Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2018**

SOLUCIÓN EXAMEN - 18 de diciembre.

Ejercicio de Desarrollo 1. (25 puntos) Considere el siguiente conjunto de números reales

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

1. Definir cota inferior e ínfimo de un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ no vacío.
2. Probar que A está acotado inferiormente. Notemos α al ínfimo de A.
3. Verificar que $\alpha \geq 0$.
4. Deducir que $\alpha = 0$.

---

1. - $a \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A si se verifica que para todo $x \in A$ $x \geq a$
   - $a \in \mathbb{R}$ es ínimo si es la mayor de las cotas superiores.
2. Si $n > 0$ entonces por propiedades de la desigualdad $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que 0 es una cota inferior de A.
3. Como 0 es cota inferior y el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores entonces se tiene que: $\alpha \geq 0$.
4. Sea $\beta > 0$ entonces $\frac{1}{\beta}$ es también un número positivo. Por la propiedad Arquimediana de los reales existe $N > 0$ tal que $\frac{1}{\beta} < N$. Entonces $\beta > \frac{1}{N} \in A$. Por lo que si $\beta > 0$ entonces β no es cota inferior. Esto implica que 0 es el ínfimo de A.

Ejercicio de Desarrollo 2. (25 puntos)

1. Defina primitiva de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y enuncie la regla de Barrow .
2. Calcular

$$\int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx \qquad \text{y} \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$$

---

1. - Decimos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable es una primitiva de f si $F'(t) = f(t)$.
   - Si F es una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

.

2. - Aplicando una vez partes obtenemos

$$\int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx = e - \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^x \cos \frac{\pi x}{2} dx.$$

   Aplicando partes de nuevo:

$$\int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx = e - \frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx \right).$$

   Despejando llegamos a que

$$\int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2(2e + \pi)}{1 + \pi^2}.$$

- Usando la fórmula de la tangente de un ángulo:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx.$$

  Aplicando sustitución :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{u^2}|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = -2.$$

Ejercicio de Desarrollo 3. (25 puntos)

1. Enunciar el teorema de Bolzano.
2. Demostrar que existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que es solución de la ecuación:

$$2cos(x) = x - 1$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la siguiente afirmación:
Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ entonces f tiene máximo o mínimo.
Probar o dar un contraejemplo.

---

1. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a).f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
2. Considero la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = 2\cos x - x + 1.$$

   Sabemos que la funci ón g es continua y que si c es raíz de g entonces será solución a la ecuación pedida.

   Observemos que $g(0) = 3$ y que $g(\pi) = -\pi - 1$ luego podemos asegurar usando Bolzano que g tiene una raíz c.
3. Esto es falso un ejemplo es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan x$. Esta función verifica que:
   - $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
   - La función es continua y estrictamente creciente pues es la inversa de una función continua y estrictamente creciente ($\tan x$).
   - Como la función es estrictamente creciente NO tiene ni máximo ni mínimo.

Ejercicio de Desarrollo 4. (25 puntos)

1. Demuestre que si f es derivable en (a, b) y tiene un mínimo relativo en $c \in (a, b)$ entonces $f'(c) = 0$.
2. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $c \in [a, b]$; Demuestre o de un contraejemplo:
   a) *Si f no es derivable en c entonces c no puede ser un extremo relativo.*
   b) *Si $f'(c) = 0$ entonces c es un extremo relativo.*
3. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 1, teniendo la base inferior en el diámetro.

---

1. Supongamos por absurdo que $f'(c) \neq 0$ vamos a suponer que $f'(c) < 0$. El otro caso es completamente analogo. Como $c \in (a, b)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(c, \epsilon) \subset (a, b)$. Definimos una función continua $g : B(0, \epsilon) - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

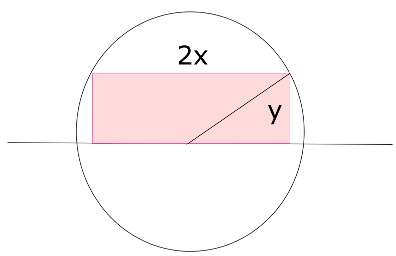
   Por definición de derivada sabemos que $\lim_{h \to 0} g(h) = f'(c) < 0$. El teorema de conservación del signo implica que existe $\epsilon' < \epsilon$ tal que para todo $h \in (-\epsilon', \epsilon')$ se tiene que $g(h) < 0$. Luego si $0 < h < \epsilon'$ tenemos que $c + h > c$ y que

$$g(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0.$$

   Multipicando la desigualdad por h concluimos que $f(c+h) - f(c) < 0$ y por lo tanto

$$0 < h < \epsilon' \Rightarrow f(c+h) < f(c).$$

   Lo que contradice el hecho de que c era mínimo relativo.
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ tiene un mínimo relativo en 0 y no es derivabale en dicho punto.
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ es estricatemente creciente y $f'(x) = 3x^2$ que tiene una raíz en 0.
2. Supongamos que nuestro rectángulo tiene $2x$ de base e y de altura.



   Se cumple que por estar inscripto en un semi-círculo
   $x^2 + y^2 = 1$
   El área del rectangulo está dada por $A(x, y) = 2xy$ y sustituyendo el vínculo

$$A(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

   donde $x \in [0, 1]$.
   Derivando llegamos a

$$A'(x) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   estudiando el signo llegaos a la conclusión que en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se da un máximo del área.

Ejercicio de Desarrollo 5. (25 puntos) Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{2x}^{0} e^{-t^2} dt$$

1. Justificar la derivabilidad de F y calcular $F'(x)$.
2. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de F alrededor del 0.
3. Calcular el siguiente límite justificando cada una de las propiedades utilizadas:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3F(x) + 6x + x^3}{2x^3}$$

1. Definamos
$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$
Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que G es derivable y $G'(x) = e^{-x^2}$. Se cumple que $F(x) = -G(2x)$, usando la regla de la cadena F es derivable por ser composición de funciones derivables. Ademas:
$$F'(x) = -G'(2x)2 = -2e^{-4x^2}$$

2. Derivando se tiene que :
$$F'(x) = -2e^{-4x^2} \qquad F''(x) = 16xe^{-4x^2} \qquad F'''(x) = -16e^{-4x^2}(-1+8x^2)$$
Substituyendo:
$$F(0) = 0 \qquad F'(0) = 2 \qquad F''(0) = 0 \quad \text{y} \quad F'''(0) = -16$$
Así que
$$T_{3,0,F}(x) = -2x + \frac{8}{3}x^3$$

3. Sabemos que $F(x) = T_{3,0,F}(x) + r_3(x)$ y que $\lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$. Esto implica que:
$$\lim_{x\to 0} \frac{3F(x) + 6x + x^3}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3T_{3,0,F}(x)(x) + 6x + x^3}{2x^3}$$
Y por lo tanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{3F(x) + 6x + x^3}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x + 8x^3 + 6x + x^3}{2x^3} = \frac{9}{2}$$