Sistemas Lineales 2

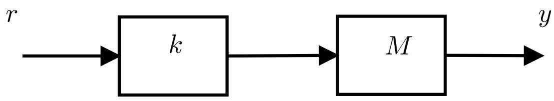
Examen, febrero de 2019

- Escriba nombre y apellido en todas las hojas.
- Utilice las hojas de un solo lado. Resuelva problemas diferentes en hojas diferentes.
- Sea prolijo. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Explique y detalle todos sus pasos. Si algo no es claro para el evaluador, Ud. podría perder los puntos de la pregunta.
- Al entregar cuente las hojas y firme la planilla.
- No escriba ni raye el sobre.

Problema 1

La transferencia $M(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0}{s+\omega_0}, \omega_0 > 0$ describe un modelo simplificado de un motor de corriente continua, con la tensión de alimentación como entrada ($u(t)$) y la frecuencia angular de giro de su eje como salida ($y(t)$).

1. Se propone en primera instancia la siguiente forma de conexión, donde la alimentación del motor es amplificada por un bloque de ganancia $k \geq 0$.



   (a) Estudiar la estabilidad del sistema en función de $k \geq 0$.

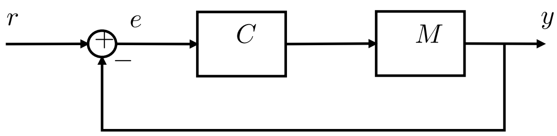
   (b) Para una entrada del tipo escalón ($r(t) = Y(t)E$):

      i. Calcular la respuesta $y(t)$ $\forall t \geq 0$.

      ii. Calcular el valor final de la respuesta en régimen.

      iii. Calcular el tiempo de asentamiento (tiempo necesario para que la respuesta $y(t)$ alcance el 95% de su valor en régimen), **ver nota**.

2. Suponga el esquema de conexión realimentado de la siguiente figura:



   (a) Para el caso de $C(s) = k,\ k > 0$: repetir los cálculos de la parte **1**. Para comparar estos resultados con los de la parte 1, grafique $y(t)$ en un caso y en otro en los mismos ejes e indique en la gráfica los respectivos valores finales y tiempo de asentamiento.

   (b) Calcular el valor final del error ($e(t) = r(t) - y(t)$)en régimen para una entrada escalón.

   (c) Para el caso de $C(s) = \frac{k\omega_0^2}{s(s+10\omega_0)},\ k > 0$, estudiar la estabilidad del sistema en función de k utilizando el teorema de Nyquist.

   (d) Calcular el valor final de la respuesta en régimen y del error en régimen ante una entrada escalón.

   Nota: $e^{-3} \approx 0.05$.

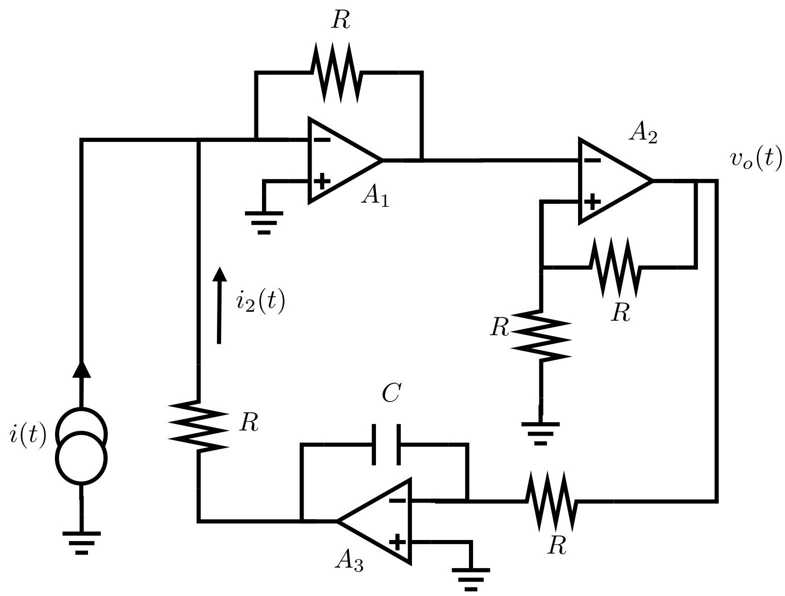


Figure 1:

Problema 2

En el circuito de la figura 1 los amplificadores operacionales son ideales. Los amplificadores A_1 y A_3 operan siempre en zona lineal. El amplificador A_2 es alimentado con fuentes $+/-V_{CC}$.

