Herramientas para el diseño y análisis de redes de transporte urbano de pasajeros

Tema 8: Modelos avanzados

Aspectos avanzados en el modelado de redes de transporte

Considerar el modelo general de múltiples mercancías con costos lineales:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a x_{ak} + \sum_{a \in A} f_a y_a & \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} & \forall\, n \in N, k \in K, \\
& x_{ak} \leq R_k y_a & \forall\, a \in A, k \in K, \\
& x_{ak} \geq 0 & \forall\, a \in A, k \in K, \\
& y_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A.
\end{aligned}
$$

Aspectos avanzados en el modelado de redes de transporte

1. La función objetivo modela intereses contrapuestos, con una ponderación arbitraria.

2. En la versión que optimiza solamente costos fijos, los flujos de mercancías no son consistentes con las hipótesis de comportamiento de pasajeros en redes de transporte urbano (trayectorias a través del camino de menor costo en la red).

Para abordar el primer aspecto se recurre a conceptos de *optimización multiobjetivo* y para abordar el segundo se utiliza el enfoque de *optimización multinivel*.

Optimización multiobjetivo

- Optimización: hacer una tarea de la "mejor forma posible", respecto a un único criterio, p.e. minimización de costos o maximización de beneficios.
- En algunos casos es imposible resumir en un único objetivo, diferentes opiniones, motivaciones y metas encontradas en un proceso de decisión donde hay intereses en conflicto.
- Imposible arribar a una solución "ideal", es decir, aquella que optimiza cada objetivo en forma individual.
- Optimización multiobjetivo: diferentes funciones objetivo, parcialmente contradictorias y a veces expresadas en unidades diferentes.

Optimización multiobjetivo: formulación general

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(x), \ldots f_p(x)] \\ \text{s.a.} \quad & x \in X \end{aligned}$$

- Espacio de decisiones: X
- Espacio de objetivos (o de criterios): $\mathbb{R}^p$
- Optimalidad en multiobjetivo: eficiencia.

Nociones de optimalidad

Interpretaciones de “mínimo” en el contexto multiobjetivo:

Pareto Cualquier x que no es eficiente no puede representar una alternativa más preferida por el decisor, porque existe al menos otra solución factible $x' \in X$ tal que $f_k(x') \leq f_k(x)$ para todo $k = 1, \ldots p$, con desigualdad estricta para al menos un k.

Orden lexicográfico Ranking de objetivos, algunos tienen preferencia sobre otros. Por ejemplo, para dos objetivos podríamos querer resolver el problema $\mathrm{lexmin}_{x \in X}[f_1(x), f_2(x)]$

Minmax Minimizar el peor objetivo. Por ejemplo, para dos objetivos podríamos querer resolver el problema $\mathrm{minmax}_{x \in X, i=1,2} f_i(x)$

Optimización de Pareto: definiciones y terminología

- (Para minimización) $x^* \in X$ es eficiente (o Pareto optimal) si no existe otra $x \in X$ tal que $f(x) \preceq f(x^*)$.

- $f(x') \preceq f(x)$ si $f_k(x') \leq f_k(x) \forall k \in 1..p$ y $\exists j$ tal que $f_j(x') < f_j(x)$.

- Si x^* es eficiente entonces $f(x^*)$ es un punto no dominado.

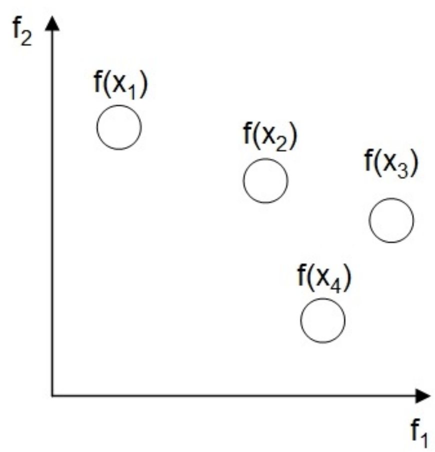
- Si x_1,$x_2 \in X$ cumplen $f(x_1) \preceq f(x_2)$ entonces se dice que x_1 domina a x_2 (espacio de decisiones) y $f(x_1)$ domina a $f(x_2)$ (espacio de objetivos).

