Problema X

a) Sea un sistema como el de la figura 1 con entrada $u(t)$ y salidda $y(t)$.

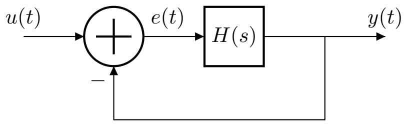

Figura 1: Sistema realimentado

Si se cumplen las siguientes condiciones sobre la entrada y el sistema:

i- $\lim_{t\to\infty} u(t) = A$

ii- $sU(s)$ no tiene polos con parte real mayor o igual a 0.

iii- El sistema es estable BIBO.

iv- $H(s)$ es una función real racional propia.

v- $H(s)$ tiene al menos un polo en el origen.

vi- La interconexión está bien planteada.

Resolviendo el sistema realimentado estandar para el caso $A(s) = H(s)$ y $\beta = 1$:

$$Y(s) = \overbrace{\frac{H(s)}{1 + H(s)}}^{H_{CL}(s)} U(s) \tag{1}$$

Como el sistema es estable y la interconexión está bien planteada H_{CL} es una función real racional propia con todos sus polos en el semiplano izquierdo estricto.

También sabemos que $sU(s)$ no tiene polos con parte real mayor o igual a 0.

$H(s)$ tiene al menos un polo en el origen por lo que podemos escribirla como $H(s) = \frac{H_1(s)}{s}$ donde $H_1(s)$ es una función real racional y estrictamente propia que no se anula en el origen.

De esta forma $H_{CL}(s) = \frac{H_1(s)}{s+H_1(s)}$

$u(t)$ está en las condiciones del teorema del valor final y por lo tanto $y(t)$ también ya que todos los polos adicionales debidos a $H_{CL}(s)$ tienen parte real negativa.

Aplicando el teorema del valor final a $y(t)$ tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{H_1(s)}{s + H_1(s)} U(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\cancel{H_1(s)}}{\cancel{H_1(s)}} U(s) = A \tag{2}$$

Además:

$$e(t) = u(t) - y(t) \therefore \lim_{t\to\infty} e(t) = A - A = 0 \tag{3}$$

Observar que se podía perfectamente demostrar primero que $e(t)$ tiende a 0 usando TVF y con eso obtener el límite de $y(t)$.

b) El sistema de la figura 2 representa un motor de corriente continua y excitación independiente que mueve una masa mediante una cinta.

La entrada del sistema es v_s y la salida es x. Si asumimos que la cinta tiene masa despreciable su transferencia es:

$$H(s) = \frac{X(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{s\left(\frac{J+mr^2}{k_m.r}(L_M s + R)s + k_m.r\right)}$$

Donde:

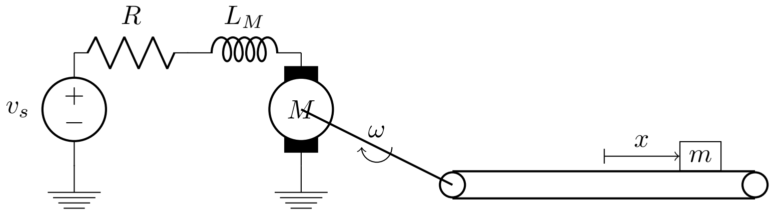

Figura 2:

- $J > 0$ es el momento de inercia del sistema formado por el rotor, el eje y el cilindro que mueve la cinta.
- $r > 0$ es el radio del cilindro que mueve la cinta.
- $k_m > 0$ es una constante del motor.
- $R > 0$ y $L_M > 0$ representan la resistencia e inductancia generada por el bobinado del motor.

La transferencia del sistema es una función racional (estrictamente) propia, por lo cual el sistema es estable si y solo si todos sus polos tienen parte real negativa. Cómo la transferencia tiene un polo en el origen el sistema no es BIBO estable.

c) Si tomamos como salida a $v_o(t) = \frac{E}{L}x(t)$, estamos en las condiciones de la parte a, tenemos que hacer que $e(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0$, y en el caso particular en el que $u(t)$ es un escalón. Por lo que lo único que necesitamos para que el error tienda a 0 es que el sistema sea BIBO estable.

Para estudiar la estabilidad del sistema realimentado podemos usar el criterio de Nyquist (Observar que se cumplen sus hipótesis, está bien planteado y no hay cancelaciones de ceros y polos).

