Señales y Sistemas

Práctico 1
Introducción a las Señales y Sistemas

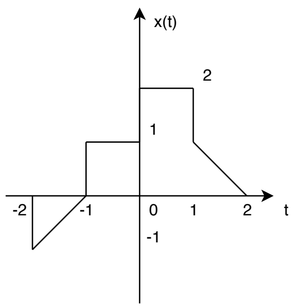
2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Manipulación de la variable independiente

✦ Ejercicio 1 (1.21)

Dada $x(t)$, una señal de tiempo continuo tal como se muestra en la figura. Dibujar cada una de las siguientes señales.



(a) $x(t-1)$

(b) $x(2-t)$

(c) $x(2t+1)$

(d) $x(4-\frac{t}{2})$

(e) $[x(t)+x(-t)]u(t)$

(f) $x(t)[\delta(t+\frac{3}{2})-\delta(t-\frac{3}{2})]$

★ Ejercicio 2 (1.12)

Dada la señal de tiempo discreto

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

Determinar los valores de los enteros M y n_0 de manera que $x[n]$ se exprese como

$$x[n] = u[Mn - n_0].$$

Señales de Energía y Potencia

✦ Ejercicio 3 (1.3)

Determinar los valores de potencia P_∞ y energía E_∞ para cada una de las siguientes señales.

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$

(b) $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$

(c) $x(t) = \cos(t)$

(d) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(e) $x[n] = e^{j(\pi n/2+\pi/8)}$

(f) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$

★ Ejercicio 4 (1.13)

Dada la señal de tiempo continuo

$$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2).$$

Calcular el valor de energía E_∞ para la señal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

Propiedades de los Sistemas

✦ Ejercicio 5 (1.27)

Para cada uno de los siguientes sistemas, donde $y(t)$ es la salida a la entrada $x(t)$, determinar si el sistema es: i) estable, ii) causal, iii) lineal, iv) invariante en el tiempo, y v) sin memoria.

(a) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

(b) $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$

(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

(d) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

(e) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

(f) $y(t) = x(t/3)$

(g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

✦ Ejercicio 6

Para cada uno de los siguientes sistemas, donde $y[n]$ es la salida a la entrada $x[n]$, determinar si el sistema es: i) estable, ii) causal, iii) lineal, iv) invariante en el tiempo, y v) sin memoria.

(a) $y[n] = g[n] \cdot x[n]$, con $g[n]$ dada.

(b) $y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

(c) $y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

(d) $y[n] = x[n - n_0]$

(e) $y[n] = e^{x[n]}$

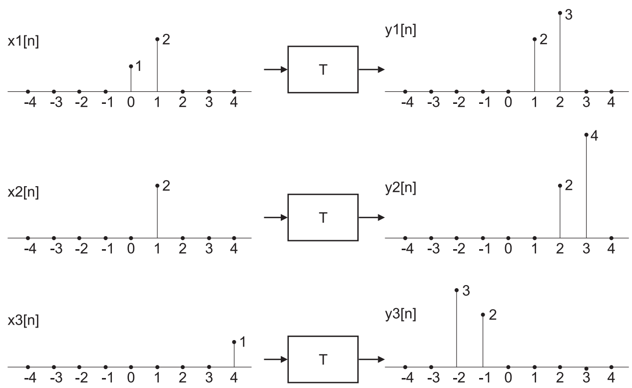
(f) $y[n] = a \cdot x[n] + b$

(g) $y[n] = x[-n]$

(h) $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$

✦ Ejercicio 7

Se sabe que el sistema T de la figura es invariante en el tiempo. Cuando las entradas al sistema son $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ las respuestas del mismo son $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y_3[n]$ respectivamente, como muestra la figura.



(a) Determinar si el sistema T podría ser lineal.

(b) Si la entrada al sistema T es $x[n] = \delta[n]$, ¿cuál es la respuesta del sistema $y[n]$?

(c) Determinar todas las posibles entradas $x[n]$ para las cuales la respuesta $y[n]$ del sistema T puede ser determinada solamente con la información dada.

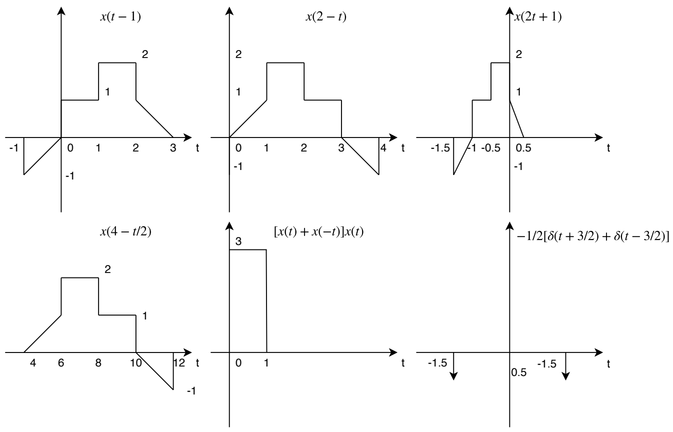
✸ Ejercicio 8

A partir de la definición de causalidad demostrar que para un sistema lineal e invariante en el tiempo la causalidad implica que la respuesta al impulso $h[n]$ es cero para $n < 0$.

Solución

Ejercicio 1

(f)



Ejercicio 2

La señal $x[n]$ se obtiene dando vuelta u[n] con respecto a $n = 0$, y luego corriendo la señal resultante 3 valores a la derecha. Entonces $x[n] = u[-n+3]$. Esto implica que $M = -1$ y $n_0 = -3$.

