Universidad de la República | **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2018**

Examen- 16 de febrero 2019.

Número de Examen	Apellido, Nombre	CI

- La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
- En este examen deberá elegir 4 de los 5 ejercicios. Marque los 4 ejercicios que realizará en la tabla correspondiente.
- Se aprueba con 50.

1	2	3	4	5

Ejercicio de Desarrollo 1. (25 puntos) Sea A un conjunto no vacío y acotado inferiormente.

1. Defina cota inferior e ínfimo de A.
   Considere:
   $$B = \{b : b = -a \quad \text{con} \quad a \in A\}$$
2. Demuestre que B es no vacío y que si α es cota inferior de A entonces $-\alpha$ es cota superior de B.
3. Justifique la existencia del ínfimo del conjunto A y demuestre que se cumple que $\inf A = -\sup B$. Use lo anterior para probar que todo conjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo

Ejercicio de Desarrollo 2. (25 puntos)

1. Calcular el área encerrada entre la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $y = 2$.
2. Calcular las siguientes dos integrales:
   $$\int_1^e x \ln x \, dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Ejercicio de Desarrollo 3. (25 puntos)

1. Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definir $\lim_{x \to c} f(x)$ y continuidad de f en $c \in (a, b)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Probar que si f es continua en todo $\mathbb{R}$ entonces entonces $f(0) = 0$
3. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar o dar un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:
   (i) Si f está acotada entonces existen $a, b \in R$ tal que
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$
   (ii) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$
   entonces f tiene máximo o mínimo.

Ejercicio de Desarrollo 4. (25 puntos)

1. Enuncie el Teorema de valor medio de Lagrange.
2. Dar un ejemplo de una función $f : [0,1] \to [0,1]$ derivable en $(0,1)$ y discontinua en $x = 0$ tal que no verique el Teorema de Lagrange.
3. Demuestre que la ecuación n
$$x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$$
tien exactamente dos soluciones en los reales.

Ejercicio de Desarrollo 5. (25 puntos) Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{2x} Ln(t^4 + e)dt$$

1. Justificar la derivabilidad de F y calcular $F'(x)$.
2. Calcular la recta tangente a F^{-1} en 0.
3. Calcular el siguiente límite justificando cada una de las propiedades utilizadas:
$$\lim_{x\to 0} \frac{7F^{-1}(x) + \frac{x}{2} + x^2}{2x}$$