GEOESTADISTICA

Parte 2: prediccion espacial

2019

Objectivos

$\{Z(s), s \in D \subset \mathbb{R}^d\}$ campo aleatorio
observamos $z(s_1), z(s_2), \ldots, z(s_n)$ en los lugares $s_1, s_2, \ldots, s_n$

Estimar (predecir) $g(Z(s))$, $s \in D$.

Por ejemplo :

$Z(s_0)$, s_0 no observado,

$$\frac{1}{|B|}\int_B Z(s)ds \quad B \text{ region de } D,$$

$P(Z(s) > \zeta)$,

...

Predictor optimo

Predecir $Z(s_0)$ dados $Z(s_1) = z(s_1), \ldots, Z(s_n) = z(s_n)$

Predictor optimo :

$$p^{opt} = \mathsf{E}\big(Z(s_0)/Z(s_1) = z(s_1), \ldots, Z(s_n) = z(s_n)\big)$$

minimiza el riesgo quadratico

$$\mathsf{E}\big((Z(s_0) - \widehat{Z}(s_0))^2\big)$$

Predictor lineal optimo (BLUP) :

$$p^* = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$$

Si Z gaussiano, $p^{opt} = p^*$

Solucion

$$\begin{aligned}
\lambda &= C^{-1}c \qquad C_{i,j} = \mathsf{cov}\big(Z(s_i), Z(s_j)\big) \quad c_i = \mathsf{cov}\big(Z(s_0), Z(s_i)\big) \\
\alpha &= \mathsf{E}(Z(s_0)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathsf{E}(Z(s_i))
\end{aligned}$$

Kriging simple

C y $m(s)$ conocidas

$$\widehat{Z(s_0)} = {}^t c C^{-1}(Z - m) + m(s_0)$$

Varianza de kriging

$$\sigma^2_{SK} = \sigma^2(s_0) - {}^t c C^{-1} c$$

Si $s_0 = s_i$, entonces

$$\widehat{Z(s_i)} = Z(s_i)$$

Necesita estimar C y $m(s)$.

Kriging Ordinario

Hypotesis : $Z(s) = \mu + \delta(s)$, con incrementos estacionarios.

$\widehat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$ con

$$E(\widehat{Z}(s_0)) = E(Z(s_0)) \text{ y } E(\widehat{Z}(s_0) - Z(s_0))^2 \text{ minimo}$$

variograma : $\gamma(h) = \frac{1}{2}\mathsf{Var}(Z(s+h) - Z(s))$

$(\lambda_i)_{i=1,n}$ soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma(s_1 - s_2) & \dots & \gamma(s_1 - s_n) & 1 \\ \gamma(s_1 - s_2) & 0 & \dots & \gamma(s_2 - s_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(s_1 - s_n) & \gamma(s_1 - s_n) & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s_0 - s_1) \\ \gamma(s_0 - s_2) \\ \dots \\ \gamma(s_0 - s_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kriging Ordinario

Varianza de kriging

$$\sigma_K^2(s_0) = E((\widehat{Z}(s_0) - Z(s_0))^2) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(s_i - s_0)$$

Comentarios

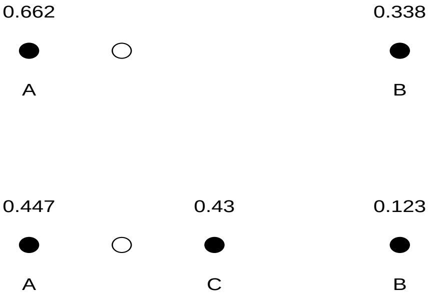
i) No es necesario que $0 \leq \lambda_i \leq 1$

ii) si $s_0 = s_i \in \{s_1, \ldots s_n\}$ entonces $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 0$, $j \neq i$, y $\sigma_K^2(s_i) = 0$

iii) los pesos de kriging λ_i dependen de la disposicion de los lugares de los datos, de la localizacion del sitio de prediccion, del numero de datos y de la funcion variograma.

