencia de los intercambios de la energía almacenada en las

inductancias y capacitores del sistema, cabe destacar que en las aplicaciones es necesario frecuentemente tener en cuenta también en el análisis las energías mecánicas asociadas a los rotores de las máquinas.

Un análisis detallado de las sobretensiones temporarias que ocurren durante un rechazo de carga, p.ej, puede requerir, por lo tanto, tiempos de estudio de varios segundos, del orden de los utilizados habitualmente en los estudios de estabilidad transitoria.

Las aplicaciones que se describirán en el curso son esencialmente las clásicas: coordinación de aislación de líneas y estaciones y especificación de equipos de maniobra.

Cabe destacar, no obstante, que las técnicas de simulación que se describirán se pueden aplicar en muchas otras áreas vinculadas al diseño y operación de los sistemas de potencia: ajustes de relés de protección y sistemas de control, análisis de calidad del suministro de energía eléctrica, etc.

Las técnicas de cálculo a describir son fundamentalmente las implementadas en el programa EMTP, el cuál es, por lejos, la herramienta de cálculo más utilizada a nivel mundial para el cálculo de transitorios electromagnéticos.

El EMTP también se aplica en el análisis de fenómenos transitorios más lentos (transitorios electromecánicos), que no serán tratados en el curso.

Si bien la mayoría de las aplicaciones descritas se centran en el diseño de Sistemas de Trasmisión (sistemas de tensión nominal 100 kV o superior), cabe destacar que las técnicas de cálculo descritas son también aplicables a sistemas de potencia de tensión nominal más baja. En este último caso, no obstante, no siempre se justifica económicamente la realización de este tipo de estudios de transitorios electromagnéticos en la etapa de diseño.

## TIPOS DE SOBRETENSIONES EN LOS SISTEMAS DE POTENCIA

Las tensiones a las que puede estar sometido un sistema de potencia son de forma y duración variada, pudiendo ir desde tensiones a frecuencia industrial que duran tiempos muy largos (tensión normal de operación, tensión en el extremo abierto de una línea durante una maniobra programada de energización) hasta “rampas” de tensión con tiempos de frente de unos pocos  $\mu\text{s}$  (descargas atmosféricas).

Se hace necesario, por lo tanto, clasificar de alguna forma los tipos de sobretensiones posibles a los efectos de:

- a) Facilitar las simulaciones que permiten calcular las tensiones impuestas al sistema, dado que a cada “tipo” de tensión estudiada se asocia una metodología de cálculo y, en particular, un distinto modelado de los elementos del sistema.
- b) Comparar las tensiones impuestas con las tensiones soportadas por los elementos del sistema, las cuáles se evalúan en ensayos de campo o laboratorio para determinadas ondas de tensión normalizadas.

La tabla adjunta (Norma IEC 60071-2, Tabla 1) muestra la clasificación usual de las tensiones y sobretensiones que pueden ocurrir en un sistema de potencia.

Table 1 – Classes and shapes of overvoltages – Standard voltage shapes and standard withstand tests

Class	Low frequency		Transient		
	Continuous	Temporary	Slow-front	Fast-front	Very-fast-front
Voltage or over-voltage shapes					
Range of voltage or over-voltage shapes	$f = 50 \text{ Hz}$ or $60 \text{ Hz}$ $T_1 \geq 3\,600 \text{ s}$	$10 \text{ Hz} < f < 500 \text{ Hz}$ $0,03 \text{ s} \leq T_1 \leq 3\,600 \text{ s}$	$20 \mu\text{s} < T_p \leq 5\,000 \mu\text{s}$ $T_2 \leq 20 \text{ ms}$	$0,1 \mu\text{s} < T_1 \leq 20 \mu\text{s}$ $T_2 \leq 300 \mu\text{s}$	$3 \text{ ns} < T_1 \leq 100 \text{ ns}$ $0,3 \text{ MHz} < f_1 < 100 \text{ MHz}$ $30 \text{ kHz} < f_2 < 300 \text{ kHz}$
Standard voltage shapes					1)
Standard withstand test	1)	Short-duration power frequency test	Switching impulse test	Lightning impulse test	1)

Nosotros usaremos la nomenclatura clásica que define tres tipos de tensiones a analizar:

- a) Sobretensiones temporarias (TOV) o de frecuencia industrial, incluyendo a las tensiones continuas (más de 1 hora de duración: habitualmente la tensión normal de operación) y a las sobretensiones temporarias propiamente dichas (30 ms a 1 hora de duración: línea abierta, rechazo de carga, etc.). La

principal característica de estas sobretensiones es su (relativamente) larga duración, su forma de onda de (aproximadamente) frecuencia industrial (con eventuales componentes armónicas bajas), y su escaso amortiguamiento.

La evaluación de la tensión soportada se hace con ensayos normalizados a frecuencia industrial, con duración 1 minuto (para las TOV propiamente dichas) o de muy larga duración (cientos de horas: para evaluar tensiones soportadas por aisladores en condiciones de polución, envejecimiento de aisladores sintéticos, etc.).

- b) Sobretensiones de maniobra (SOV) (sobretensiones de “frente lento” según la Tabla) del tipo impulsivo, con duración de hasta 20 ms.

