

Solución del Ejercicio 3

- a) i) La transferencia se puede calcular fácilmente usando la expresión del divisor y el amplificador en configuración no inversora:

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + 10RCs + 1} \left(1 + \frac{99}{\frac{L}{R}s + 1} \right) \quad (1)$$

$$= \frac{100 + \frac{L}{R}s}{(LCs^2 + 10RCs + 1) \left(\frac{L}{R}s + 1 \right)} \quad (2)$$

$$= \frac{100 + \frac{L}{R}s}{\left(\frac{L^2}{100R^2}s^2 + \frac{L}{10R}s + 1 \right) \left(\frac{L}{R}s + 1 \right)} \quad (3)$$

- ii) Para llevarlo a la forma pedida normalizamos todos los polinomios con el coeficiente de mayor orden en 1.

$$H(s) = \frac{100 \frac{R^2}{L^2}}{s + \frac{R}{L}} \frac{100 \frac{R}{L} + s}{s^2 + 10 \frac{R}{L}s + 100 \frac{R^2}{L^2}} = \frac{100\omega_0^2}{s + \omega_0} \frac{100\omega_0 + s}{s^2 + 10\omega_0s + 100\omega_0^2} \quad (4)$$

Donde tomamos $\omega_0 = \frac{R}{L}$

- b) i) Para calcular la transferencia de lazo abierto anulamos la entrada e inyectamos una señal a la salida de cualquiera de los dos operacionales, es fácil ver que con u a tierra el operacional de la izquierda queda en configuración inversora de ganancia $-k$ y el otro bloque tiene la transferencia calculada en la parte anterior.

$$G_{OL} = -k.H(s) = -L(s)$$

Para hacer el diagrama de Nyquist primero hacemos los diagramas de Bode de $L(s)$, que se muestran en la figura 1 Según los diagramas de Bode realizamos el diagrama de Nyquist de la figura 2 Como $L(s)$ no tiene polos encerrados por la curva original, la curva mapeada no debe encerrar al -1 para ello hay que asegurarse que $\alpha < 1$

En el diagrama de Bode se puede ver que la frecuencia para la cual $L(j\omega)$ tiene argumento $-\pi$ es aproximadamente $10\omega_0$

Evaluamos $L(j10\omega_0)$

$$L(10j\omega_0) = k \frac{100\omega_0^2}{10j\omega_0 + \omega_0} \frac{100\omega_0 + j10\omega_0}{-100\omega_0^2 + 10\omega_0s + 100\omega_0^2} \quad (5)$$

$$= \frac{1000k}{100j} \frac{10 + j}{10j + 1} \simeq \frac{1000k}{100j} \frac{10}{10j} = -10k = -\alpha \quad (6)$$

Por lo tanto el sistema es estable para $k < 0.1$

Para hallar la condición más exactamente imponemos $L(j\omega) = -\alpha$ y vemos que condición debe cumplir k para que $\alpha < 1$.

$$-\alpha = L(j\omega) = k \frac{100\omega_0^2}{j\omega + \omega_0} \frac{100\omega_0 + j\omega}{-\omega^2 + 10\omega_0j\omega + 100\omega_0^2} \quad (7)$$

$$\Rightarrow -\alpha (j\omega + \omega_0) (-\omega^2 + 10\omega_0j\omega + 100\omega_0^2) = 100k\omega_0^2 (100\omega_0 + j\omega) \quad (8)$$

Igualando partes real e imaginaria y normalizando sobre ω_0 y α , es decir trabajamos con

$$x = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \text{ e } y = \frac{k}{\alpha}:$$