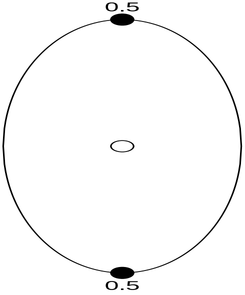
Pesos de kriging

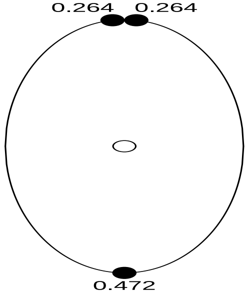
Efecto pantalla



Pesos de kriging

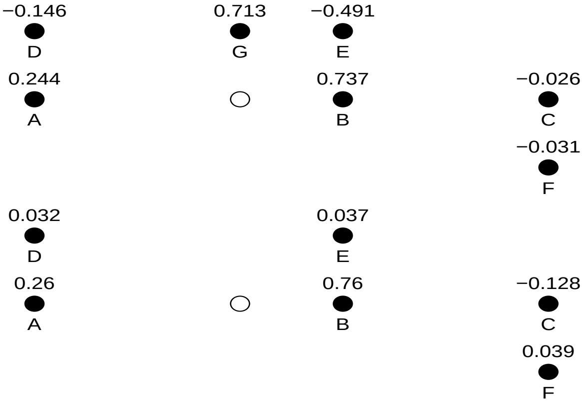
Declustering natural





Pesos de kriging

Effet écran et pondérateurs négatifs



Influencia de los parametros del variograma

La pepita

- si el variograma es solo una pepita $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$, la prediccion es constante (menos a los sitios de los datos) asi como la varianza de kriging.
- la presencia de una pepita en la funcion variograma alisa la prediccion.

La escala (el rango)

- si es alta, las observaciones influyen mas
- no se nota en los pesos (efecto pantalla)

