

Práctico 16

1. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

EJERCICIOS : 1, 2, 6, 7, 10, 12 y 14.

1. Demuestre que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b .

2. Demuestre que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exactamente dos raíces reales.

3. Primer parcial, segundo semestre 2015, MO

Se considera la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{2x} + x^3$. Entonces el valor de $(h^{-1})(1)$ es

$$a) \frac{1}{2} \quad b) \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{3} \quad c) \frac{1}{2e^2 + 3} \quad d) \frac{1}{e^2 + 1} \quad e) 1$$

4. Primer parcial, 2007, MO Sea $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2 - \log(3)]$ tal que $f(x) = x - \log(1 + x)$. Indicar la opción correcta

a) f no es invertible.

b) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = 2$

c) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{2 - \log(2)}{1 - \log(2)}$

d) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{1 - \log(2)}{2 - \log(2)}$

e) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{1}{2}$

5. Primer parcial, segundo semestre 2013, Desarrollo

2. Probar que la ecuación $x^2 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) = \log(x)$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $(1, 2)$.

3. Sea $g(x)$ la función inversa de la función $f(x) = \frac{x^2}{4} - x^2 + \log(x)$ para $x > 0$. Calcular si existe la derivada de g en el punto $f(1)$, esto es $g'(f(1))$. Justificar.

6. Examen, agosto 2013, MO

Se considera la función $f : (0, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log|2x^3 - 3x|$. Sea $I \subset (0, \frac{3}{2})$ el mayor intervalo abierto posible tal que f es invertible en I y f^{-1} es decreciente. Entonces:

$$a) I = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right) \text{ y } (f^{-1})'(0) = -1 \quad b) I = \left(0, \frac{3}{2} \right) \text{ y } (f^{-1})'(0) = -1 \quad c) I = \left(0, \frac{3}{4} \right) \text{ y } (f^{-1})'(0) = -1$$

$$d) I = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right) \text{ y } (f^{-1})'(0) = 0 \quad e) I = \left(0, \frac{3}{4} \right) \text{ y } (f^{-1})'(0) = 1$$

7. Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

$$a) f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1 \text{ en } [-2, 2] \quad b) f(x) = x^5 + x + 1 \text{ en } [-1, 1]$$

$$c) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \text{ en } \left[-1, \frac{1}{2} \right] \quad d) f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ en } [0, 5]$$

$$e) f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x+a|}, \quad a > 0, \text{ en } \mathbb{R}$$

8. Probar las siguientes desigualdades

- a) Para todo $x > 0$, $\frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$
- b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin(\alpha x) - \sin(\alpha y)| \leq |\alpha| |x - y|$
- c) Para $0 < a < 1$, se verifica que $(1+x)^a \leq 1+ax$, $\forall x \leq 1$

9.

- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)| : \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Probar que si n es par existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

10. Determinar si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienen máximo y mínimo y en caso de existencia determinarlos.

$$a) f(x) = 2x + 1 \quad b) f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad c) f(x) = e^{-x^2}$$

11. a) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

- 1) Probar que $\max(f+g) \leq \max(f) + \max(g)$ y $\min(f+g) \geq \min(f) + \min(g)$.
- 2) Dar desigualdades similares para $\min(f-g)$ y $\max(f-g)$
- 3) Dar desigualdades similares para el caso de fg .
- 4) Probar que en caso de existir el máximo de $f \circ g$, se verifica que $\max(f \circ g) \leq \max(f)$
- 5) Dar ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

12. a) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = s$, el valor $x^2 + y^2$ es máximo cuando $x = y$.

b) Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

c) Examen, febrero 2017, MO Sea ε la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$. Se considera un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos vértices pertenecen a ε . ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectángulo?

$$a) 4 \quad b) 4\sqrt{2} \quad c) 0 \quad d) 8\sqrt{2} \quad e) 16$$

13. Examen, diciembre 2016, VF

Sean f, g funciones reales continuas en $[a, b]$ derivables en (a, b) y tales que $f(a) \neq f(b)$ y $g(a) \neq g(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f'(c)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(c)}{g(b)-g(a)}$

14. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada positiva en $x = 0$, pero no es creciente en ningún intervalo que contenga a $x = 0$ (tiene intervalos tan cercanos a $x = 0$ como se quiera en que su derivada es negativa, y por lo tanto, en esos intervalos es decreciente).