La corriente $i(t)$ que entrega la fuente de corriente es de la forma $i(t) = Y(t)I_0$, donde: $I_0 > 0$ y $RI_0 = V_{CC}$. El condensador se encuentra inicialmente descargado.

1. Identificar bloques conocidos y describir su funcionamiento.
2. Calcular y graficar $v_o(t)$ e $i_2(t)$ para todo tiempo positivo. Justifique.
3. (a) Calcular T, período de $v_o(t)$ en régimen periódico.
   (b) Calcular el ciclo de trabajo de $v_o(t)$.
4. Proponga una modificación en el circuito de forma de cambiar el ciclo de trabajo de v_o. Presentar el circuito modificado y describir cualitativamente el efecto que este cambio tiene sobre el ciclo de trabajo de v_o.

Problema 3

1. Para el circuito de la Fig. 2, donde el transformador es ideal, calcule la matriz de parámetros H que caracterizan completamente al circuito. ¿Es este cuadripolo simétrico? ¿Es recíproco? Justifique.

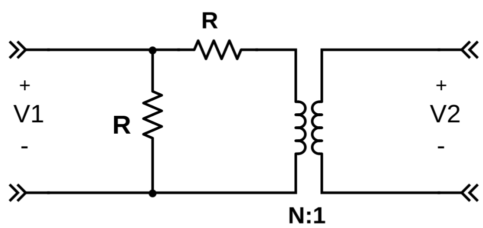


Figure 2: Cuadripolo C1.

2. Para cada uno de los cuadripolos (CA y CB) de la figura 3 calcule una matriz de parámetros que los caracterice (la que le resulte más conveniente). ¿Son estos cuadripolos simétricos? ¿Son recíprocos? Justifique.

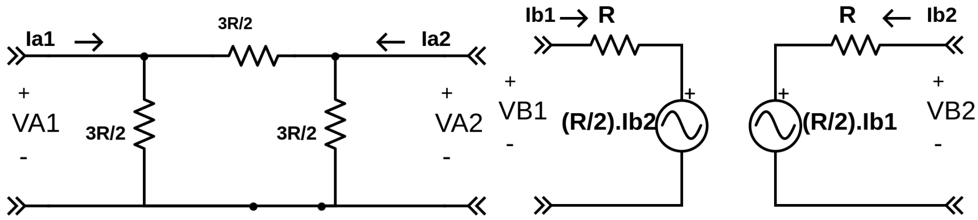


Figure 3: Cuadripolo CA (izquierda) y CB (derecha).

3. Se conectan los cuadripolos CA y CB de acuerdo a la configuración mostrada en la figura 4 formando el cuadripolo $C2$, siendo el transformador ideal. Luego los cuadripolos $C1$ (con $N = 2$) y $C2$ son conectados a un Amplificador Operacional modelado con ganancia A finita y resistencias de entrada y salida $R_i = \infty$, r_o=*0* (Ver Fig. 5). Aplique el teorema de Miller para calcular la impedancia de entrada al amplificador inversor, y con este valor calcule la Impedancia Vista a todo el circuito Z_v.

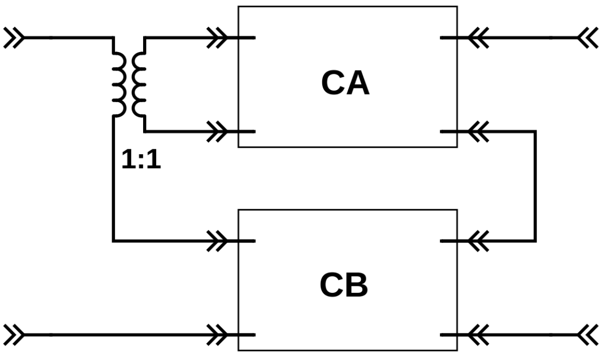


Figure 4: Cuadripolo C2.