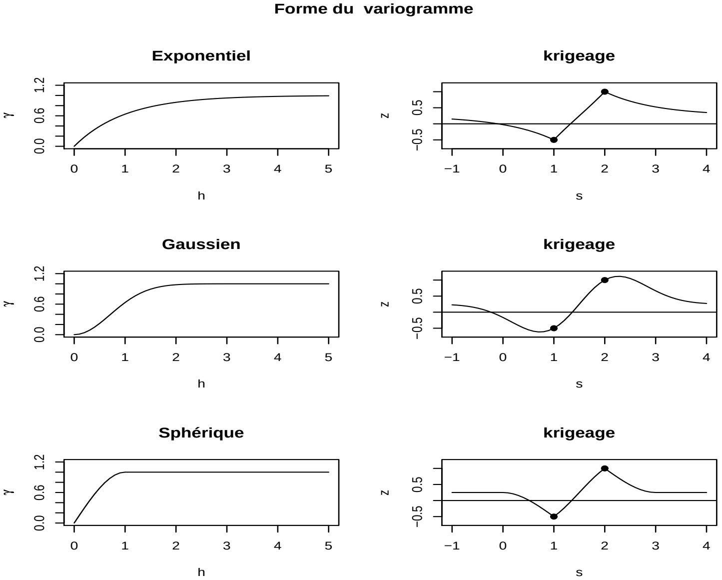
El silo

- influye la varianza de kriging

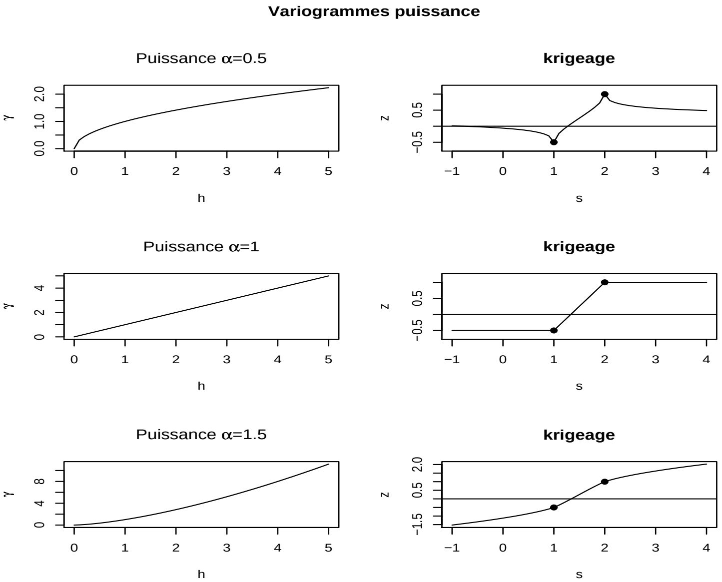
Regularidad

- si la pepita $\tau = 0$ la regularidad del variograma en 0 da la regularidad del proceso

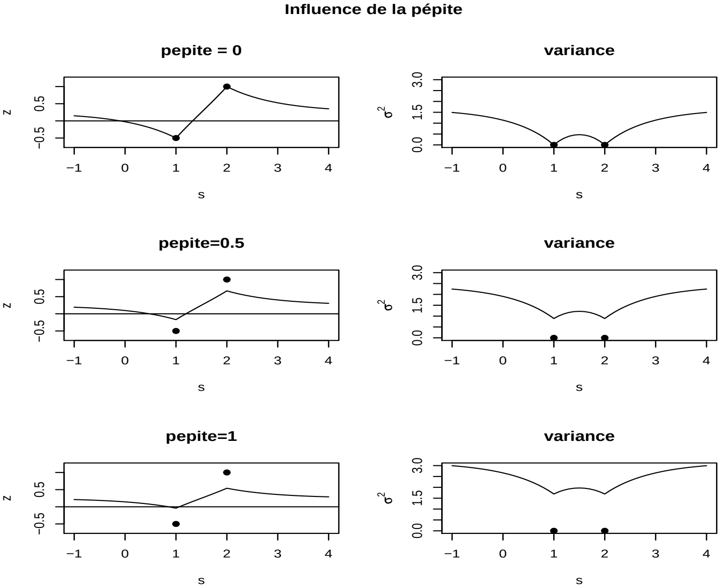
Influencia de los parametros del variograma



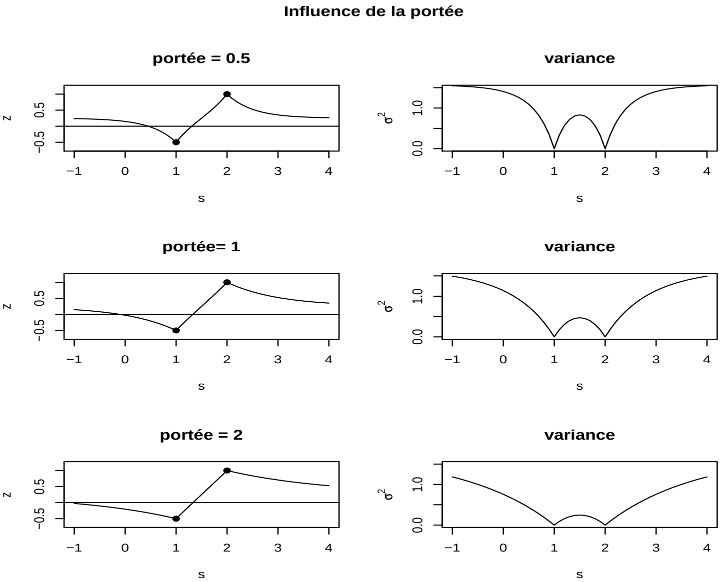
Influencia de los parametros del variograma



Influencia de los parametros del variograma



Influencia de los parametros del variograma



Kriging de una media regional

V parte de D

$$Z_v = \frac{1}{|V|} \int_V Z(s)ds$$

$$\widehat{Z_V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(V, s_i) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2_{OK}(V) = \sum_i \lambda_i \gamma(V, s_i) + \alpha - \gamma(V, V)$$

$$\gamma(V, s_i) = \frac{1}{|V|} \int_V \gamma(s_i - s)ds$$

Kriging log-normal

Si los datos no siguen una distribucion normal, la prediccion dada por el kriging no es la del predictor optimo.