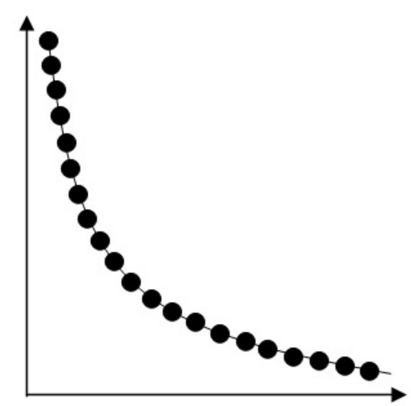
- Subconjunto de las soluciones eficientes de X: conjunto eficiente X_E.

- Conjunto de los puntos no dominados $y^* = f(x^*) \in \mathbb{R}^p$, donde $x^* \in X_E$: conjunto no dominado (o frente de Pareto).

Optimización de Pareto: ejemplo

- Problema de minimización en dos objetivos: f_1 y f_2.
- Conjunto eficiente $\{x_1, x_2, x_4\}$; conjunto no dominado: $\{f(x_1), f(x_2), f(x_4)\}$.
- Se dice que x_4 domina a x_3 y que x_1, x_2, x_4 son no dominados.





Optimización de Pareto: enfoques para llegar a una solución única

Se requiere información adicional proporcionada por el decisor. Diferentes modos:

A priori Calibrar un conjunto de ponderadores $\lambda_k, k \in 1..p$ y resolver un problema de objetivo único optimizando $\sum_{k=1..p} \lambda_k f_k(x)$. Los ponderadores representan la importancia relativa entre los diferentes objetivos y eventualmente también convierten las unidades.

A posteriori Se calculan todas las soluciones de X_E y luego se selecciona una.

Interactivo Se alternan etapas de optimización con etapas de introducción de información proporcionada por el decisor.

Cálculo de soluciones no dominadas: suma ponderada

- Toda solución de X_E puede encontrarse con una combinación de ponderadores positivos λ_k (normalizados o no).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1..p} \lambda_k f_k(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in X \end{aligned}$$

- Pero lo anterior requiere además que X sea un conjunto convexo y que f_k sean funciones convexas.

- Para problemas discretos, hay soluciones en X_E que no pueden encontrarse mediante suma ponderada (soluciones no soportadas).

Cálculo de soluciones no dominadas: ϵ-restricción

- Se optimiza un objetivo y todos los otros son transformados en restricicones.

- Variando los lados derechos de las restricciones se obtienen las diferentes soluciones no dominadas de X_E.

- No tiene la limitación del método de suma ponderada (encuentra soluciones no soportadas).

$$
\begin{array}{rl}
\min & f_j(x) \\
\text{s.a.} & f_k(x) \leq \epsilon_k, k = 1, \ldots p, k \neq j, \\
 & x \in X
\end{array}
$$

Optimización multinivel

Permite modelar escenarios con las siguientes características (caso específico de dos niveles):

- Las decisiones son tomadas por dos agentes diferentes, que constituyen una jerarquía.
- Cada agente tiene su propia función objetivo y restricciones; puede controlar directamente solo ciertas variables.
- El agente del nivel superior de la jerarquía debe tomar decisiones que: (a) restringen las decisiones del agente del nivel inferior y (b) deben anticiparse a la reacción del nivel inferior.

Optimización binivel: formulación general

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & F(x,y) \\
\text{s.a.} \quad & G(x,y) \leq 0, \\
& y \in \operatorname{argmin}_{y'} f(x,y'), \\
& \text{s.a.} \quad g(x,y') \leq 0.
\end{aligned}
$$

- x (y) son las variables controladas por el nivel superior (inferior).
- F (f) es la función objetivo del nivel superior (inferior).
- G (g) son las restricciones del nivel superior (inferior).

Optimización binivel: formulación general

- El nivel inferior optimiza las variables y' para valores fijos de x.
- La solución óptima y del nivel inferior es un valor fijo para el nivel superior.
- El siguiente problema es una relajación del original:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & F(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & G(x,y) \leq 0, \\ & g(x,y') \leq 0. \end{aligned}$$

Optimización binivel: clasificación

Para funciones objetivo y restricciones lineales, se distinguen los siguientes casos:

- BLPP: ambos niveles tienen solo variables continuas.
- DCLB: variables discretas en el nivel superior y solo continuas en el inferior.
- DLB: variables discretas en ambos niveles.
- CDLB: solo variables continuas en el nivel superior y discretas en el inferior.