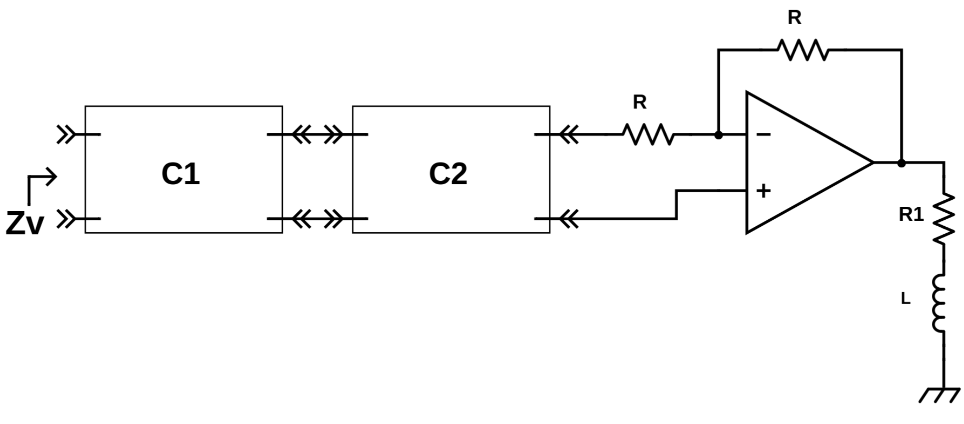


Figure 5: Interconexión de cuadripolos y Amp. Op.

4. Calcule los parámetros híbridos del modelo infinitesimal de una línea de transmisión en régimen sinusoidal.

Solución - Problema 1

1. (a) $H(s) = \frac{k\omega_0}{s+\omega_0}$ estable $\forall k$ (polo en $s_0 = -\omega_0$).
   i. $u(t) = EY(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{E}{s}\frac{k\omega_0}{s+\omega_0} = kEY(t)(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_0} \Rightarrow y(t) = kEY(t)(1 - e^{-\omega_0 t})$.
   ii. $y(t) \to kE$ o $Y(s)s = \frac{ek\omega_0}{s+\omega_0} \to kE$.
   iii. $y(t^*) = 0.95kE = (1 - e^{-3})kE \Rightarrow t^* = \frac{3}{\omega_0}$.

2. (a) $H(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)} = \frac{k\omega_0}{s+(k+1)\omega_0}$ estable $\forall k$.
   i. $y(t) = \frac{k}{k+1} EY(t)(1 - e^{-\omega_0(k+1)t})$.
   ii. $y(t) \rightarrow \frac{k}{k+1} E$.
   iii. $t^* = \frac{3}{(k+1)\omega_0}$.

   (b) $e(t) \rightarrow \frac{1}{k+1} E$.

3. $-G_{ol} = \frac{k\omega_0^3}{s(s+\omega_0)(s+10\omega_0)}$. El diagrama de bode y Nyquist se presenta en las siguientes figuras:

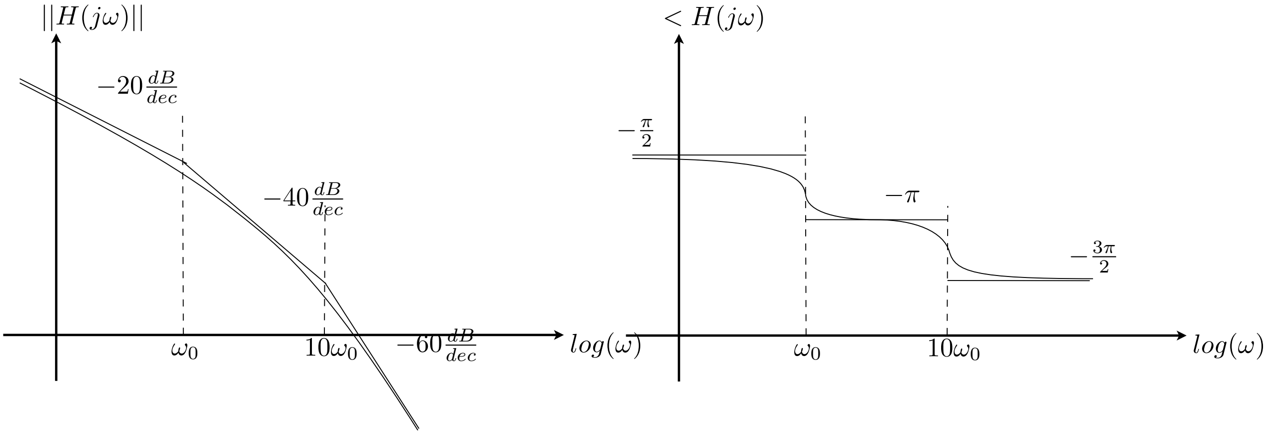


Figure 6:

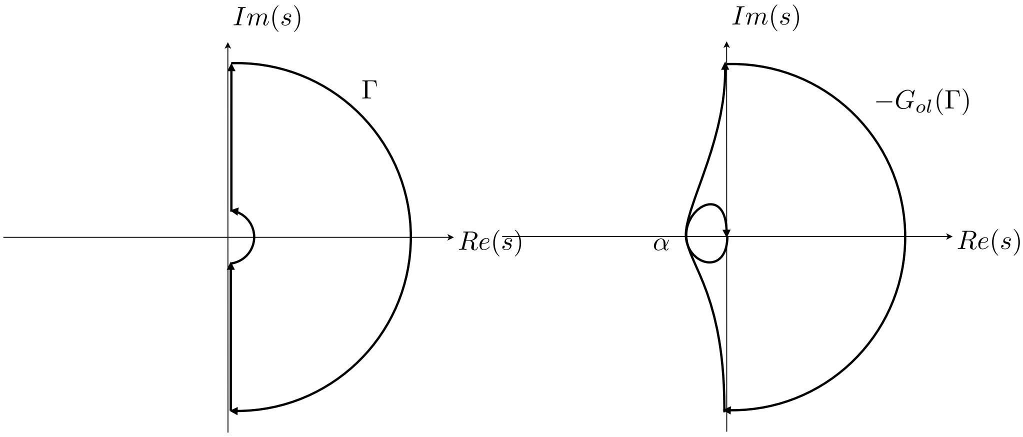


Figure 7:

$-G_{ol}(re^{j\theta}) \approx \frac{k\omega_0^3}{10\omega_0^2 re^{j\theta}}$. El cruce del diagrama por el semieje real negativo se da en α, calculado del siguiente modo: $\frac{k\omega_0^3}{j\omega_\alpha(j\omega_\alpha+\omega_0)(j\omega_\alpha+10\omega_0)} = \alpha \Rightarrow \omega_\alpha = \sqrt{10}\omega_0, \quad \alpha = -\frac{k}{110}$. Para que el sistema sea estable el número de vueltas de la curva de Nyquist entorno al $-1+j0$ debe ser cero, entonces $\alpha = -\frac{k}{110} < -1 \Rightarrow k > 110$.

4. $H(s) = \frac{k\omega_0^3}{s(s+\omega_0)(s+10\omega_0)+k\omega_0^3}$, para los valores de k que aseguran la estabilidad del sistema (obtenidos en la parte anterior), ante una entrada escalón: $u(t) = EY(t) \Rightarrow sY(s) = H(s).\frac{E}{s}s \rightarrow EH(0) = y(+\infty) = E$. $e(+\infty) = 0$.

Solución - Problema 2

El operacional A_3 conforma un integrador ideal, mientras que el A_2 conforma un Schmitt trigger.

El operacional A_1, constituye un conversor corriente-tensión, obteniéndose en la salida del operacional una tensión proporcional a la corriente que ingresa al circuito por la para inversora de A_1.

Se cumple que: $i_2(t) = \frac{v_{A_3}}{R}$, $v_{A_1} = -R(i(t) + i_2(t))$

Para $t = 0$: $i_2(0) = 0V \Rightarrow v_{A_1} = -RI_0 = -V_{CC}$. Entonces $v_o(0) = +V_{CC}$.