$Z \sim$ log-normal si $Y = \log(Z) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y
$\mathsf{E}(Z) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.

Si $Y(s) = \log(Z(s))$ gaussiano con incrementos estacionarios
$\widehat{Y}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y(s_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log(Z(s_i))$

El kriging log-normal de Z es

$$\widehat{Z}(s_0) = \exp\left(\widehat{Y}(s_0) + \sigma^2_{Y,K}(s_0)/2 - \alpha_Y\right)$$

Kriging Universal

Si la media no es constante

$Z(s) = \mu(s) + \delta(s)$ $\qquad \delta$ con incrementos estacionarios $\mathsf{E}(\delta) = 0$

Modelization de la tendencia $\mathsf{E}(Z(s)) = \mu(s)$, $\mu(s) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k f_k(s)$

$f_0(s) = 1, f_1(s) = x, f_2(s) = y, f_3(s) = xy, \ldots, s = (x, y)$,
(β_j) desconocidos

Predictor lineal $\widehat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$

Restriccion insesgado (universalidad):

$$\sum_i \lambda_i f_k(s_i) = f_k(s_0) \text{ , } k = 0, \ldots, p$$

Kriging Universal

γ variograma de δ

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \gamma(s_1 - s_n) & f_0(s_1) & \dots & f_p(s_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(s_1 - s_n) & \dots & 0 & f_0(s_n) & \dots & f_p(s_n) \\ f_0(s_1) & \dots & f_0(s_n) & & & \\ \dots & \dots & \dots & & 0 & \\ f_p(s_1) & \dots & f_p(s_n) & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s_0 - s_1) \\ \vdots \\ \gamma(s_0 - s_n) \\ f_0(s_0) \\ \vdots \\ f_p(s_0) \end{pmatrix}$$

varianza de kriging :

$$\sigma^2_{KU}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(s_0 - s_i) + \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j-1} f_{j-1}(s_0)$$

Kriging Universal

Estimacion del variograma de δ

$$\frac{1}{2}(\delta(s_i) - \delta(s_j))^2 = \frac{1}{2}\big(Z(s_i) - Z(s_j) - \sum_{k=0}^{p} \beta_k (f_k(s_i) - f_k(s_j))\big)^2$$

Necesita estimar los β_i. Para estimar los β_i

$$\widehat{\beta} = (X^t \Sigma^{-1} X)^{-1} X^t \Sigma^{-1} Z \qquad \Sigma = \mathrm{cov}(\delta)$$

Procedimiento iterativo :

- estimar β con minimos cuadrados ordinarios,
- ajustar el variograma con los residuos,
- estimar β con minimos cuadrados generalizados,
- ...

Maxima verosimilitud : se supone que los $Z(s)$ son gaussianos y se estima conjuntamente los parametros de la regresion y de la covarianza.

Kriging con una tendencia

Deriva externa

$$Z(s) = \beta_0 + \beta_1 \varphi(s) + \delta(s)$$

$\varphi(s)$ conocida $\forall s \in D$

$$\widehat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$$

Kriging de los residuos

$$Z(s) = \beta X(s) + \delta(s)$$

$$\widehat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Z \qquad , \qquad \widehat{\delta}(s_i) = Z(s_i) - \widehat{\beta} X(s_i)$$

$$\widehat{Z}(s_0) = \widehat{\beta} X(s_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widehat{\delta}(s_i)$$

Cokriging

2 procesos espaciales $Z_1(.), Z_2(.)$
$(s_{ik}, k = 1, n_i)$ lugares de datos observados del proceso Z_i.