Su nombre se debe, precisamente, a que se originan habitualmente en maniobras en la red.

La evaluación de la tensión soportada se hace con ensayos normalizados con ondas de forma: Tiempo de frente/Tiempo de cola=250/2500  $\mu$ s.

- c) Sobretensiones de rayo (sobretensiones de “frente rápido” según la Tabla) del tipo impulsivo, con duración de hasta 300  $\mu$ s.

Su nombre se debe, precisamente, en que se originan habitualmente por descargas atmosféricas.

En coordinación de aislación de estaciones se estudian asimismo sobretensiones “de rayo” de distinto origen: reencendido de disyuntores, p.ej.

La evaluación de la tensión soportada se hace con ensayos normalizados con ondas de forma: Tiempo de frente/Tiempo de cola=1,2/50  $\mu$ s.

Se hace notar que las sobretensiones de “frente muy rápido” indicadas en la Tabla son sólo aplicables a casos muy especiales (p.ej sobretensiones por maniobra en estaciones GIS), que no serán descritos en el curso.

A los efectos de comparar las tensiones impuestas con las soportadas se hace necesario, por lo tanto, “convertir” las ondas de tensión impuestas (obtenidas de las simulaciones del sistema eléctrico) en ondas de tensión de alguno de los tres tipos normalizados.

Esto se hace por el procedimiento sencillo de:

- a) Identificar la tensión impuesta con alguna de las tres tensiones normalizadas mediante consideraciones cualitativas, basadas en el tipo de perturbación estudiada (descarga atmosférica, maniobra, etc.) y en las formas de onda obtenidas en la simulación.
- b) La tensión impuesta se convierte en una tensión representativa equivalente cuyo valor de pico (o distribución de valores de pico) se obtiene de la simulación y cuya forma de onda y duración coinciden con la de la tensión normalizada escogida.

## CIRCUITOS DE PARÁMETROS CONCENTRADOS

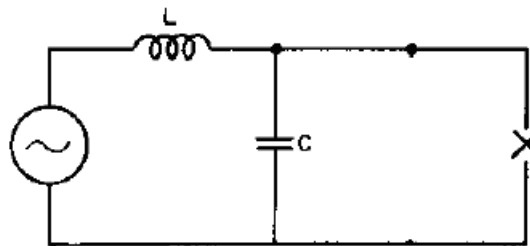
La complejidad de los sistemas de potencia hace imprescindible que los análisis de transitorios electromagnéticos se realicen con la ayuda de programas digitales de cálculo en el dominio tiempo (EMTP o similar).

No obstante, suele ser útil realizar un primer análisis cualitativo del fenómeno en estudio modelando el sistema por medio de circuitos simplificados de parámetros concentrados. Este modelo simplificado se resuelve luego a través de simulaciones con programas sencillos o por métodos clásicos de resolución analítica de sistemas de ecuaciones diferenciales.

### Ejemplo:

Se pretende evaluar a través de un modelo simplificado la tensión en bornes de un disyuntor que abre un cortocircuito franco terminal (tensión transitoria de restablecimiento), parámetro de importancia para evaluar el “stress” al cuál estará sometido el disyuntor durante la maniobra.

El modelo simplificado es como el indicado en la figura .(En particular: el modelo es monofásico y se desprecian resistencias)



La ecuación diferencial aplicable es:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i . dt = E . \cos(w . t + \psi)$$

Si se supone la apertura en  $t=0$ , resulta  $\psi=0$ , dado que el circuito es puramente reactivo y los disyuntores siempre abren cuando la corriente pasa por su cero natural.

La solución  $i^{tr}$  de la ecuación homogénea define el transitorio:

$$i^{tr} = I^{tr} . \cos(v . t + \gamma)$$

siendo  $\gamma$  e  $I^{tr}$  constantes que dependen de las condiciones iniciales del transitorio y

$v = \sqrt{1/LC}$  la pulsación (frecuencia por  $2\pi$ ) natural del circuito

La tensión transitoria entre extremos del condensador es:

$$e_C^{tr} = -L \frac{di^{tr}}{dt} = L . I^{tr} . v . \text{sen}(v . t + \gamma)$$

Se observa que tanto el transitorio de corriente como el de tensión son una oscilación a la frecuencia natural del circuito.

Las constantes  $\gamma$  e  $I^{tr}$  se obtienen imponiendo continuidad en  $t=0$ :

- en la corriente a través de la inductancia y
- en la tensión entre bornes del condensador.

Para imponer estas condiciones es necesario conocer la solución completa de la ecuación diferencial, que es la suma  $i=i^{tr}+i^{re}$  de la solución transitoria  $i^{tr}$  y la solución de régimen post-contingencia  $i^{re}$  (que es una solución particular de la ecuación diferencial completa, con término independiente):

$$i^{re} = I^{re} \cdot \text{sen}(\omega.t)$$

Donde

$I^{re}=E/Z$  es el pico de la corriente en régimen, siendo  $Z=\omega L-1/(\omega C)$

$$e_C^{re} = -\frac{I^{re}}{\omega \cdot C} \cdot \cos(\omega.t) = E_C^{re} \cdot \cos(\omega.t)$$

Donde

$$E_C^{re} = \frac{E}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right]}$$

es el pico de la tensión en régimen.