Para $t > 0$: $i_2(t) = -\frac{1}{R^2C}V_{CC}tY(t) \Rightarrow v_{A_1} = -R(I_0 - \frac{1}{R^2C}V_{CC}t) = V_{CC}(-1 + \frac{1}{RC}t)$.

La salida $v_o(t)$ se mantiene hasta que la tensión en v_{A_1} alcanza el valor $\frac{V_{CC}}{2}$. El tiempo donde esto ocurre es: $\frac{1}{2} = \frac{1}{RC}t_1 - 1 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}RC$.

Para $t > t_1 (t^* > 0)$: $i_2(t^*) = (\frac{1}{R^2C}V_{CC}t - \frac{1}{R}V_{CC}\frac{3}{2})Y(t) \Rightarrow v_{A_1} = -R(I_0 + (\frac{1}{R^2C}V_{CC}t - \frac{1}{R}V_{CC}\frac{3}{2})) = V_{CC}(-1 - \frac{1}{RC}t + \frac{3}{2}) = V_{CC}(\frac{1}{2} - \frac{1}{RC}t)$.

La salida $v_o(t)$ se mantiene hasta que la tensión en v_{A_1} alcanza el valor $-\frac{V_{CC}}{2}$. El tiempo donde esto ocurre es: $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{RC}t_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = RC$.

Es sencillo en este punto notar que el circuito oscilara. Por la simetría del problema: $T = 2t_2 = 2RC$, $DC = \frac{t_2}{T} = 0.5$.

El ciclo de trabajo depende del tiempo que le toma a la rampa de tensión (producida por el integrador) alcanzar el borde de la ventana de histeresis del Schmitt trigger. Por tal razón, pueden pensarse diversas modificaciones (con sus pros y sus contras): utilizar fuentes no-simétricas para alimentar al trigger, modificar los umbrales de disparo utilizando diodos, cambiar la tasa de carga del condensador en función de la polaridad de la alimentación, etc.

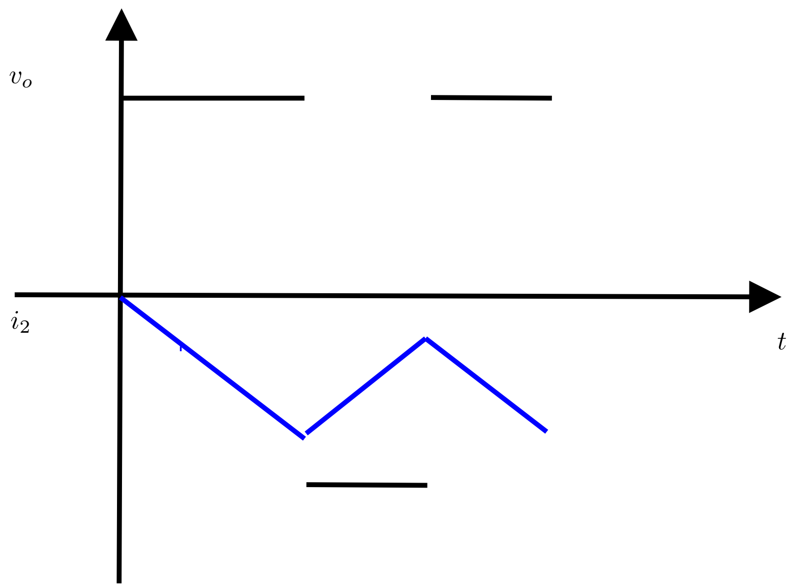


Figure 8:

Solución - Problema 3

1. Para el cuadripolo $C1$:

   Con $V_2 = 0$:
   $h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{2}$
   $h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-N}{2}$
   Con $I_1 = 0$:
   $V_P = N.V_2 \rightarrow I_P = \frac{-N.V_2}{2R} \rightarrow I_S = \frac{-N^2.V_2}{2R} \rightarrow h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{N^2}{2R}$
   $V_P = N.V_2 \rightarrow h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N}{2}$

   Entonces: $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{N}{2} \\ \frac{-N}{2} & \frac{N^2}{2R} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

   $C1$ es recíproco, $h_{12} = -h_{21}$, pero no es simétrico ya que $det(H) \neq 1$.