Optimización binivel: complejidad y resolución computacional

- El caso más sencillo (BLPP) es de alta complejidad computacional (NP-difícil).
- Resolución, un enfoque posible: cuando el nivel inferior solo tiene variables continuas, puede sustituirse el problema de optimización por sus condiciones de optimalidad (Karush-Kuhn-Tucker).
- Para el caso lineal, las condiciones de optimalidad pueden ser expresadas mediante las restricciones de los problemas primal y dual, y las condiciones de holgura complementaria.

Ejemplo

- Diseño de una red de transporte optimizando costos variables específicos.

- La función objetivo minimiza costos variables (que percibe toda la sociedad) que dependen de los flujos.

- Los flujos se determinan mediante otros costos variables, que utilizan los usuarios para determinar sus caminos más cortos.

- Los costos fijos pueden estar o no limitados por un presupuesto.

Ejemplo: problema y formulación

Problema de diseño de redes de transporte de sustancias peligrosas[1]

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} \bar{c}_a x_{ak} & \\
\text{s.a.} \quad & y_a \in \{0,1\} & \forall\, a \in A, \\
& x \in \operatorname{argmin}_{x'} \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a x'_{ak}, & \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_n^+} x'_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} x'_{ak} = \theta_{nk} & \forall\, n \in N, k \in K, \\
& x'_{ak} \leq R_k y_a & \forall\, a \in A, k \in K, \\
& x'_{ak} \geq 0 & \forall\, a \in A, k \in K.
\end{aligned}
$$

[1] Kara, BY; Verter, V (2004) Designing a road network for hazardous materials transportation. Transportation Science 38(2):188-196.

Ejemplo: problema y formulación

- El nivel superior representa al planificador, decide en cuales arcos de la red se restringe la circulación de vehículos con materiales peligrosos (variable y, toma el valor 0 si se restringe).
- Optimiza un costo variable $\bar{c_a}$ que multiplica al flujo x; costo de exposición experimentado por la sociedad, para un arco a es proporcional a la cantidad de habitantes cercanos al arco.
- Los usuarios (conductores de los vehículos que transportan los materiales) determinan los flujos x' según los costos c_a (distancia del arco a).
- Sujetos a las decisiones y de qué arcos están abiertos.
- El nivel superior condiciona al inferior a través de la variable y; el nivel inferior retroalimenta al superior a través de la variable x.

Ejemplo: reformulación

- El nivel inferior tiene solamente variables continuas, por lo tanto puede sustituirse por sus condiciones de optimalidad.
- En este caso están dadas por las restricciones de los problemas primal y dual del nivel inferior y sus condiciones de holgura complementaria.
- Estas últimas resultan en expresiones no lineales de la forma $xy = 0$, que pueden sustituirse por las expresiones $x \leq Mz$ e $y \leq (1-z)M$, donde z es una variable binaria y M es una constante de valor suficientemente alto[2].

[2] Fortuny-Amat, J; McCarl, B (1981) A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. Journal of the Operational Research Society 32:783-792.

Resumen

- Optimización multiobjetivo y multinivel modelan situaciones diferentes.
- La primera asume (en su versión de Pareto) que no hay preferencias entre los diferentes objetivos. Todos los objetivos comparten las mismas restricciones.
- La segunda asume una jerarquía de decisores, cada uno con su objetivo y restricciones particulares.
- En problemas de diseño de redes de transporte urbano, frecuentemente aparecen las dos características en un mismo modelo.
- Si bien hay métodos generales para abordar cada uno de estos aspectos, cada problema específico puede admitir abordajes más eficientes.

Bibliografía

- Bard, JF (1998) Practical Bilevel Optimization. Kluwer.
- Bertsimas, D; Tsitsiklis, JN (1997) Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific.
- Colson, B; Marcotte, P; Savard, NE (2007) An overview of bilevel optimization. Annals of Operations Research 153:235-256.
- Ehrgott, M (2005) Multicriteria Optimization. Springer.
- Ehrgott, M; Gandibleux, X (2002) Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys. Kluwer.

- Vicente, L; Savard, G; Judice, J (1996) Discrete Linear Bilevel Programming Problem. Journal of Optimization Theory and Applications 89(3):597-614.

- Notas del docente del curso.