caso isotopico $s_{1k} = s_{2k} = s_k$

caso heterotopico los lugares no coinciden en absoluto (total), parcialmente (parcial)

Hypotesis de estacionaridad:

- $\mathsf{E}\big(Z_i(s)\big) = \mu_i$, $\mathsf{cov}(Z_i(s+h), Z_j(s)) = c_{ij}(h)$
- si Z isotropico $c_{ij}(h) = c_{ij}(\|h\|)$

Propiedades

- $c_{ij}(h) = c_{ji}(-h)$
- $|c_{ij}(h)| \leq \sqrt{c_{ii}(0)c_{jj}(0)}$

Cokrigeage

Estacionnaridad junta de los incrementos

- $\mathsf{E}(Z_j(s+h) - Z_j(s)) = 0$,
- $\mathsf{cov}(Z_i(s+h) - Z_i(s), Z_j(s+h) - Z_j(s)) = 2\gamma_{ij}(h)$

Variograma cruzado
$\gamma_{ij}(h) = c_{ij}(0) - \frac{1}{2}(c_{ij}(h) + c_{ij}(-h))$ si es estacionario

Pseudo-variograma cruzado

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_{ij}(h) &= \frac{1}{2}\mathsf{Var}(Z_i(s+h) - Z_j(s)) \\ &= \frac{1}{2}(c_{ii}(0) + c_{jj}(0)) - c_{ij}(-h) \text{ si es estacionario}\end{aligned}$$

Cokriging

Predictor lineal

$$\widehat{Z}_1(s) = \sum_{k=1}^{n_1} \lambda_{1k}(Z_1(s_{1k})) + \sum_{k=1}^{n_2} \lambda_{2k}(Z_2(s_{2k}))$$

Minimizar $\mathsf{E}(\widehat{Z}_1(s) - Z_1(s))^2$ sujeto a restriccion
$\mathsf{E}(\widehat{Z}_1(s) - Z_1(s)) = 0$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{n_j} \lambda_{jl}\gamma_{ij}(s_{ik} - s_{jl}) + \alpha_i \quad = \quad \gamma_{1i}(s_{ik} - s) \quad i = 1, 2 \quad k = 1 \ldots n_i$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} \lambda_{1k} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n_2} \lambda_{2k} = 0$$

Varianza de cokriging

$$\sigma^2_{CO} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{ik}\gamma_{1i}(s_{ik} - s) + \alpha_1$$

Cokriging

Estimacion de los variogramas

$\gamma_{ij}(h)$ condicionalmente definidas negativas.

Modelos de coregionalizacion :

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{\ell=0}^{L} b_{ij}^{l} \gamma_{\ell}(h) \qquad \Gamma(h) = \sum_{l=0}^{L} B_{\ell} \gamma_{\ell}(h)$$

cada B_l ha de ser definida positiva, i.e.

$$b_{11}^{\ell} \geq 0 \quad ; \quad b_{22}^{\ell} \geq 0 \quad ; \quad |b_{12}^{\ell}| \leq \sqrt{b_{11}^{\ell} b_{22}^{l}}$$

Kriging multivariado

$Z^1, Z^2, \ldots, Z^p$ campos aleatorios correlacionados, predecir simultaneamente.
Funcion de correlacion cruzada

$$C_{ij}(s, s') = \mathsf{cov}(Z^i(s), Z^j(s')) = C_{ij}(s - s')$$

Separable

$$C_{ij}(h) = a_{ij} C(h)$$

$A = [a_{ij}]_{i,j=1\ldots p}$ matriz definida positiva
No separable (Gneiting)

$$C_{ij}(h) = \sigma_i \sigma_j r_{ij} C(h, \rho_{ij}, \nu_{ij})$$

$C(h, \rho, \nu)$ funcion de correlacion de Matern, escala ρ, orden ν
$\rho_{ij} = (\rho_i^2 + \rho_j^2)/2$, $\nu_{ij} = (\nu_i^2 + \nu_j^2)/2$
restricciones en r_{ij}

