Práctico Semana 10

1. Recta tangente

Guia de ejercicios: 1 y 4.

1. En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

$$a)\quad f(x)=x^2,\ p=(3,9) \qquad b)\quad \cos(x),\ p=\left(\frac{\pi}{2},0\right) \qquad c)\quad \frac{x}{x^2+1},\ p=(0,0)$$

$$d)\quad f(x)=\sqrt{9+x^2},\ p=(4,5)$$

2. Sea $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ una función derivable en $(-a,a)$. Probar que si $Im(f)$ no es el semi circulo, entonces existe $x_0\in(-a,a)$ tal que la recta tangente a f por x_0 no es perpendicular a la recta por $(0,0)$ y $(x_0,f(x_0))$.

3. Calcular la recta tangente de las elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en un punto (u,v).

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable. Suponga que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que la recta tangente a f por a corta al grafico de f, en al menos otro punto mas, digamos b. Probar que existe $c\neq a$ tal que $f'(c)=f'(a)$.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en a, y $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la ecuación de la recta tangente por a.

   a) Probar r es la mejor aproximación lineal a f en 0, eso es,

   dada otra ecuación lineal $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existe un intervalo (a,b) de 0 donde para todo $x\in(a,b)$ se tiene que
   $$\mid f(x)-r(x)\mid\leq\mid f(x)-q(x)\mid$$
   .

   b) Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=e^x$.

   1) Calcular la recta tangente en $x=0$.
   2) Aproximar usando la recta tangente el valor $e^{0,1}$, $e^{0,01}$, $e^{0,001}$ y $e^{0,0001}$.
   3) Calcular el error cometido por la aproximación.

2. Valor medio y Crecimientos

1,2,4 y 6

1. Probar usando la definición de derivada que si una funcion es monótona creciente y derivable, entonces $f'(x)\geq 0$ para todo x

2. Examen febrero 2017, partes a) y b) del primer ejercicio de desarrollo

   a) Sea $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Demostrar que si $h'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$, entonces la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ es constante.

   b) Deducir que $h_1,h_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tales que $h_1(a)=h_2(a)$ y $h_1'(x)=h_2'(x)$ para todo $x\in(a,b)$, entonces estas dos funciones son iguales.

3. Primer parcial, primer semestre 2016, MO

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$. Sea I el intervalo cerrado de longitud máxima, que contiene al 0, en el cual f es invertible, y sea g la función inversa de f en i

   a) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.
   b) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.
   c) f no es invertible en ningún intervalo que contenga al 0.
   d) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.
   e) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.

4. Las funciones de la figura **??** son las derivadas de las funciones de la figura **??** en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.

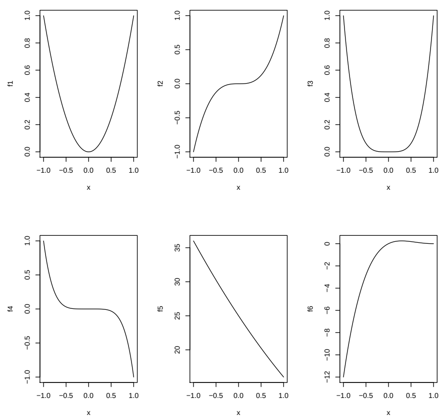

Figura 1: Funciones.

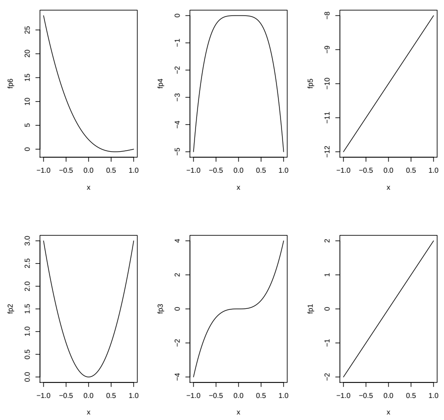

Figura 2: Derivadas.

5. Primer parcial, segundo semestre 2015, MO

   Se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{2x} + x^3$.

Entonces el valor de $(h^{-1})'(1)$ es:

$$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ \frac{1}{2e^2}+\frac{1}{3} \qquad c)\ \frac{1}{2e^2+3} \qquad d)\ \frac{1}{e^2+1} \qquad e)\ 1$$

6. Probar que la ecuación $x^2(\frac{1}{4}x^2 - 1) = \log(x)$ tiene exactamente una solución en el intervalo $(1, 2)$.

7. **Polinomios**

   a) Probar que si un polinomio P de grado n tiene n raices distintas entonces f' tiene $n-1$ raices distintas. Calcular por induccion la cantidad de raices de $f^{(k)}$ para $k < n$.

   b) Suponga que P es un polinomio de grado n tal que $f \geq 0$ (por lo tanto n debe ser par). Demuestre $\sum_{k=1}^{n} f^{(k)} \geq 0$

   c) Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios distintos, es decir existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) \neq Q(x)$.
   Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

   $$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } x \leq 0 \\ Q(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   1) Verificar que para todo $x \neq 0$, existe $f^{(n)}(a)$
   2) Probar que existe un n tal que no existe la derivada n-esima en 0.
   3) Fijo $a \in \mathbb{R}$, repetir las partes anteriores para la función

   $$g(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } x \leq a \\ Q(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$