Las condiciones iniciales son :

$i(0)=0$  (apertura del disyuntor en el cero de corriente)

$e_C(0)=0$  (capacitor cortocircuitado durante la falta)

de dónde:

$$i^{tr}(0) = I^{tr} \cdot \cos(\nu \cdot 0 + \gamma) \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

$$e_C^{tr}(0) = L \cdot I^{tr} \cdot \nu \cdot \text{sen}(\nu \cdot 0 + 90^\circ) = \sqrt{L/C} \cdot I^{tr} = -e_C^{re}(0) = -E_C^{re}$$

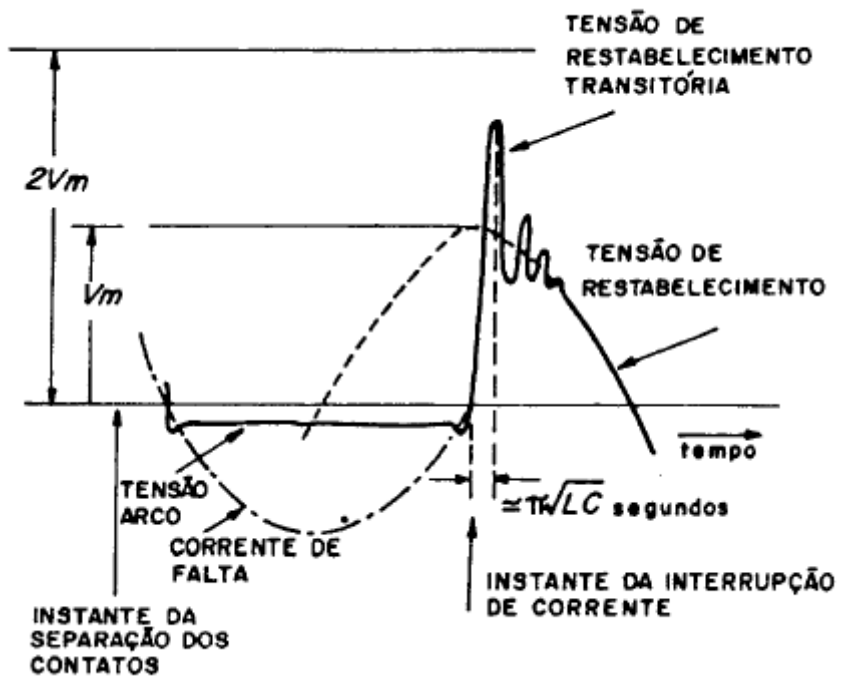
Juntando todo, la expresión en función del tiempo de la tensión buscada es:

$$e_C(t) = E_C^{re} [\cos(\omega.t) - \cos(\nu.t)]$$

Dado que habitualmente  $\nu \gg \omega$ , cerca de  $t=0$  resulta  $e_C(t) \approx E[1 - \cos(\nu.t)]$  resultado que se usa habitualmente para definir los ensayos de laboratorio que permiten verificar que el disyuntor soportará en servicio este tipo de maniobra.

En los casos reales, en que aparecen amortiguamientos, el aspecto de la tensión transitoria de restablecimiento es como el de la figura.



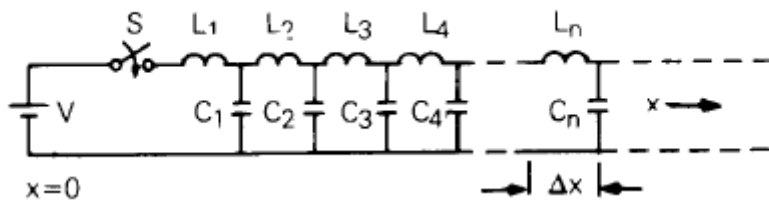


## CIRCUITOS DE PARÁMETROS DISTRIBUÍDOS-ONDAS VIAJERAS

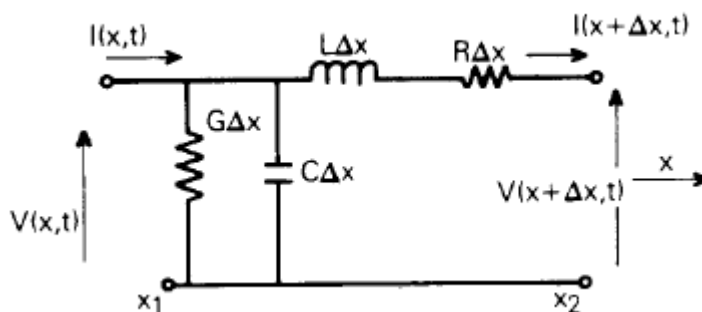
Ciertos elementos del sistema de potencia (líneas aéreas, cables, transformadores en algunos tipos de estudio) poseen en forma más acentuada la propiedad de “longitud eléctrica”. Esto significa que si se inyecta una onda de tensión en uno de sus extremos (extremo “emisor”) deberá transcurrir un tiempo no nulo (tiempo de propagación) antes que la onda “aparezca” en el otro extremo (extremo “receptor”).