Kriging espacio-temporal

Proceso espacio-temporal : $Z(s,t), s \in D, t \in [0;T]$
Si Z es estacionario

$$\text{cov}(Z(s,t), Z(s',t')) = C(s-s', t-t')$$

Funciones de covarianza separables

$$C(h,u) = C_s(h)C_t(u)$$

admisible si C_s y C_t son funciones de covarianza admisibles.
Funciones de covarianza no separables y admisibles

$$C(h,u) = \frac{\sigma^2}{\psi(|u|^2)^{d/2}}\varphi\Big(\frac{\|h\|^2}{\psi(|u|^2}\Big)$$

$\varphi(t), t \geq 0$ completamente monotona, $\psi(t), t \geq 0$ positiva y con derivadas completamente monotonas.

Simulaciones condicionales

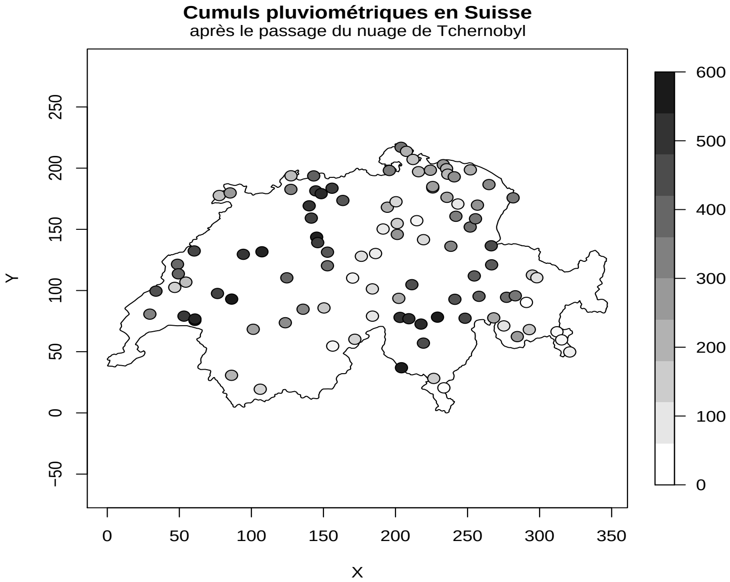
Principio Simular campos aleatorios segun una distribucion de tal manera que los valores simulados en los lugares de datos sean iguales a los observados.

Interes Permite estimar funciones no lineales de Z.

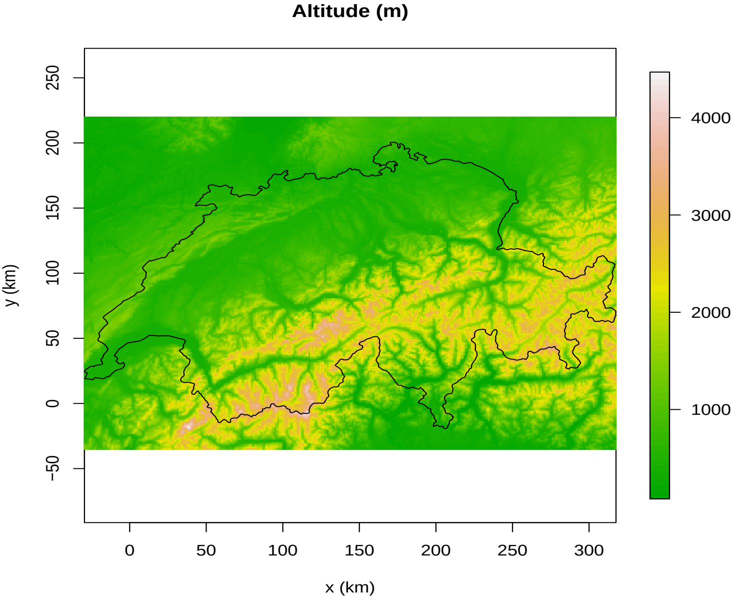
Kriging condicional

- Estimar la funcion de covarianza del campo $C(h)$
- $\widehat{Z} = \sum_i \lambda_i Z_i$ kriging con los datos observados
- simular un campo Y en el dominio D con funcion de covarianza $C(h)$
- $\widehat{Y} = \sum_i \lambda_i Y_i$ kriging con los valores simulados en los lugares de datos.
- $\widehat{Z} + Y - \widehat{Y}$ es una simulacion condicionnal.

