Sistemas Lineales 2

Segundo Parcial, 29 de noviembre de 2018

- Se indican en cada caso los puntos (C,E) que cada ejercicio aporta a los objetivos de la ganancia de curso y de la exoneración parcial.
- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas. Al entregar cuente las hojas y firme la planilla.
- Utilice las hojas de un solo lado. Resuelva problemas diferentes en hojas diferentes.
- Sea prolijo. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Explique y detalle todos sus pasos. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, Ud. podría perder los puntos de la pregunta.

Problema 1: (4,12) puntos

a. Sea el sistema de la Fig. 1 consistente de dos tanques conectados por tuberías donde q_1, q_2 y q_3 son los caudales (m^3/seg) indicados.

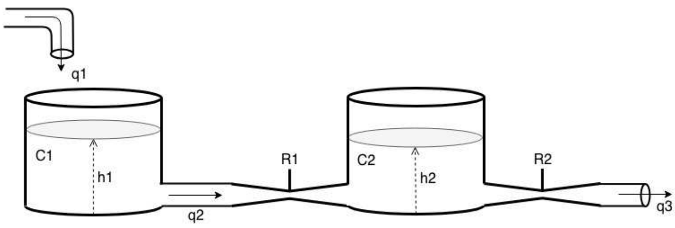

Figura 1: Sistema de tanques de agua.

Modelamos de forma simplificada la relación entre caudales y alturas del líquido en cada tanque. El balance de masa para cada tanque implica que el caudal neto a cada tanque es proporcional a la variación de altura en su interior:

- $q_1 - q_2 = C_1 \frac{dh_1}{dt}$
- $q_2 - q_3 = C_2 \frac{dh_2}{dt}$,

siendo C_1 y C_2 constantes y h_1, h_2 las alturas respectivas. Modelamos linealmente el paso del líquido por las tuberías:

- $q_3 = \frac{h_2}{R_2}$
- $q_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$,

siendo R_1 y R_2 las resistencias hidráulicas de cada tubería.

a.iC Calcular la transferencia $H(s) = \frac{Q_3(s)}{Q_1(s)}$ y estudiar la estabilidad BIBO para $R_1 = R_2 = 2$ y $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

a.ii Obtener un modelo en variables de estado para el sistema con entrada q_1 y salida q_3. Indique cuales son las variables de estado y las respectivas matrices A, B, C, D.

a.iii Estudiar la estabilidad interna cuando $R_1 = R_2 = 2$ y $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

b. Para el sistema dinámico con entrada $u(t)$, salida $y(t)$ y estado $x(t)$ dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = 0,$$

estudiar la estabilidad interna y BIBO del sistema.

Problema 2: (6,12) puntos

a.C Considere el circuito de la figura 2 donde el cuadripolo T está descrito por sus constantes generales.

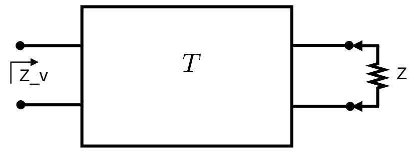

Figura 2:

Calcular la impedancia vista Z_v en función de Z y los parámetros del cuadripolo.

b.C En el circuito de la figura 3 los amplificadores operacionales son ideales. Modelar el circuito a través de un modelo como cuadripolo descrito en constantes generales.

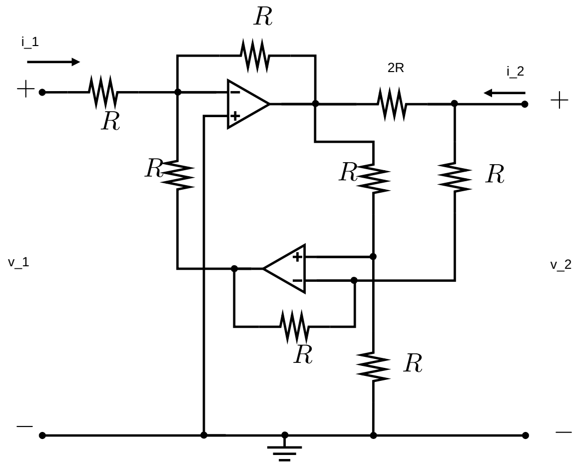

Figura 3: Circuito

a. Una fuente $v_i(t) = Vcos(\omega t)$ es conectada a una línea de transmisión de largo l_1 como se muestra en la figura 4. La línea es sin pérdidas, de autoinductancia y capacidad por unidad de longitud L_0 y C_0 respectivamente. Dicha línea es conectada a una segunda línea de transmisión sin pérdidas, de impedancia característica Z_2 y largo l_2. La segunda línea tiene largo $\frac{\lambda}{4}$ y es conectada al cuadripolo de la figura anterior cargado en su puerto 2 con una resistencia R.

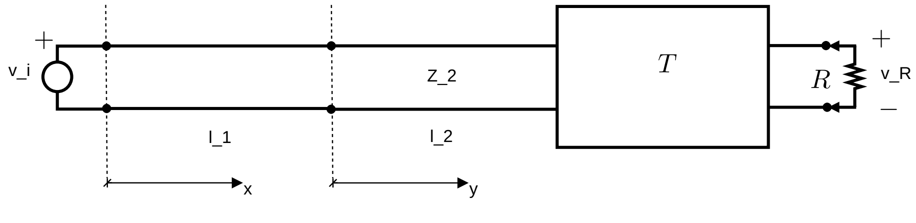

Figura 4: Linea

(i) Calcular el valor de Z_2 de forma que la primer línea se encuentre adaptada (esta condición se mantendrá para el resto del ejercicio).