### Comentario:

Si uno observa el modelo clásico de una línea aérea, es bastante evidente que la propiedad de “longitud eléctrica” es consecuencia del “delay” que introducen las inductancias serie en transportar la corriente que carga los capacitores paralelo.



### Ecuación de las ondas viajeras



Analicemos el caso particular de una línea unifilar homogénea, resolviendo los circuitos elementales en un instante “t”:

$$V(x + \Delta x, t) - V(x, t) = -R \cdot \Delta x \cdot I(x + \Delta x, t) - L \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial I(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

$$I(x + \Delta x, t) - I(x, t) = -G \cdot \Delta x \cdot V(x, t) - C \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

( $L$ ,  $R$ ,  $G$  y  $C$  son los parámetros de la línea por unidad de longitud)

Operando y despreciando diferenciales de segundo orden se obtienen las clásicas ecuaciones de las ondas viajeras :

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = R.I(x,t) + L.\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = G.V(x,t) + C.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

Derivando cada ecuación respecto a  $x$ , la otra respecto a  $t$ , y operando obtenemos las ecuaciones de segundo orden “desacopladas”:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = L.C \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + (R.C + L.G) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + R.G.V(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = L.C \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + (R.C + L.G) \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R.G.I(x,t)$$

Caso particular :  $R=G=0$  (línea “ideal”, sin pérdidas):

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = L.C \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = L.C \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}$$

Se demuestra que la solución de la primer ecuación es de la forma:

$$V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \text{ (velocidad de propagación) y } f_1, f_2 \text{ funciones arbitrarias, que quedarán}$$

definidas por las condiciones de borde.

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$I(x,t) = \frac{[f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]}{Z_w}$$

Donde

$$Z_w = \sqrt{L/C} \text{ (impedancia de onda o impedancia característica).}$$

Interpretación:

Si suponemos conocida  $f_1(0)$  quedará definida  $f_1(x_1 - v.t_1) = f_1(0)$  en todo par de valores  $(x_1, t_1)$  que cumpla:  $x_1 = v.t_1$ .

$f_1$  se interpreta, por lo tanto, como una “onda viajera” de tensión (onda incidente) que avanza por la línea a partir de  $t=0$  desde el extremo emisor ( $x=0$ ) sin deformarse, y a velocidad  $v$ .

En forma análoga:  $f_2$  se interpreta como una onda viajera (onda reflejada) que avanza por la línea a velocidad  $-v$ .

El comportamiento completo de las ondas incidente y reflejada puede verse mejor en un ejemplo en el cuál se impongan condiciones de borde en el extremo lejano.

Comentario:

La onda reflejada tiene signo negativo en la expresión de la corriente para reflejar el hecho de que las corrientes se asumen (convencionalmente) positivas en el sentido de avance de la onda incidente. Este problema no aparece en la expresión de la tensión (tanto la tensión incidente como la reflejada se refieren a una misma tensión de referencia: la tierra).

Ejemplo

Línea de longitud  $d$ , abierta en el extremo remoto.

Se supone la línea en reposo:  $V(x,t) = I(x,t) = 0 \quad \forall t < 0 \text{ y } 0 \leq x \leq d$

A partir del instante  $t=0$  se impone una cierta onda de tensión  $V(0,t)$

La condición de borde en el extremo lejano es  $I(d,t) = 0$  para  $\forall t$

a)

$$V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = 0 \quad \text{si } t < 0$$

$$Z_w \cdot I(x,t) = f_1(x - vt) - f_2(x + vt) = 0 \quad \text{si } t < 0$$

$$\Rightarrow f_1(x - vt) = f_2(x + vt) = 0 \quad \text{si } t < 0$$

En particular:  $f_1(0 - vt) = 0$  si  $t < 0$ , y en una ubicación  $x_I$  de la línea se cumplirá  $f_1(x_I - vt) = 0$  si  $x_I - vt = -vt$  y  $t < 0$ . Como  $-vt$  “barre” todos los reales positivos si  $t < 0$ , resulta  $f_1(x_I - vt) = 0 \quad \forall t_I$  que cumpla:  $t_I < x_I/v$ .

Interpretación: la onda incidente emitida en  $x=0$  no se “detecta” en  $x_I$  hasta transcurrido un tiempo  $t_I = x_I/v$ , lo cuál es (para la onda incidente) la propiedad de “longitud eléctrica” mencionada anteriormente.

b)

$$Z_w \cdot I(d,t) = f_1(d - vt) - f_2(d + vt) = 0 \quad \forall t$$

y, por lo visto más arriba,  $f_1(d - vt) = 0$  si  $t < d/v$

$$\Rightarrow f_2(d + vt) = 0 \quad \text{si } t < d/v.$$

Como  $V(d,t) = f_1(d - vt) + f_2(d + vt)$  resulta  $V(d,t) = 0$  si  $t < d/v$ .