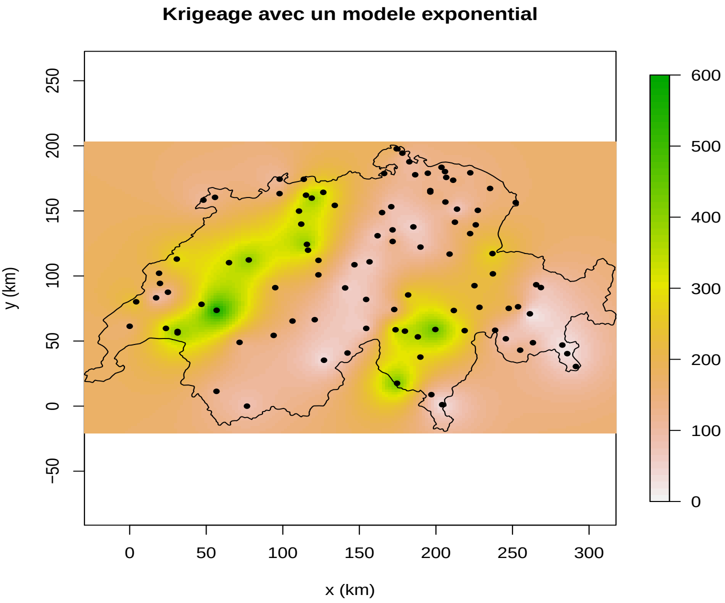
Lluvias suizas



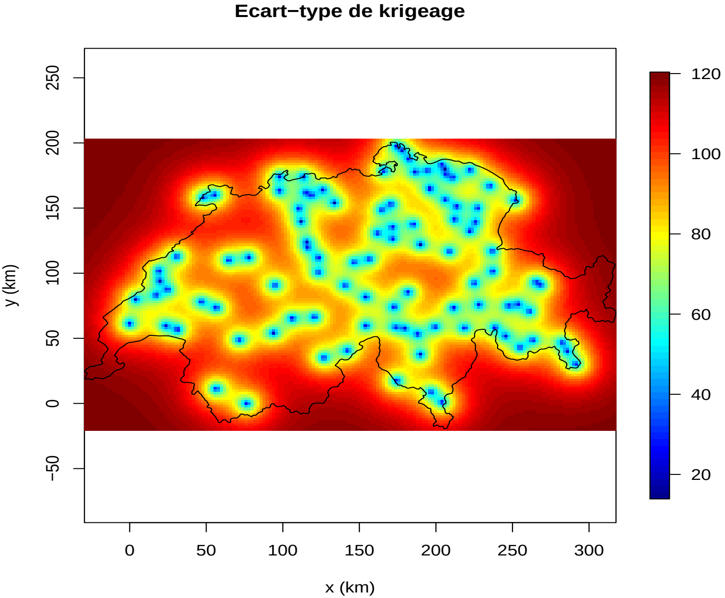
Lluvias suizas



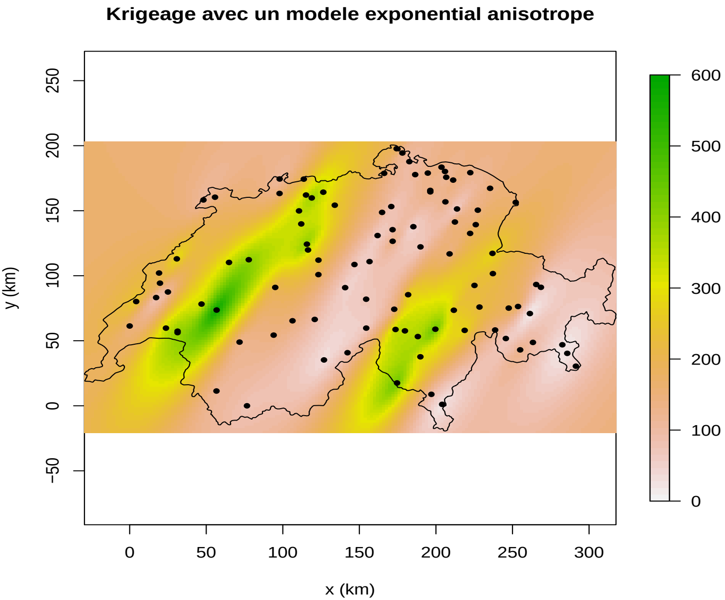
Lluvias suizas