(ii) Calcular el fasor $V_{pl}(x)$ para la primer línea.

(iii) Calcular el fasor $V_{sl}(y)$ para la segunda línea.

(iv) Calcular la tensión $v_R(t)$.

Problema 3: (5,10) puntos

a.C Demuestre o refute, usando la definición, si los sistemas dados por las siguientes respuestas a impulso son BIBO estables:

a.i $h(t) = \delta(t)$;

a.ii $h(t) = \delta'(t)$;

a.iii $h(t) = Y(t)$.

b. Demuestre o refute, usando sólo la definición de estabilidad BIBO, las siguientes afirmaciones:

b.i Sea el sistema $S = S_1 + S_2$. S es estable si y solo si S_1 y S_2 son estables.

b.ii Sea el sistema $S = S_1 + S_2$ con S_1 estable. S es estable si y solo si S_2 es estable.

b.iii La cascada S de dos sistemas S_1 y S_2 es estable si y solo si S_1 y S_2 son estables.

Considere las condiciones necesarias y las suficientes separadamente.

Problema 4: (10,16) puntos

a. Sea un sistema como el de la figura 5 con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$.

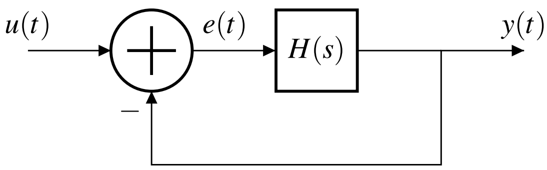

Figura 5: Sistema realimentado

Si se cumplen las siguientes condiciones sobre la entrada y el sistema:

(i) $\lim_{t\to\infty} u(t) = A$,

(ii) $sU(s)$ no tiene polos con parte real mayor o igual a 0,

(iii) $H(s)$ es una función real racional propia,

(iv) $H(s)$ tiene al menos un polo en el origen,

(v) la interconexión está bien planteada,

(vi) el sistema realimentado es BIBO estable.

Demostrar que $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} y(t) = A$.

b.C El sistema de la figura 6 representa un motor de corriente continua y excitación independiente que mueve una masa mediante una cinta. La entrada del sistema es v_s y la salida es x. Si

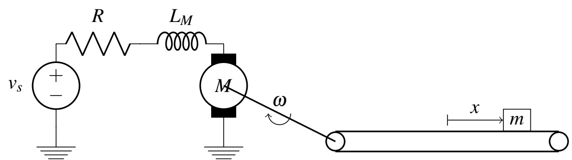

Figura 6:

asumimos que la cinta tiene masa despreciable y su transferencia es:

$$H(s) = \frac{X(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{s\left(\frac{J+mr^2}{k_m.r}(L_M s + R)s + k_m.r\right)},$$

donde:

- $J > 0$ es el momento de inercia del sistema formado por el rotor, el eje y el cilindro que mueve la cinta;
- $r > 0$ es el radio del cilindro que mueve la cinta;
- $k_m > 0$, $R > 0$ y $L_M > 0$ son constantes del motor;

¿Es el sistema BIBO estable? Justifique.

c.C El sistema de la parte anterior se realimenta con el objetivo de controlar la posición $x(t)$. Para ello se mide la posición $x(t)$ con una constante de proporcionalidad $\frac{E}{L}$ quedando un sistema como el de la figura 7, donde las transferencias de voltaje a posición y viceversa tienen las dimensiones adecuadas.

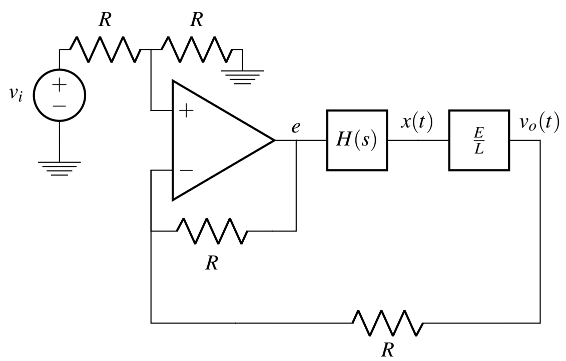

Figura 7: Sistema realimentado

Consideramos que todo el sistema funciona en zona lineal, se cumple $v_i(t) = V_1 Y(t)$ y $H(s) = \dfrac{K\omega_0^3}{s\left(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2\right)}$, donde $K > 0$ tiene dimensiones de distancia sobre voltaje.

Dado que el sistema es dinámico no se puede asegurar el posicionamiento instantáneo ($\frac{E}{L}x(t) = v_i(t)\ \forall t > 0$).

Por lo tanto se busca un buen posicionamiento en régimen, es decir $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E}{L}x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} v_i(t)$.

Determine para qué valores de $K > 0$ se cumple el objetivo deseado.

d. Para $K = \frac{L}{2E}$ calcule el margen de ganancia del sistema realimentado de la Fig. 7.