Interpretación: la onda de tensión completa (no sólo la incidente) se “detecta” en el extremo receptor recién transcurrido  $t = d/v$

c)

En una ubicación  $x_I$  de la línea se cumplirá  $f_2(x_I + vt) = 0$  si  $x_I + vt = d + vt$  y  $t < d/v$ . Como  $d + vt$  “barre” todos los reales menores que  $2d$  si  $t < d/v$ , resulta  $f_2(x_I + vt) = 0 \quad \forall t_I$  que cumpla:  $t_I < (2d - x_I)/v$ .

Interpretación: la onda reflejada emitida en  $x=d$  no se “detecta” en  $x_I$  hasta transcurrido un tiempo  $t_I = (2d - x_I)/v$ , lo cuál es (para la onda reflejada) la propiedad de “longitud eléctrica” mencionada anteriormente.

d)

Como  $f_1(d-v.t)=f_2(d+v.t) \forall t$ , resulta  $V(d,t)=2.f_1(d-v.t)$ .

Interpretación: la onda de tensión incidente se duplica en el extremo receptor.

### Valor de la velocidad de propagación y de la impedancia de onda en líneas aéreas

Si en nuestro modelo de línea unifilar ideal se asume:

- que a los efectos del cálculo de la inductancia del conductor no se considera el flujo magnético que circula por dentro del propio conductor (esta aproximación es razonable debido al efecto “skin”).
- que la tierra es un conductor perfecto
- que el aire se comporta desde el punto de vista dieléctrico y magnético aproximadamente como el vacío, con constante dieléctrica  $\epsilon=10^{-9}/(36.\pi)$  F y permeabilidad magnética  $\mu=4\pi.10^{-7}$  H/m, las inductancias y capacitancias por unidad de longitud valen:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{r} \quad (\text{H/m})$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)} \quad (\text{F/m})$$

siendo  $r$  el radio del conductor y  $h$  su altura.

Resulta:  $v = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{1}{\sqrt{(\mu.\epsilon)}} = 3 \times 10^8$  m/s, que es la velocidad de la luz.

### Comentarios:

-Para una línea aérea “real” las aproximaciones anteriores son razonables cuando se consideran los parámetros de secuencia positiva. Para los parámetros de secuencia cero la aproximación de suponer la línea sin pérdidas no es razonable (debido, principalmente, a la influencia de la resistividad del terreno en las fórmulas de cálculo de las impedancias longitudinales), y el efecto práctico es que la velocidad de propagación de las ondas es menor que la de la luz para la secuencia cero.

-En el caso de cables subterráneos el cálculo no es válido (pues los conductores de fase no están instalados en el aire), y las velocidades de propagación son normalmente entre 2 y 3 veces inferiores a las de la luz.

Con el mismo cálculo, se obtiene también la fórmula para la impedancia de onda:

$$Z_w = 60 \ln \left[ \frac{2h}{r} \right], \text{ con valores típicos entre 250 y 500 ohms.}$$

### Otro ejemplo: línea terminada con una resistencia

Si ahora la línea termina en una resistencia  $R$ , la condición de borde en  $x=d$  es:

$$V(d,t) = R \cdot I(d,t) \quad \forall t \Rightarrow f_1(d-v.t) + f_2(d+v.t) = \frac{R}{Z_w} [f_1(d-v.t) - f_2(d+v.t)] \Rightarrow$$

$$f_2(d+v.t) = \frac{\left(\frac{R}{Z_w} - 1\right)}{\left(\frac{R}{Z_w} + 1\right)} f_1(d-v.t) = \frac{(R - Z_w)}{(R + Z_w)} f_1(d-v.t)$$

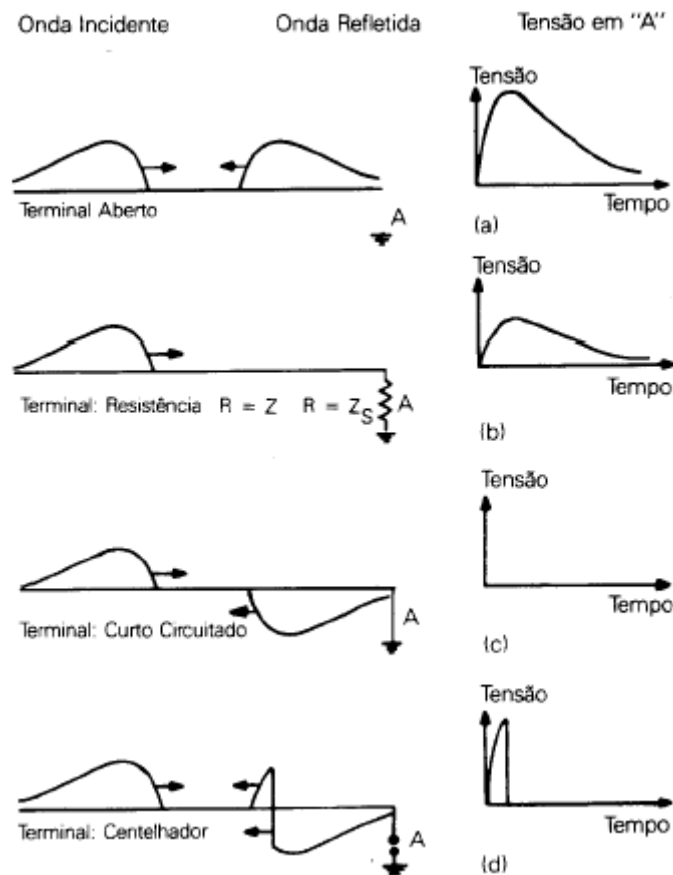
lo cuál nos dice que en el extremo receptor se genera (en  $t=d/v$ ) una onda reflejada de tensión  $f_2 = \alpha f_1$ , siendo  $\alpha = (R - Z_w)/(R + Z_w)$  el “coeficiente de reflexión” de la onda de tensión. Observar que, en particular, si  $Z_w = R$  no hay onda reflejada.

