Práctico 19

1. Polinomio de Taylor

Guia : 1,3, 4, 8 y 11.

1. Primer parcial, 2007, MO

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$ y $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\log(2)}{2}\right) x$.

   Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un polinomio de segundo grado que cumple:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q(x) - P(x)}{x^2} = 0$$

   Indique la opción correcta:

   a) $P(x) = 1 + \log(2)x + \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^2 x^2$.
   b) $P(x) = \frac{1}{2}(1 + \log(2)x + (\log(2))^2 x^2)$.
   c) $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
   d) $P(x) = \frac{1}{2} + (\log(2))x + \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^2 x^2$
   e) No existe ningún polinomio que cumpla lo pedido.

2. El polinomio de Mc Laurin de orden 4 asociado a una cierta función f es $3 - 5x + 4x^2 - x^3 - 2x^4$. Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$.

3. Primer parcial, primer semestre 2012, ejercicio 3

   Concidere la función $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$

   a) Encontrar el polinomio de Mac Laurin de orden 5 de f.
   b) Analiza si f presenta extremo relativo en $x = 0$.
   c) Calcular el límite
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \frac{x^3}{3}}{x^5}$$

4. Hallar el desarrollo de Mc Laurin de orden n de las siguientes funciones:

   $$a)\ \frac{1}{2-x} \qquad b)\ \frac{1}{a-x} \qquad c)\ \log(1-x) \qquad d)\ \frac{1}{x^2-2x+1}$$

   $$e)\ e^x - \cos(x) \qquad f)\ \operatorname{sen}(x)\cos(x) \qquad g)\ \operatorname{sen}^2(x) \qquad h)\ \sqrt{1-x}$$

5. Calcular $P_n(f, 0)$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Sugerencia existen $a,\ b \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.

   Calcular el $P_n(f, 0)$ para la función $f(x) = \log(\frac{1+x}{1-x})$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio definido por $f(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n$.

   Calcular $P_n(f,0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $P_n(f,1) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-1)^k$.

   Se verifican las igualdades $\alpha_k = a_k = b_k$ para $k \leq n$? En caso negativo, se verifica alguna?

   Verificar que $P_n(f,0)$ es mantener solo los términos de orden menor igual a n. Es lo mismo para $P_n(f,1)$, es decir $P_n(f,1) = P_n(f,0)$?

   Probar que si $n \geq N$ entonces $f = P_n(f,0) = P_n(f,1) = P_n(f,a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$

7. Sea $f(x) = a^x$ con $a > 0$. Probar que $P_n(f,0) = \sum \frac{\log(a)^k}{k!} x^k$

8. Calcular los siguientes límites:

   $a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$ $\quad b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x^3}$ $\quad c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^\alpha},\ \alpha > 0$

   $d)$ $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $\quad e)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{x^2}$ $\quad f)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ $\quad g)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$

   $h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2 + \operatorname{sen} x - 2x}{1 - \cos x - x^2/2}$ $\quad i)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x - x^2/2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable, y a un punto critico de f. Determinar si en a se da un extremo local, máximo o mínimo, o no, en función de su polinomio de Taylor en a

10. ¿Cuál es el comportamiento local de $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ alrededor de 0? Bosquejar la gráfica de f en algún entorno de 0.

11. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \frac{x^3}{6}$

    (a) Encontrar el polinomio de Mc Laurin de orden 4 de f.

    (b) Analizar si f presenta un máximo o un mínimo relativo en 0.

    (c) Calcular, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$

12. Sea f de clase C^3 tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) = 4$

    (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en 0.

    (b) Si $a_n = f(1/n)$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$, hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

13. $a)$ Demuestre que si existe $f''(a)$ entonces

    $$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

    Este limite se denomina segunda derivada de Schwarz de f en a.

    $b)$ Sea $f(n) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ demuestre que la segunda derivada de Schwarz existe en 0 pero $f''(0)$ no existe

    $c)$ Demuestre que si f tiene un maximo local en a y la segunda derivada de Schwarz existe entonces esta es menor o igual a 0.

    $d)$ Demuestre que si existe $f'''(a)$ existe entonces

    $$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)}{h^3}$$

14. Sean f y g dos funciones n veces derivables, notemos $P_n(f,0)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $P_n(g,0)=\sum_{k=0}^n b_k x^k$.

   a) Calcular el polinomio $P_n(f+g,0)$ en funcion de a_k y b_k

   b) Calcular el polinomio $P_n(fg,0)$ en funcion de a_k y b_k

   c) Suponga que $f(0)=0$. Calcular el polinomio $P_n(g\circ f,0)$ en funcion de a_k y b_k

   d) Calcular los siguientes polinomios de Taylor

   $$a)\quad P_{1000}\left(x^{500}e^{x^2},0\right)\qquad b)\quad P_{10^{1000}}\left(\sin(x^5),0\right)\qquad c)\quad P_{1000}((\cos(x^2),0)$$

   $$d)\quad P_{10000}(x^{10}\sin(x^2),0)\qquad e)\quad P_{9000}(\log(1+x^3),0)\qquad f)\quad P_{20}(e^{\sin(x)^2},0)\qquad g)\quad P_{20}(\log(\sin(x)+1),0)$$

   e) Sea f una función n veces derivable y $P_n(f,0)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ su polinomio de Taylor de grado n en 0. Calcular $P_{n-k}(f^{(k)},0)$ en función de los terminos a_k

2. Estimaciones

Guia: 1,3 y 5

1. Encontrar la expresión de Lagrange del resto de orden n correspondiente a la función $\log(1+x)$. Usando el desarrollo de Mc Laurin de $\log(1+x)$, calcular $\log(1,5)$ con error menor que $0,001$. Comparar este resultado con el valor para $\log(1,5)$ que da la calculadora. Volver a hacer el ejercicio con error menor que $0,0001$.

