Práctico 17

1. Teorema fundamental

LISTA: 1,2, 6, 7, 8, 10 y 11

1. Justificar la derivabilidad y calcular la derivada:

$$a)\quad \int_0^x \sin^2(t)dt \qquad b)\quad \int_x^1 \log(t)\ dt \quad x \geq 0 \qquad .$$

$$c)\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}\ dt \qquad d)\quad \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt, \qquad e)\quad \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

$$f)\quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{3+\sin(t)}\ dt \qquad g)\quad G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\ dt \qquad h)\quad H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4}\ dt$$

2. *a*) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para

$$a)\quad f(x) = \int_0^x 1+\sin(\sin(t))\ dt \qquad b)\quad f(x) = \int_1^x \cos(\cos(t))\ dt$$

3. Halle una función g tal que

$$a)\quad \int_0^x g(t)t\ dt = x + x^2 \qquad b)\quad \int_0^{x^2} g(t)t\ dt = x + x^2$$

$$c)\quad \int_0^x g(t)t\ dt = x + x^2 \qquad d)\quad \int_0^{x^2} g(t)t\ dt = x + x^2$$

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que
   a) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(b)) - \log(f(a))$
   b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt = \sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}$
   c) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b) - f^2(b)$
   d) Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\ dt \qquad b)\quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}\ dx \qquad c)\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)}}\ dt \qquad d)\quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^{2n}+1}}$$

$$e)\quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\ dx \qquad f)\quad \int_a^b \cos(x)\sin(x)\ dx \qquad g)\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2(x)}{a+b\tan(x)}\ dx$$

5. Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$
   a) Expresar $A(t)$ (no calcularla).

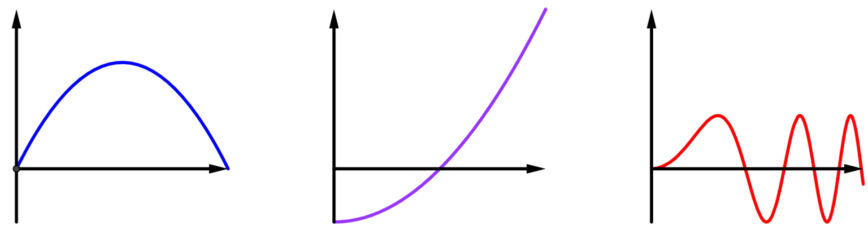
b) Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

6. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

   a) Calcular la recta tangente en 0.

   b) Determinar una aproximación de$F(0{,}5)$.

7. Para las siguientes funciones bosquejar las funciones $F(x) = \int_0^x f(t)dt$



8. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

$$a)\quad f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt \qquad b)\quad f_2(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt \qquad c)\quad f_3(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$$

$$d)\quad f_4(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt \qquad e)\quad f_5(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$$

9. Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a)\quad \int_c^x f(t)\, dt = 2 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad b)\quad \int_1^x f(t)dt = \log(x^2 + 2x + 2) - c$$

$$c)\quad \int_c^x f(t)dt = (x-1)^4 \qquad d)\quad \int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$$

10. Consideremos la función $y = F(x)$ definida por la fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{\log(3) - s^2} ds.$$

Sea $g = F^{-1}$. Calcular la derivada de g en $y = 0$.
Observación: La integral que aparece en este ejercicio no admite una expresión elemental, por lo que no es posible hallar una fórmula para g.

11. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\, dt$

   a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.

   b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.