Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2018**

SOLUCIÓN EXAMEN - 16 de febrero 2019.

---

1. - $a \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A si se verifica que para todo $x \in A$ $x \geq a$
   - $a \in \mathbb{R}$ es ínimo si es la mayor de las cotas superiores.
2. Como el conjunto A es por hipótesis no vacío esto implica

$$\text{Existe} \quad a \in A \Rightarrow -a \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$$

Sea α una cota inferior de A, por lo tanto,

$$\text{para todo} \quad a \in A \quad ageq\alpha. \tag{1}$$

Considere un elemento cualquiera b del conjunto B por definición del conjunto B se cumple que existe $a \in A$ tal que $b = -a$

Como se cumplia que
$a \geq \alpha \Rightarrow b = -a \leq -\alpha.$
Concluimos que $-\alpha$ es cota superior de B.

3. El conjunto B es no vacío y actado superiormente luego por causa del axioma de completitud el conjunto B es acotado superiormente y llamaremos a su supremo $\sup B$.

El $supB$ es por definición una cota superior de B, con un razonamiento analogo a anterior demostramos que $-supB$ es una cota inferior de A.

Supongamos por absurdo que existe c una cota inferior de A tal que

$$c > -\sup B.$$

Como c es cota inferior de B esto implica que $-c$ es cota superior de B y de la desigualdad anterior deducimos:

$$-c < \sup B.$$

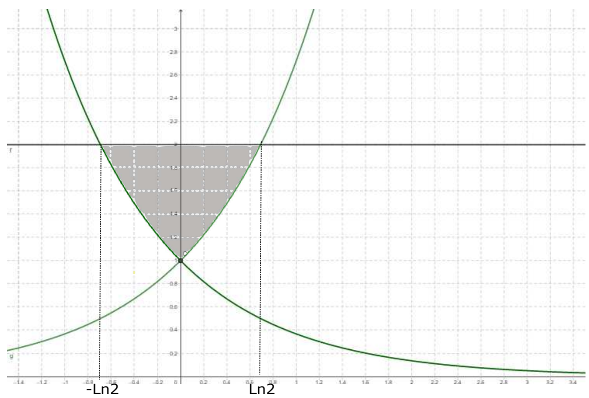
Hemos encontrado una cota superior de B que es menor que $\sup B$ lo cual es absurdo. Deducimos que $-\sup B$ es la mayor cota 9nferior y or lo tanto se cumple

$$\text{ínf } A = -\sup B.$$

Dado un conjunto A no vacío y acotado superiormente por todo lo anteriror podemos concluir que el conjunto tiene ínfimo.

1. Observamos que la $y = e^x$ corta a $y = 2$ en el punto $(\ln 2, 2)$ y $y = e^x$ corta a $y = 2$ en el punto $(-\ln 2, 2)$.

   En la figura vemos en pintada en gris la región que tenemos que calcular el área. Vamos a calcular el área blanca y restarsela al área del rectángulo.



$$\text{área(gris)} = \text{área(rectángulo)} - \text{área(blanca)}$$

El rectángulo tiene base de longitud $2\ln 2$ y altura 2 por lo que:

$$\text{área(rectángulo)} = 4\ln 2$$

Para el área de la región blanca se tiene:

$$\text{área(blanca)} = \int_0^{\ln 2} e^x dx + \int_{-\ln 2}^{0} e^{-x} dx = 2$$

Luego

$$\text{área(gris)} = 4\ln 2 - 2$$

(i) Aplicando la Fórmula de Partes:

$$\int_1^e x \ln x = \frac{x^2 \ln x}{2}|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

(ii) Aplicando el Método de Sustitución:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 2.$$

1. Decimos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si:

   Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

   Decimos que f es continua en c si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

2. Considero $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = -f(-x)$$

   Sabemos que g es continua en $\mathbb{R}$ porque resta y composición de continuas es continua. Esto implica la existencia de $\lim_{x\to 0} g(x)$. Por propiedad de composición y límite:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} -(f(-x)) = -\lim_{x\to 0} f(x).$$

   Por otro lado $g(x) = f(x)$ or hipótesis y esto implica

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

   De ambas cosas deducimos:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} f(x)$$

   Y sabemos que el único número igual a su opuesto es cero, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

3. (i) Falso un ejemplo de esto es la función $\sin x$ definida en todo $\mathbb{R}$ es acotada pero sus límites en el infinito no existen.

   (ii) Esto es falso considere la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

   Esta función no está siquiera acotada y verifica que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

1. Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b).

   Se cumple que existe $c \in (a, b)$ tal que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. Considere

$$f : [0, 1] \to [0, 1] \quad \text{definida por} \quad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

   Observar que f es continua en $(0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Tambien se cumple que para todo $x \in (0, 1)$

$$f'(x) = 0$$

   Observar que para todo $x \in (0, 1)$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{1}{2} \neq f'(x).$$

3. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x.$$

   Observar que las soluciones de la ecuación son raíces de f. f es continua por ser suma y multiplicación de funciones continuas

   Se tiene que $f(0) = -1$ y que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - 1) > 0$. Esto implica que f tiene una raíz $alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Por otro lado $f(0) = -1$ y que $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - 1) > 0$. Esto implica que f tiene una raíz $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

   Por lo anterior sabemos que f tiene por lo menos dos ra'ices diferentes.

   Considero la derivada de f:

$$f(x) = x(2 - \cos x).$$

   Se cumple que

   $signo(f') = signo(x)$

   Como $f'(x) > 0$ si $x > 0$ entonces f es estricatmente creciente en los positivos, por lo tanto inyectiva. Esto implica que α es la única raíz positiva.

   Como $f'(x) < 0$ si $x < 0$ entonces f es estricatmente decreciente en los negativos, por lo tanto inyectiva. Esto implica que β es la única raíz negativa.

   Como 0 no es raíz porque $f(0) = -1$ hemos demostrado que α y β son la únicas raíces de la función f.

1. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x$

   Definimos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$G(x) = \int_0 2x \ln(t^4 + e)dt$$

   Se tiene que usando el Teorema Fundamental del Calculo G es derivable y

   $$G'(x) = \ln(x^4 + e).$$

   Observemos que

   $$F(x) = G \circ g$$

   Como ambas son funciones derivable F también los es y :

   $$F'(x) = G'(g(x)).g'(x) = 2\ln(16x^4 + e).$$

2. Observar que $F' > 0$y por lo tanto estrictamente creciente de lo que deducimos la inyectividad de la F. Esto hace que tenga sentido hablar de F^{-1}. Como $F(0) = 0$ entonces

   $$F^{-1}(0) = 0$$

   Aplicando el Teorema de la Derivada de la Función Inversa se tiene que

   $$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{2}$$

3. El taylor de grado 1 de F^{-1} alrededor del cero es:

   $$T_{F^{-1},1,0}(x) = \frac{x}{2}.$$

   Verifica que

   $$\lim_{x\to 0} \frac{r_1(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{T_{F^{-1},1,0}(x) - F^{-1}(x)}{x} = 0.$$

   Sabemos que $F(x) = T_{F^{-1},1,0}(x) + r_1(x) = \frac{x}{2} + r_1(x)$ luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{7F^{-1}(x) + \frac{x}{2} + x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{7(\frac{x}{2} + r_1(x)) + \frac{x}{2} + x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 4x + 7r_1(x))}{2x} = 4 + 7\lim_{x\to 0} \frac{r_1(x))}{x} = 4$$