Universidad de la República | **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo semestre 2018**

Segundo parcial.

Duración: 3 horas.

Nº. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula	Asiste a teórico

PARA USO DOCENTE

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	**Total**

Ejercicios de Múltiple Opción.

Total: 32 puntos.

8 puntos respuesta correcta, -1.5 puntos respuesta incorrecta.

1. El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

es igual a:

(A) 0. ☐

(B) $\frac{1}{2}$. ☐

(C) -1. ☐

(D) $-\frac{1}{2}$. ☐

2. Sea $f(x,y) = \frac{\log(\frac{x+y}{2})}{y^2}$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(1,1)$ es:

(A) $\frac{1}{8}(x^2 - 10xy - 9y^2 + 4x + 4y)$. ☐

(B) $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{5}{2}(x-1)(y-1) - \frac{9}{4}(y-1)^2$. ☐

(C) $\frac{1}{8}(-x^2 - 10xy - 9y^2 + 16x + 32y - 28)$. ☐

(D) $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{8}(x-1)(y-1) - \frac{9}{8}(y-1)^2$. ☐

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) f no es diferenciable en $(0,0)$, pero existen las derivadas parciales en un entorno de $(0,0)$. ☐

(B) f no es diferenciable en $(0,0)$, pero sus derivadas parciales son continuas en un entorno de $(0,0)$. ☐

(C) f no es diferenciable en $(0,0)$ pero existen todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$. ☐

(D) f es diferenciable en $(0,0)$, pero sus derivadas parciales no son continuas en un entorno de $(0,0)$. ☐

4. Se considera el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4,\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ y \leq x,\ y \geq 0\}$, entonces el área de D es igual a:

(A) $\frac{\pi}{3}$. ☐

(B) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. ☐

(C) $\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\pi$. ☐

(D) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\pi$. ☐

Recordar que: $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1,\ \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3},\ \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ejercicios de Desarrollo

Total: 28 puntos.

Ejercicio 5: 18 puntos. Ejercicio 6: 10 puntos.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto (x_0, y_0). Probar que:

1. f es continua en (x_0, y_0).
2. existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
3. si $v = (v_1, v_2)$ entonces $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_2$.

6. Sea $R > 0$ fijo, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ z \geq 0\}$. Calcular el volumen de D.