Ejercicio 3

(a) $E_\infty = \int_0^\infty e^{-4t} dt \leq \infty$, Entonces $P_\infty = 0$

(b) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$, $|x_2(t)|^2 = 1$. Entonces, $E_\infty = \infty$,

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x_2(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt = \lim_{T\to\infty} 1 = 1.$$

(c) $x_3(t) = \cos(t)$. Entonces $E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t)^2 dt = \infty$,

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos(t)^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2}$$

.

(d) $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, $|x_1[n]|^2 = (\frac{1}{4})^n u[n]$.

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{4}{3} \leq \infty.$$

Entonces $P_\infty = 0$.

(e) $x_2[n] = e^{j(\pi n/2 + \pi/8)}$, $|x_2[n]|^2 = 1$, $E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2[n]|^2 = \infty$,

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x_2[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 = 1.$$

(f) $x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$. Entonces, $E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{4}n)^2 = \infty$,

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \cos(\frac{\pi}{4}n)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}n)}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 4

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (\delta(\tau+2) - \delta(\tau-2))d\tau = \begin{cases} 0 & si \quad t < -2 \\ 1 & si \quad -2 \leq t \geq 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases}$$

Entonces,

$$E_\infty = \int_{-2}^{2} dt = 4$$

Ejercicio 5

	estable	causal	lineal	it	sin memoria
(a)	sí	no	sí	no	no
(b)	sí	sí	sí	no	sí
(c)	no	no	sí	no	no
(d)	sí	sí	sí	no	no
(e)	sí	sí	sí	sí	no
(f)	sí	no	si	no	no
(g)	no	sí	sí	sí	no

Ejercicio 6

	estable	causal	lineal	it	sin memoria
(a)	sii $g[n] < C\,\forall n$	sí	sí	sii $g[n] = cte$	sí
(b)	no	no	sí	no	no
(c)	sí	sii $n_0 = 0$	sí	sí	sii $n_0 = 0$
(d)	sí	sii $n_0 \geq 0$	sí	sí	sii $n_0 = 0$
(e)	sí	sí	no	sí	sí
(f)	sí	sí	sii $b = 0$	sí	sí
(g)	sí	no	sí	no	no
(h)	sí	sí	no	no	sí

La solución de la no invariancia temporal en (g) presenta ciertas dificultades por lo que lo resolveremos detalladamente.

Representaremos con $T\{x\}$ la secuencia luego de aplicar la transformación y con $R_N\{x\}$ la secuencia luego de aplicar un retardo de N muestras.

Un sistema es invariante en el tiempo si

$$R_N\{T\{x\}\} = T\{R_N\{x\}\}.$$

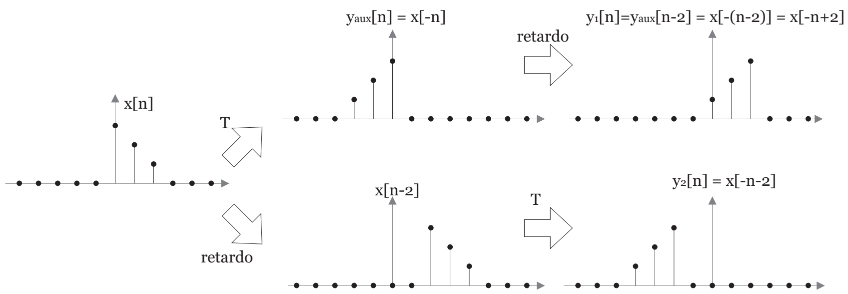
Aplicar un retardo de N muestras es equivalente a sustituir en la secuencia las apariciones de n, la variable temporal, por $n - N$. Aplicar el sistema (g) es equivalente a sustituir las n por $-n$. Por lo tanto,

$$R_N\{T\{x\}\} = R_N\{x[-n]\} = x[-(n - N)] = x[-n + N],$$

$$T\{R_N\{x\}\} = T\{x[n - N]\} = x[-n - N].$$

Como estas dos expresiones son distintas podemos deducir que el sistema no es invariante en el tiempo.

Lo que sigue es otra demostración basada en un contraejemplo.



Ejercicio 7

(a) Observando que $x_1[n] = x_2[n] + x_3[n + 4]$, si el sistema fuese lineal entonces debería ocurrir que $T\{x_1\} = T\{x_2\} + T\{R_{-4}\{x_3\}\}$.
Dado que T es invariante en el tiempo, entonces $T\{R_{-4}\{x_3\}\} = R_{-4}\{T\{x_3\}\}$, y en consecuencia, $y_1[n] = y_2[n] + y_3[n + 4]$.
Pero $y_1[1] = 2$, $y_2[1] = 0$ y $y_3[5] = 0$; luego, $y_1[1] \neq y_2[1] + y_3[1 + 4]$, y concluimos que el sistema T **no es lineal**.

(b) $\delta[n] = x_3[n+4] \Rightarrow T\{\delta\} = T\{R_{-4}\{x_3\}\} = R_{-4}\{T\{x_3\}\} \Rightarrow y[n] = y_3[n+4]$.

(c) Las entradas $x[n]$ para las cuales se puede determinar la respuesta sólo con la información dada son todas aquellas que resultan de retardar a x_1, x_2 o x_3.

Ejercicio 8

Suponer que existe $m < 0$ tal que la respuesta al impulso del sistema es distinta de cero:

$$T\{\delta\}[m] \neq 0$$

Dado que T es lineal, entonces la salida a la entrada nula es la secuencia nula. Entonces existen dos entradas que son idénticas $\delta[n] = 0\ \forall n \leq m$ pero sin embargo la salida en el instante m es distinta, por lo tanto el sistema no es causal.