Es fácil ver que $L(s) = \frac{E}{L}H(s) = \frac{K\omega_0^3}{s\left(s^2+\omega_0 s+\omega_0^2\right)}\frac{E}{L}$ Hacemos el diagrama de Bode (figura 3):

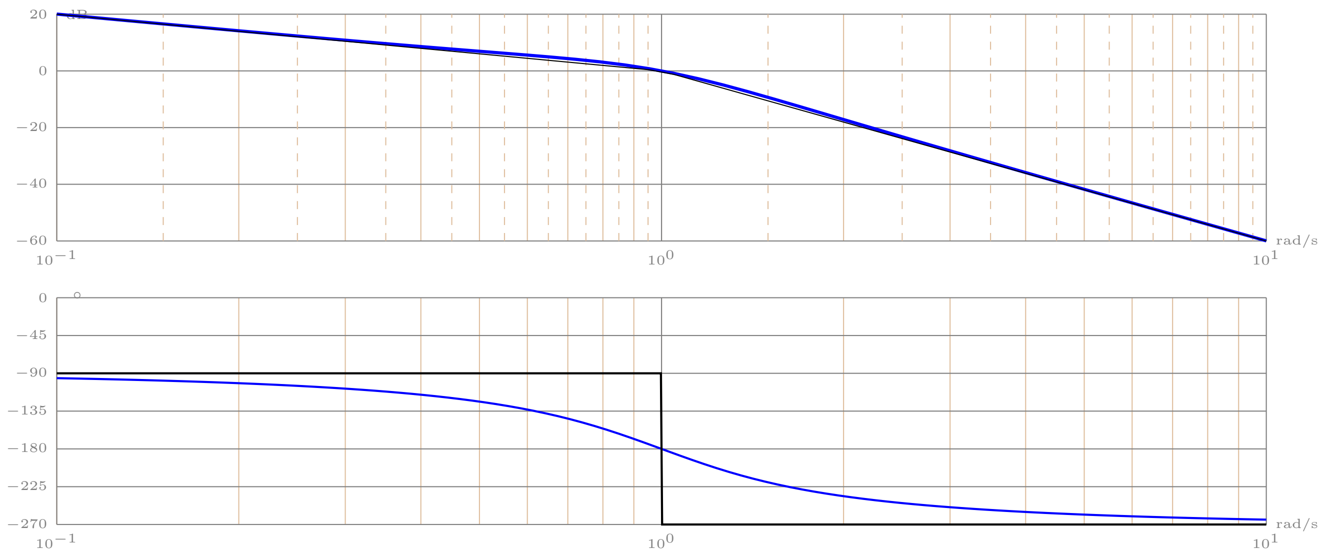

Figura 3: Diagramas de Bode

Y con eso bosquejamos el diagrama de Nyquist en la figura 4

Como el número de polos de $L(s)$ encerrados por la curva Γ es cero, para que el sistema sea estable la curva $L(\Gamma)$ no debe pasar por ni encerrar al -1. Para que esto ocurra debe ocurrir que $\alpha < 1$.

Del diagrama de Bode (o de la simple evaluación) se ve claramente que $L(j\omega)$ se hace real en $\omega = \omega_0$, al evaluar queda:

$$L(j\omega_0) = -\frac{KE}{L} = -\alpha \implies \alpha = \frac{KE}{L} \tag{4}$$

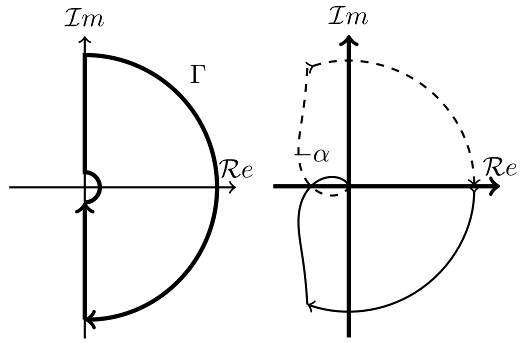

Figura 4: Diagrama de Nyquist

Al imponer $\alpha < 1$ para que el sistema sea estable, debe darse que $K < \frac{L}{E}$.

Por parte a, en estas condiciones se cumple que en régimen la salida sigue a la entrada.

d) En la parte anterior vimos que el punto de corte con el ejer real era $-\frac{KE}{L}$, para el valor de K dado esto queda 1/2 por lo que el margen de ganancia es 2.