2. Para el cuadripolo CA: $Y_A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3R} & \frac{-2}{3R} \\ \frac{-2}{3R} & \frac{4}{3R} \end{bmatrix}$. Entonces como $y_{11} = y_{22}$ y $y_{12} = y_{21}$ el cuaripolo CA es simétrico y recíproco (notar también la ausencia de fuentes dependientes).

   Para el cuadripolo CB: $Z_B = \begin{bmatrix} R & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & R \end{bmatrix}$. Siendo este simétrico (y recíproco).

3. Los cuadripolos CA y CB están conectados en serie, ya que el transformador evita que CA cortocircuite los bornes de CB, por lo tanto:
$Z_2 = Z_A + Z_B = \begin{bmatrix} R & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & R \end{bmatrix}$

Como los cuadripolos $C1$ y $C2$ están conectados en cascada trabajaremos con los parámetros T:
$T = T1.T2 = \begin{bmatrix} N & \frac{R}{N} \\ -\frac{N}{R} & \frac{2}{N} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3R \\ \frac{1}{R} & 2 \end{bmatrix}$, como $N = 2$: T= $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7R \\ -\frac{3}{R} & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.
Considerando ahora a la configuración del amplificador operacional conectado a la salida de los cuadripolos, identificamos el circuito de la figura 9.
Aqui $Z_a = R + \frac{R}{1+A} = R.\frac{2+A}{1+A}$.
Resultando $Z_v = \frac{A.Z_a+B}{C.Z_a+D}$.

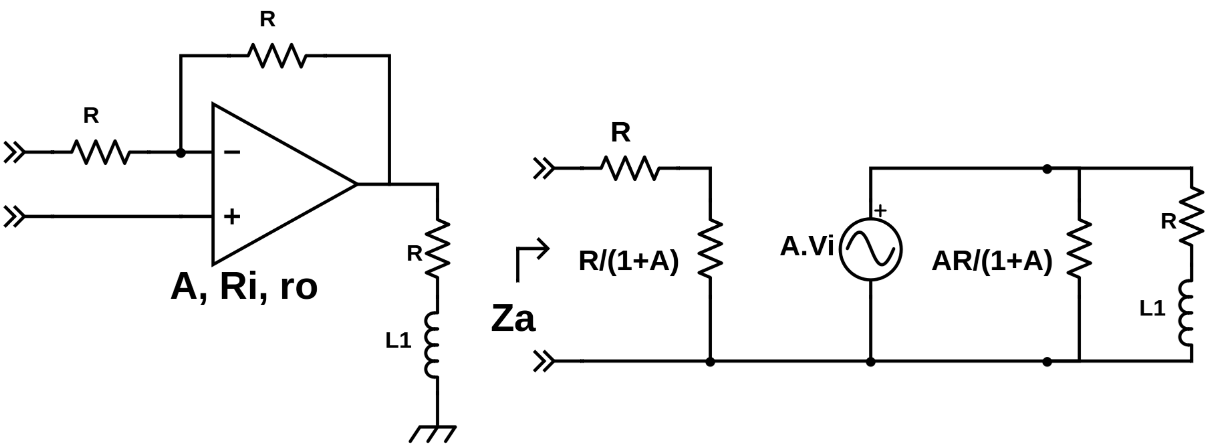


Figure 9: Amplificador: A, Ri, ro.

4. En el modelo infinitesimal de la linea de transmisión se cumple que:

$$I_1 + I_2 = V_2(G_0\Delta x + j\omega C_0\Delta x); V_1 - I_1(R_0\Delta x + j\omega L_0\Delta x) = V_2$$

Entonces los parámetros del modelo híbrido son:

$$h_{11} = (R_0\Delta x + j\omega L_0\Delta x); h_{12} = 1; h_{21} = -1; h_{22} = (G_0\Delta x + j\omega C_0\Delta x)$$