2. Primer parcial, segundo semestre 2015, MO

   Concideremos la función $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ derivable 3 veces en todo el intervalo. Sabiendo qoe $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=10$ y $f(10)=100$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones se deduce del Teorema del resto de Lagrange?

   a) Existe $c\in(0,10)$ tal que $f'''(c)=0$.

   b) Existe $c\in(0,10)$ tal que $f'''(c)=-2400$.

   c) Existe $c\in(0,10)$ tal que $f'''(c)$ es mayor que 10.

   d) Existe $c\in(0,10)$ tal que $f'''(c)$ es menor que -10.

   e) Existe $c\in(0,10)$ tal que $f'''(c)=0$.

3. Encontrar la expresión de Lagrange del resto de orden 8 correspondiente a la función $\operatorname{sen} x$. Usando el desarrollo de Mc Laurin de orden 8 calcular un valor aproximado de sen 1 y demostrar que el error cometido es menor que $3\cdot 10^{-6}=0,000003$.

4. Hallar $e^{0,1}$, sen(0,2) y cos(0,2) con errores menores que 0,001.

5. Sea $f(x)=6\operatorname{senh}(x)+3x^2-4x+5$

   a) Hallar $P_3(f,0)(x)$ y la expresión de $r_3(x)$ (el resto de Lagrange).

   b) Deducir que $0\le f(x)-P_3(f,0)(x)\le\frac{3}{8}$ en el intervalo $[0,1]$.

3. Modelos

1. La resistividad ρ de un cable conductor es inversa a la conductividad y se mide en ohm metros $(\Omega - m)$. La resistividad de un metal depende de la temperatura de acuerdo a la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura medida en $^\circ C$

Hay tablas para los valores de α y ρ_{20}, la resistividad a $20^\circ C$.

Excepto para valores de temperatura muy bajas, la resistividad varia similar a la lineal con la temperatura, por tanto es común usar la expresión lineal o cuadrática del polinomio de Taylor en $t = 20$.

   a) Determina la expresiones de aproximación lineal y cuadrática

   b) Para el cobre $\alpha = 0{,}0039/^\circ C$ y $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}\Omega - m$. Grafica la resistividad del cobre y la aproximación lineal y cuadrática para $x \in [-250, 1000]$ (Usar un software para graficar)

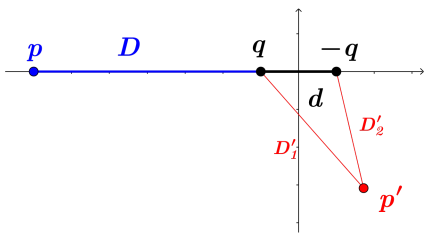
   c) Para que valores de t la aproximación lineal coincide con la receptividad a menos de $1\,\%$ (usar un software para calcularlo)

2. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas de igual magnitud y signo opuesto, Si las cargas son q, $-q$ y están a distancia d, el campo eléctrico E en el punto p de la figura es

$$E(D) = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

y la formula general, para un punto p' es

$$E(p') = \frac{q}{(D_1')^2} - \frac{q}{(D_2')^2}$$

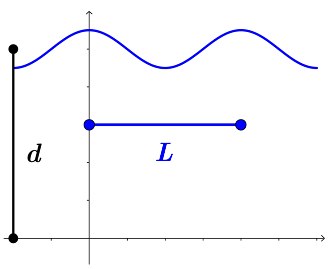


Determinar que puntos del plano el campo es 0.

Para puntos sobre el eje x expandiendo la expresión de E en serie de potencias de d/D, mostrar que E es aproximadamente $1/D^3$ cuando P esta lejos del dipolo.

3. Si una ola de largo L se mueve con velocidad v atravez de un cuerpo de agua con profundidad d entonces

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$



a) Si el agua es profunda, mostrar que $v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

b) Si el agua es superficial mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$

c) Use La expansión en series de potencias para verificar que si $L > 10d$ entonces la estimación $v^2 \approx gd$ tiene una precisión de al menos $0{,}014gL$

4. Complementarios

1. Suponga que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es dos veces derivable y que existen $M_0,\ M_2$ tal que $\mid f(x) \mid \leq M_0$ y $\mid f''(x) \mid \leq M_2$.

   a) Utilize el Polionomio de Taylor apropiado para demostrar que

   $$\mid f'(x) \mid \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2 \qquad \forall h > 0$$

   b) Demuestre que $\mid f'(x) \mid \leq 2\sqrt{M_0M_2}$. Surgerencia: considere el menor valor de la expresión que aparece en a)

2. a) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Si f'' esta acotada y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

   b) Si existen los limites $\lim_{xto+\infty} f(x)$ y $\lim_{xto+\infty} f''(x)$ entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$

3. Sea f una funcion tal que $f(a) = 0$ y $P_n(f, a) \neq 0$ para algun n. Calcular el limite $lim_{x\to a} \frac{f(x)}{f'(x)}$