$$\text{parte imaginaria: } 110 - x = -100y \quad (9)$$

$$\text{parte real: } -11x + 100 = 10^4y \quad (10)$$

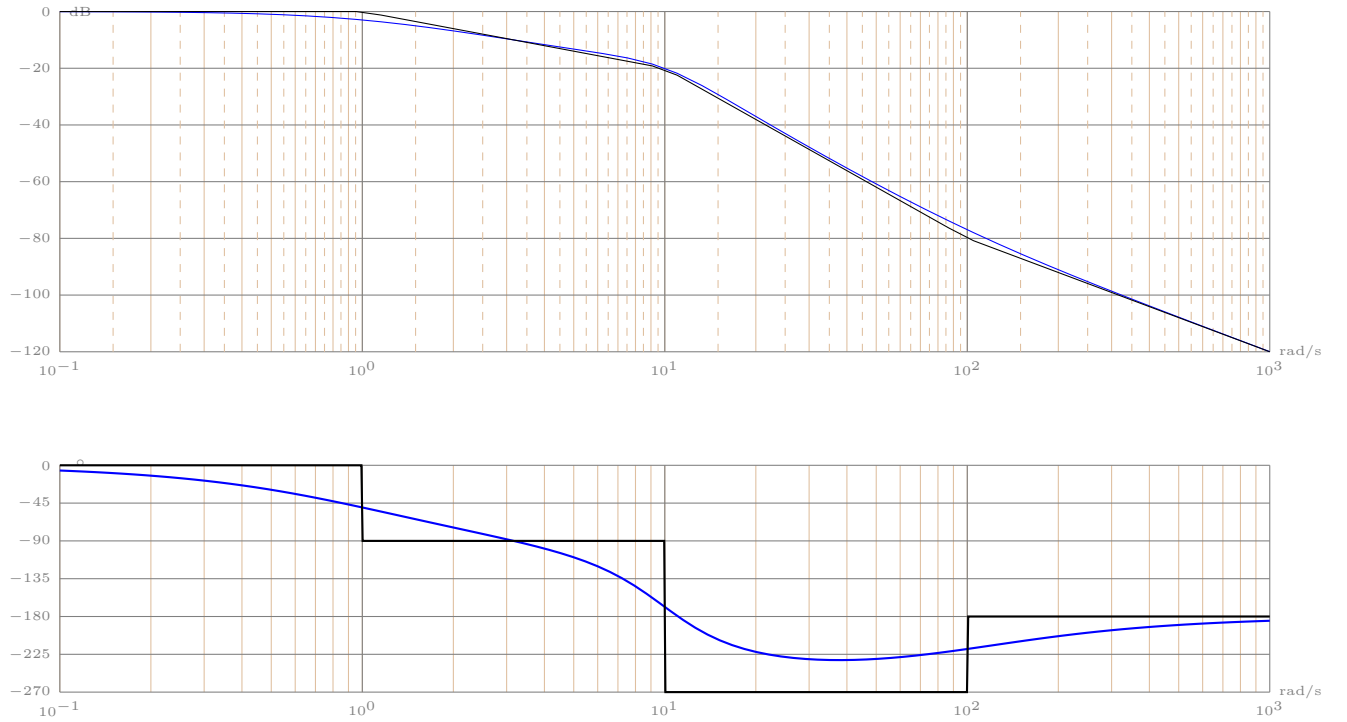


Figura 1: Diagrama de Bode del ejercicio 3

De la ecuación 10 despejamos $x = \frac{100}{11} (100y + 1)$

Sustituyendo en 9 y operando llegamos a que $y = \frac{k}{\alpha} = \frac{1110}{8900} \simeq 0.1247\dots$ Como para que sea estable debe cumplirse $\alpha < 1$ entonces el sistema es estable si $k < 0.1247\dots$

Esta condición es menos restrictiva que la anterior y se debe a que en el Diagrama de Bode real de argumento la frecuencia de corte con $-\pi$ es mayor que la que dicta el asintótico debido al aporte de las otras dos raíces (ω_0 y $100\omega_0$).

ii) Por el diferencial de la derecha y el bloque de la primera parte:

$$Y(s) = kH(s)(U(s) - Y(s)) = kH(s)E(s) \quad (11)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{E(s)}{kH(s)} \quad (12)$$

$$\Rightarrow E(s) = (U(s) - kH(s)E(s)) \quad (13)$$

$$\Rightarrow E(s) = U(s) \frac{1}{1 + kH(s)} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \boxed{S(s) = \frac{1}{1 + kH(s)}} \quad (15)$$

iii)

$$MG = 2 = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{0.125}{k} = \frac{8}{k} \Rightarrow k \simeq \frac{1}{16}$$

iv)

$$U(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{A}{s} \frac{1}{1 + kH(s)}$$

Como estamos en el caso de un valor de k para el cual el sistema es estable, los polos de $sE(s)$ son los ceros de $1 + kH(s)$ de los que sabemos que no hay ninguno con parte real no negativa por Nyquist.