La tensión en el extremo receptor vale, por lo tanto:

$$V(d,t) = f_1(d-v.t) + f_2(d+v.t) = f_1(d-v.t)(1 + \alpha),$$

y se interpreta como si la onda incidente  $f_1$  se propagara a través de  $R$  afectada por el “coeficiente de refracción” de la onda de tensión  $\beta = 1 + \alpha = 2R/(R + Z_w)$

El método de interpretar las condiciones de borde a través de coeficientes de reflexión y refracción se extiende a otros casos habituales (terminación en cortocircuito, punto de unión con otra línea, etc.).



### Métodos de resolución de la ecuación de ondas viajeras

La resolución de los problemas de ondas viajeras “a mano” es sumamente engorrosa, y consiste en ir sumando en cada punto de la línea y en cada instante las ondas incidentes y reflejadas que se van generando y viajando por la línea a lo largo del tiempo.

(Clásicamente se han utilizado diagramas gráficos como el “diagrama de los reticulados” actualmente casi en desuso.)

### La línea con pérdidas

Cuando no se supone  $R=G=0$ , las ecuaciones de ondas viajeras a resolver son:

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = R \cdot I(x,t) + L \cdot \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = G \cdot V(x,t) + C \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

La resolución analítica de estas ecuaciones es sumamente engorrosa, y los programas de cálculo (EMTP o similar) utilizan habitualmente la aproximación de suponer la línea sin pérdidas y agregar al modelo resistencias concentradas.

Un caso particular en el cuál la solución analítica es sencilla es la llamada “línea sin distorsiones”:  $L \cdot G = R \cdot C$ . Esta situación nunca se da en la práctica, principalmente debido al muy bajo valor de G.

Para este caso particular se puede ver que la solución general es de la forma:

$$V(x,t) = e^{-\alpha \cdot x} \cdot f_1(x - v \cdot t) + e^{\alpha \cdot x} \cdot f_1(x + v \cdot t)$$

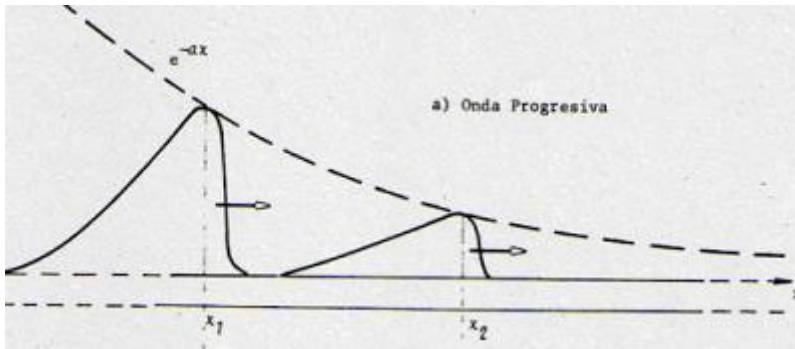
$$I(x,t) = \frac{I}{Z_w} [e^{-\alpha \cdot x} \cdot f_1(x - v \cdot t) - e^{\alpha \cdot x} \cdot f_1(x + v \cdot t)]$$

siendo  $\alpha = \sqrt{R \cdot G}$  la “constante de atenuación”.

Es evidente que la fórmula nos muestra que las ondas se van atenuando a lo largo del tiempo cuando uno se “mueve” en el sentido de avance de la onda.

La constante de atenuación se mide en Nepers/m, en que (siguiendo la nomenclatura general de las teorías de ondas) se dice que una onda se atenúa en un “Neper” cuando su valor de pico se reduce en un 36,8 % (en que  $e^{-1} = 0,368$ ).

Cabe destacar que cuando no se cumple la condición de línea sin distorsión las ondas no sólo se atenúan, sino se distorsionan (va cambiando el frente y la cola de la onda a lo largo del tiempo).



Comentario:

Como veremos más adelante, los programas de cálculo habituales formulan sus modelos de línea suponiendo condiciones de régimen a una frecuencia  $\omega$  constante.

En tales casos, la ecuación de onda de la tensión se reduce a:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \gamma^2 V(x,t) \text{ siendo } \gamma = \sqrt{[(R + j.\omega.L).(G + j.\omega.C)]}$$

la llamada ‘‘constante de propagación’’. En esta teoría simplificada, la resolución analítica de las ecuaciones de onda es mucho más sencilla, y la atenuación y distorsión de las ondas se calculan fácilmente.



