Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **8 de Diciembre de 2018**

EXAMEN
DURACIÓN: 3:30 HORAS.

No. de examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El mínimo para aprobar el examen son 50 puntos y uno de los problemas completamente resuelto.

Problema I (30 pts.)

Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando en el primer caso o mostrando contraejemplos en el segundo.

1. La longitud de una curva no depende la parametrización elegida.
2. Si dos campos definidos en un abierto conexo del plano tienen el mismo rotor entonces difieren en un campo de gradientes.
3. Si un campo en un abierto del espacio es solenoidal y el flujo sobre una esfera de centro un punto p y radio k vale 14, entonces el flujo sobre cualquier esfera de centro p tiene el mismo valor. (Las normales son tomadas de la misma forma).
4. Si un campo definido en $\mathbb{R}^3$ es de rotores entonces el flujo sobre una superficie compacta sin borde es nulo.
5. Si para un punto p del espacio existen superficies cerradas que lo contienen en su interior de diámetro arbitrariamente pequeño y tales que el flujo de un campo F sobre ellas es nulo, entonces la divergencia de F en p es nula.

Problema II (35 pts.)

Considera la superficie S definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2, \ 2z - y \geq 6, \ z \leq 8\}$ y el campo F definido en $\mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (-2z, -1, 1)$.

1. Bosqueja S.
2. Halla un potencial vector G.
3. Parametriza el borde de S (oriéntala a tu gusto).
4. Calcula la circulación de G en el borde de S con la orientación que elegiste.
5. ¿El resultado de la parte anterior depende del potencial G que elegiste? Justifica tu respuesta.

Problema III (35 pts.)

Sea F un campo definido por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, g(z) \right),$$

con g una función definida en $\mathbb{R}$ de clase C^1. Sea U el mayor dominio de definición de F.

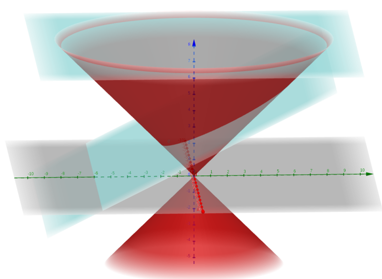
1. Prueba que F es irrotacional en U para cualquier g.
2. Prueba que F no es de gradientes en U.
3. Describe las posibles circulaciones de F a lo largo de curvas cerradas simples incluidas en U.
4. Sea la curva $\gamma : [\pi/2, 5\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$. Calcula la circulación de F sobre γ con $g(z) = z$.
5. Halla g para que F sea solenoidal.
6. En las condiciones de la parte anterior, es F un campo de rotores en U? En caso afirmativo calcula un potencial vector.

Esquema de solución

Problema I

1. Verdadera. Ver teórico.
2. Falsa. Por ejemplo si consideramos $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, y los campos $F, G : U \to \mathbb{R}^2$ tales que $F(x,y) = (0,0)$, $G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Notar que tanto F como G son irrotacionales, sin embargo $G - F$ no es de gradientes en U, sabemos que hay curvas cerradas que encierran al origen tal que la circulación de G sobre estas curvas no es nula.
3. Falsa. Pensar en un campo X que está generado por dos cargas eléctricas positivas ubicadas en $P = (0,0,0)$ y en $Q = (2,0,0)$. Por ejemplo
$$X(x,y,z) = -\frac{a(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{b(x-2,y,z)}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Si la esfera de centro P y radio k no tiene a Q en su interior el flujo tiene cierto valor, pero si la esfera de centro P y radio k' tiene Q en su interior el flujo será mayor.
4. Verdadera. Aplicar teorema de Stokes.
5. Verdadera. Ver interpretación intrínseca de la divergencia.

Problema II

1. 

2. Un posible potencial vector es $G(x,y,z) = (-z, z^2 + x, 0)$.
3. Consideramos $\partial S = \gamma_1 \cup \gamma_2$. donde γ_1 se puede parametrizar como $\alpha_1(t) = (8\cos(t), 8\sin(t), 8)$, $t \in [0, 2\pi]$ y γ_2 se puede parametrizar como $\alpha_2(t) = (2\sqrt{3}\cos(t), 2 + 4\sin(t), 4 + 2\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
4. $\int_{\partial S} G = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} G$, dado que se orientaron ambas curvas de la misma forma. Por tanto
$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} G &= \int_{\gamma_1} G - \int_{\gamma_2} G \\
&= \int_0^{2\pi} \langle(-8, 64 + 8\cos(t), 0), (-8\sin(t), 8\cos(t), 0)\rangle \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \langle(-4 - 2\sin(t), 16 + 16\sin(t) + 4\sin^2(t) + 2\sqrt{3}\cos(t), 0), (-2\sqrt{3}\sin(t), 4\cos(t), 2\cos(t))\rangle \\
&= 64\pi - 12\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$
5. No depende del potencial vector dado que todos los potenciales vectores difieren de un campo de gradientes y como el borde es unión de curvas cerradas, el gradiente en esas curvas integra cero.

Problema III

1. Notar que F se puede escribir como la suma de dos campos independientes. $F(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0) + (0,0,g(z))$. Es inmediato que F es irrotacional en $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$, pues es suma de dos campos irrotacionales.

2. Para probar que F no es de gradientes basta ver que existe una curva cerrada para la cual la circulación del campo no es nula. Tomamos $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), g(0))$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces $\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle(-\sin(t), \cos(t), g(0)); (-\sin(t), \cos(t), 0)\rangle = 2\pi \neq 0$.

3. Si la curva no rodea al eje $\vec{z}$ existe un abierto V simplemente conexo que contiene a la curva, donde F es irrotacional, por tanto de gradientes en V y su circulación en dicha curva es nula. Por otro lado si la curva rodea el eje $\vec{z}$, entonces la circulación es de $2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$ es la cantidad de vueltas (orientadas) que da la curva alrededor del eje.

4. $\int_\gamma F = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \langle(\frac{-t\sin(t)}{t^2}, \frac{t\cos(t)}{t^2}, t); (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1)\rangle = 2\pi + 3\pi^2$.

5. Para que F sea solenoidal g debe ser $g \equiv k$, con $k \in \mathbb{R}$.

6. Resolviendo la ecuación $F = rot(X)$ obtenemos que un posible campo $X = (P,Q,R)$ es $P = \frac{xz}{x^2+y^2} + b(x,y)$, $Q = \frac{yz}{x^2+y^2} + a(x,y)$, $R \equiv 0$ donde $a_x - b_y = k$ (de la parte anterior). Notar por último (y no menos importante) que el campo anterior puede ser definido en U si tomamos a, b con dominio $\mathbb{R}^2$.