2. Aplicaciones

EJERCICIOS: 1, 2, 3, 6 y 10.

1. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

2. Examen 2015, diciembre, MO

Un maestro propone hacer una papelerera cilíndrica y pintarla (la parte lateral más la base). La cantidad de pintura que se dispone alcanza para pintar un metro cuadrado. Utilizando toda la pintura disponible, ¿cuál es el volumen máximo (en metros cúbicos) que puede tener la papelerera?

Recordar que si un cilindro tiene altura h y una base de radio r , el área lateral es de $2\pi rh$ el área de la base es πr^2 . Indicar la opción correcta.

a) $\frac{1}{(\sqrt{3})^3}$ b) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ c) $\frac{1}{3\sqrt{3}\pi}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) π

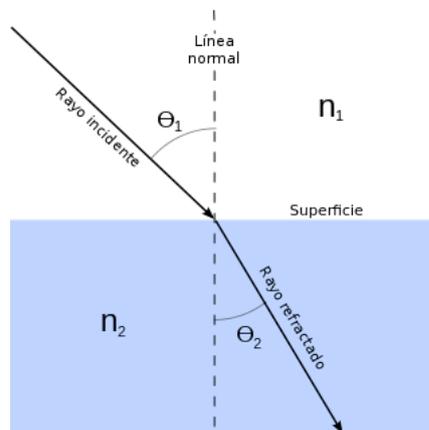
3. Anaís una constructura decide realizar una ventana con forma de rectángulo coronada con un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en el rectángulo y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal de color deja pasar la mitad luz (por unidad de superficie) que el blanco. Calcule las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un Perímetro constante dado. Repita el ejercicio para Área constante.

4. Refracción de la luz

La rapidez con que viaja la luz depende de el medio en el que se propague

Medio	Vacio	Aire	Agua (a 20°)	Alcohol etílico	Cuarzo
Velocidad (m/s) Aprox	299,792,458	299,705,543	224,844,349	220,435,631	194,166,099

Suponga que un rayo de luz viaja desde el punto A hasta el B a través de distintos medios. La trayectoria de un rayo de luz es siempre de forma de minimizar el tiempo de viaje. Para obtener esto hay un quiebre en la dirección del ángulo, como muestra la figura.



A el ángulo θ_1 se lo llama ángulo de incidencia mientras que al ángulo θ_2 se lo llama ángulo de refracción

a) Suponga que tiene en el plano dos medios, Aire en los puntos con coordenada y positiva y Agua en los puntos con coordenada y negativa

Para los casos a) $A = (0, 5), B = (0, -3)$ b) $A = (0, 1), B = (1, -1)$ c) $A = (0, 2), B = (2, 3)$ Calcular los ángulos de refracción e incidencia.

b) Probar que si c_1 y c_2 son las velocidades de la luz en los medios 1 y 2 respectivamente se tiene la Ley de Snell, esto es

$$\frac{\sin(\theta_1)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{c_2} \quad (1)$$

5. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta es rastreado por un observador a 150 metros. En el momento en que el ángulo de observación del observador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo crece a razón de 0,14 rad/min. Qué tan rápido se esta elevando el globo en ese momento? Figura
6. El gasto cardíaco de una persona está dado por la cantidad de sangre bombeada por unidad de tiempo. Gastos aproximados en algunas situaciones

Actividad	Lectura	Reposo	Maraton
Gasto	7 L/m	6 L/m	30 L/m

El gasto cardíaco puede calcularse mediante la formula $y = \frac{Q}{D}$

donde Q es la cantidad de mililitros de CO_2 que se exhala en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (mL/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 en la sangre que regresa a los pulmones.