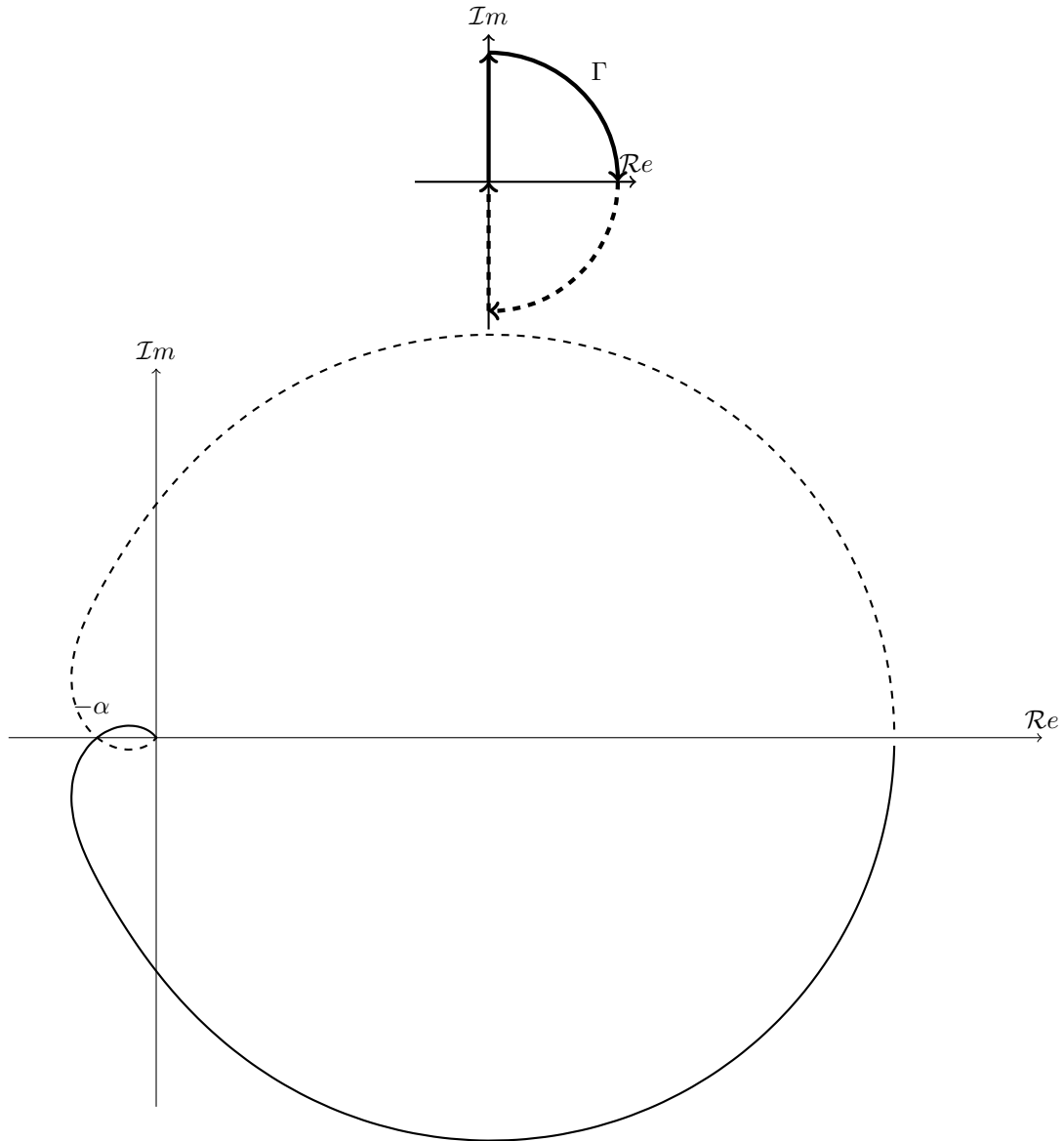


Figura 2: Diagrama de Nyquist del ejercicio 3

$\therefore E(s)$ está en las condiciones del teorema del valor final:

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + kH(s)} = \frac{A}{1 + 100k}$$

El mínimo error se da para el máximo k o sea $k = 1/16$. El mínimo error alcanzable es entonces:

$$e_{min} = \frac{16}{116} A \simeq 0.138A$$

En porcentaje el error mínimo es 13.8%

v) Como estamos en zona de estabilidad podemos usar fasores:

$$E(10j\omega_0) = \frac{1}{1 + L(10j\omega_0)} U(10j\omega_0) = \frac{A}{1 + L(10j\omega_0)}$$

$$L(j10j\omega_0) = \frac{1000kA}{100j} \frac{10+j}{10j+1} \simeq 0.625A \angle -169^\circ \quad (16)$$

$$E(10j\omega_0) = \frac{A}{1+L(10j\omega_0)} \simeq 2.49A \angle 18^\circ \quad (17)$$

Por lo tanto en régimen: $e(t) \simeq 2.49A \cos(10\omega_0 t + 18^\circ)$. Se puede ver que a esta frecuencia el error ya es muy grande, o sea que la salida no puede seguir a la entrada.