## MÉTODOS DE RESOLUCIÓN EN EMTP

### Circuitos de parámetros concentrados

#### Ejemplo: Modelado de ramas con inductancias

Supongamos una inductancia  $L$  conectada entre los nodos  $k$  y  $m$ , y queremos calcular las variables eléctricas en esta rama en el instante  $t$ , supuestas conocidas en el paso anterior de cálculo  $t-\Delta t$ :

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{1}{L} \int_{t-\Delta t}^t [v_k(t) - v_m(t)] dt \Rightarrow \text{usando el método trapezoidal de}$$

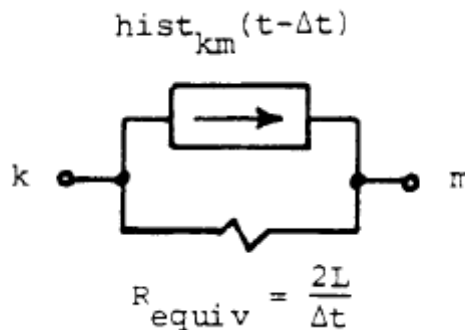
integración:

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [v_k(t) - v_m(t) + v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)] \Rightarrow$$

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} [v_k(t) - v_m(t)] + hist_{km}(t - \Delta t)$$

con  $hist_{km}(t - \Delta t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)]$ , que es el término que conserva la "historia" de las variables eléctricas en el paso anterior de cálculo.

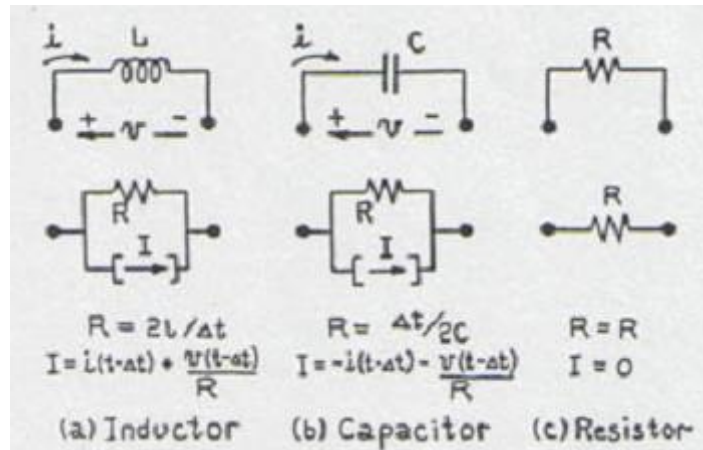
La relación obtenida se puede representar como si la rama estuviera formada por una resistencia equivalente  $R_{equiv} = 2L/\Delta t$  en paralelo con una fuente de corriente  $hist_{km}(t-\Delta t)$



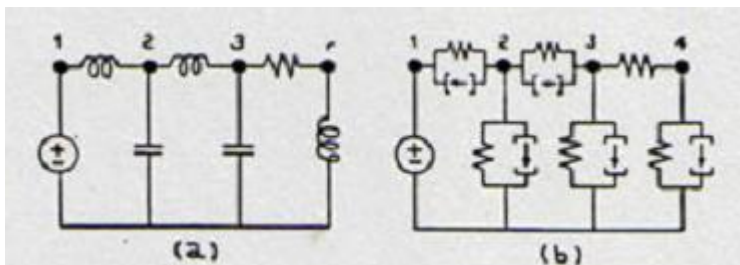
Con un método análogo se representan las capacitancias conectadas entre 2 nodos, en que ahora  $R_{equiv} = \Delta t/(2C)$ ,

$$hist_{km}(t - \Delta t) = -i_{km}(t - \Delta t) - \frac{2C}{\Delta t} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)]$$

El resultado de representar las ramas que contienen elementos concentrados por resistencias y fuentes de corriente equivalentes se resume en la figura.



Se muestra también un ejemplo de combinación de los diversos equivalentes en un circuito con varias ramas



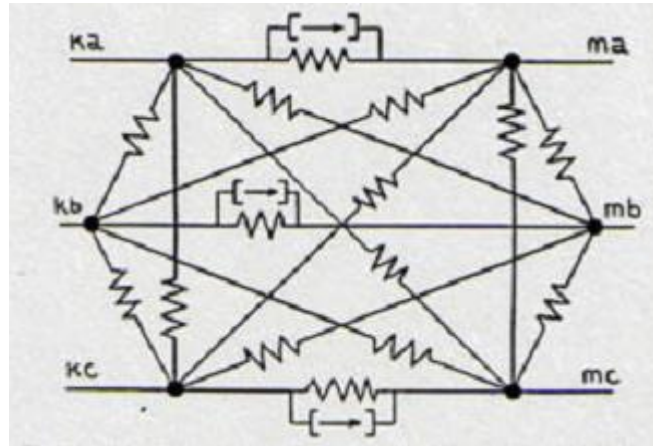
El método se extiende fácilmente al caso trifásico, en que aparecen elementos concentrados con acoplamiento entre ramas.