Suponga que sabemos que $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que D esta decreciendo a una razón de 2 unidades por minutos y que Q permanece sin cambios. Qué esta pasando con el gasto cardiaco? Calcular la razón de variación de y en función de Q y de D

Ejercicio del libro: Calculo Una Variable (undécima edición) George B. Thomas, Jr

7. Se tiene un cubo de hielo de lado s , por tanto $V = s^3$ y su área superficial es de $A = 6s^2$. Suponga que se deja fuera del freezer y por tanto comienza a derretirse, suponga además que mientras se derrite conserva su forma cúbica.

La razón a la que el volumen disminuye es proporcional al área superficial, es decir $\frac{dV}{dt} = -kA$, donde K es una constante positiva. Hay otros factores que actúan en este ejemplo pero no los tendremos en cuenta.

Si se sabe que el cubo pierde un cuarto de su volumen durante la primer hora y que el volumen es V_0 cuando $t = 0$. Cuánto tardará el cubo de hielo en derretirse?

8. Una plataforma petrolífera se encuentra a 20 km de la costa debe ser conectada a una refinería que esta a 32 km en línea recta desde el punto mas cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta \$350 por cada kilometro y en tierra cuesta \$200 por kilometro. Qué combinación de instalación subacuática y terrestre da la conexión mas barata?

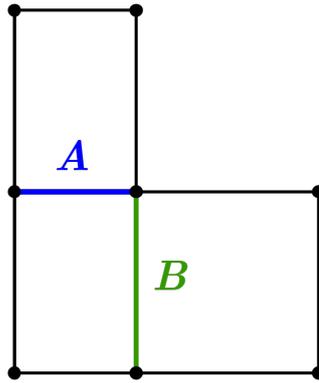
9. Sobre la tos. Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida, pero cuanto debe contraerse la traquea para que esta velocidad sea máxima. Realmente se contrae la traquea cuando tosemos?

Bajo hipótesis razonables acerca de la elasticidad de la pared de la traquea y respecto a como se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio del flujo de aire puede ser modelada por la ecuación

$$v(r) = c(r_0 - r)r^2, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0 \quad (2)$$

donde r_0 es el radio de la traquea en reposo, en centímetros, y c es una constante positiva que depende en parte de la longitud de la traquea.

- a) Calcule el valor r , en función de r_0 donde se da el máximo. Las radiografías confirman que la traquea realmente se contrae a valores cercanos a ese r cuando tosemos.
- b) Tome $r_0 = 0,5$ y $c = 1$, y grafique $v(r)$ en el intervalo $[0; 0,5]$. Cual es el máximo de v en ese intervalo? En que punto o puntos se realiza?
10. Cual es la longitud en metros aproximada de la escalera mas larga que se puede transportar de forma horizontal alrededor de la esquina del corredor que se muestra en la figura con $A = 2m$, $B = 3m$.



Que ocurriría si $A = B = 3m$?

11. En este ejercicio estudiaremos algunos envases cilíndricos.

- Cerveza 473 cm^3 . Dimensiones aproximadas 6.5cm de diámetro, 14.5 cm de altura
- Refresco 354 cm^3 . Dimensiones aproximadas 6.5 cm de diámetro, 11 cm de altura.
- Choclo. Dimensiones aproximadas 7.5 cm de diámetro, 8,5 cm de altura.

a) Calcular la capacidad de la latas de choclos.

b) Calcular las dimensiones óptimas, en cuanto a su superficie, de la lata de Cerveza. en diámetro y altura para que tenga la capacidad de 473 cm^3 . Repetir lo mismo para la lata de Refresco y la de Choclo.

c) ¿Cuál esta, en proporción, mas cerca de la óptima? Realice hipótesis sobre los motivos de estos resultados.

12. Se desea construir un bebedero para caballos como en la figura. El gasto que quiere realizarse esta fijo, es decir l , l' y l'' . Maximizar la capacidad del bebedero en función de θ .