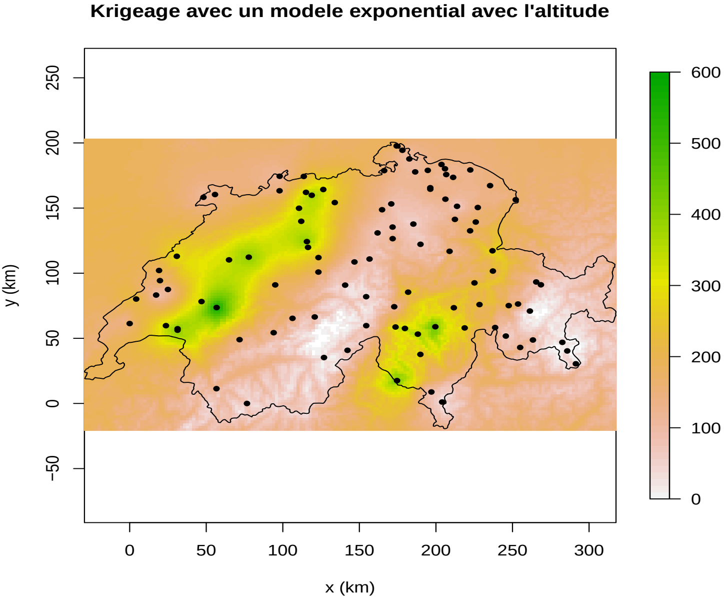
Lluvias suizas



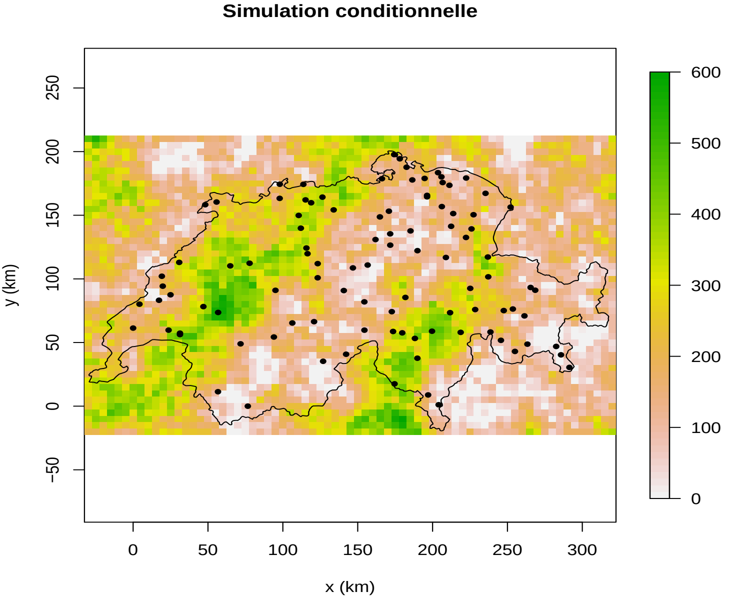
Lluvias suizas



Lluvias suizas



Lluvias suizas



Lluvias suizas