Por ejemplo: si se desea representar una rama trifásica con acoplamientos inductivos entre fases, basta con extender los desarrollos anteriores al caso matricial, resultando

$$[R_{eq}] = \frac{2 \cdot [L]}{\Delta t} \quad [hist_{km}(t - \Delta t)] = [i_{km}(t - \Delta t)] + \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)],$$

siendo  $[L]$  la matriz de inductancias original,  $[hist_{km}(t - \Delta t)]$  el vector de fuentes de corriente ‘históricas’, etc.

El resultado de este procedimiento es el armado de una malla de resistencias equivalentes entre los nodos en juego, con fuentes de corriente equivalentes en cada fase.



### Circuitos de parámetros distribuidos

Si consideramos la línea unifilar ideal ya estudiada :

$$V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \text{ ,siendo } Z_0 \text{ la impedancia característica}$$

Se deduce :

$$V(x,t) + Z_0 \cdot I(x,t) = 2 \cdot f_1(x - vt) = \text{constante si } x - vt = \text{constante.}$$

$$V(x,t) - Z_0 \cdot I(x,t) = 2 \cdot f_2(x + vt) = \text{constante si } x + vt = \text{constante}$$

Aplicamos estas relaciones (conocidas como ‘‘características de Bergeron’’) a  $x=0$ ,  $x=d$  (siendo  $d$  la longitud de la línea) y  $t=t$ ,  $t=t-\tau$  (siendo  $\tau$  el tiempo de tránsito de la línea= $d/v$ ):

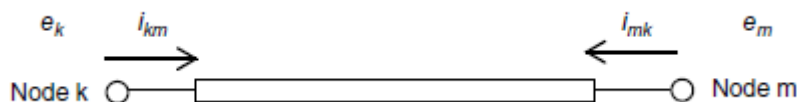
Se deduce :

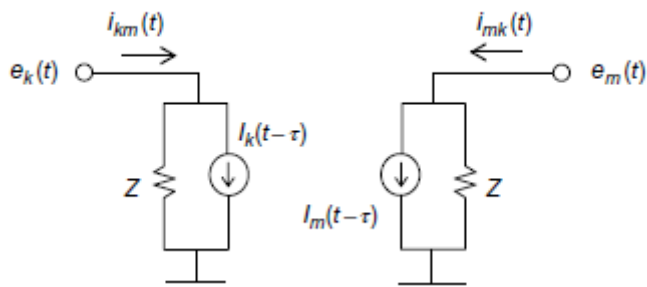
$$I(d,t) = -\frac{1}{Z_0} V(d,t) + \frac{1}{Z_0} V(0,t-\tau) + I(0,t-\tau)$$

$$I(0,t) = \frac{1}{Z_0} V(0,t) - \frac{1}{Z_0} V(d,t-\tau) + I(d,t-\tau)$$

Si se conocen los valores de  $V$  e  $I$  en el instante  $t-\tau$ , por lo tanto, las relaciones anteriores nos permiten vincular la tensión y corriente en cada extremo en el instante  $t$ .

Cada una de las relaciones anteriores se modela como un circuito equivalente similar al visto para los circuitos de parámetros concentrados (resistencia equivalente y fuente de corriente con los términos históricos) entre cada uno de los nodos y tierra, y se observa que ambos extremos de la línea quedan totalmente ‘‘desacoplados’’ (lo cuál no es más que una consecuencia de la propiedad de ‘‘longitud eléctrica’’ de la línea de parámetros distribuidos ).





Si el intervalo elemental de cálculo es  $\Delta t$  se requiere , por lo tanto, que  $\Delta t < \tau$ .

Comentario:

En el caso en que se deban simular líneas muy cortas (tiempo de tránsito muy pequeño) este requisito puede imponer un  $\Delta t$  muy pequeño, por lo cuál a veces se opta por modelar las líneas cortas por medio de circuitos “pi” de parámetros concentrados.

La fuente de corriente con los términos históricos deberá guardar los datos en los instantes  $t-\Delta t, t-2\Delta t, t-3\Delta t, \dots, t-\tau$  (si  $\tau$  no es múltiplo de  $\Delta t$ , este último dato se obtiene por interpolación).

Comentario:

Los métodos indicados de cálculo para líneas unifilares se extienden para líneas trifásicas en forma análoga a lo indicado en relación a los circuitos trifásicos (sustituyendo los escalares por matrices).

Cálculo de la red completa

Una vez elaborados los circuitos equivalentes resistencia-fuente de corriente de todos los elementos de la red, es posible formular las ecuaciones completas de la red en el instante  $t$  mediante una ecuación matricial en base nodal de la forma  $[I] = [Y] \cdot [V]$ , en que  $[Y]$  es una matriz de elementos reales (se obtiene invirtiendo una matriz de resistencias).

La ecuación se resuelve por métodos clásicos de resolución de sistemas algebraicos con matrices esparsas (factorización triangular ordenada, p.ej).

Comentario:

Los métodos explicados se aplican a la resolución de circuitos lineales. La presencia de elementos no lineales (núcleos de transformadores, descargadores, etc.) impone ciertas modificaciones en los métodos descritos (Ver EMTP Theory Book).