Ejercicio 2 - Solución

1. $\frac{s+\alpha}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{(s+\zeta\omega_n)+(\alpha-\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} = L[Y(t)e^{-\zeta\omega_n t}[cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\alpha-\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]](s)$

2. Suponiendo el diodo en ON:

$$V(s) = \frac{R//L}{R//L+\frac{1}{Cs}}\frac{V_o}{s} = \frac{s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}V_o = \frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}V_o$$

   Entonces:

$$v(t) = Y(t)[Y(t)e^{-\zeta\omega_n t}[cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]$$

   Respecto a la corriente:

$$Z(s) = R//L+\frac{1}{Cs} = \frac{RLCs^2+Ls+R}{(R+Ls)Cs} \Rightarrow I(s) = \frac{\frac{V_o}{s}}{Z(s)} = \frac{V_o}{R}\frac{s+\frac{1}{2\zeta}\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

   Por lo tanto:

$$i(t) = Y(t)\frac{V_o}{R}e^{-\zeta\omega_n t}[cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\frac{1}{2\zeta}-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]$$

   Con $\zeta < 1$ el circuito tendrá una oscilación amortiguada (ζ nunca podría ser negativo, por su dependencia con R, L y C). Esto significa que, en ausencia de la llave y el diodo, la carga irá desde el condensador hacia la bobina y luego una fracción de esa carga retornará al condensador, debido a la disipación de la resistencia. Este proceso se repetiría cada T segundos.

   Sin importar el valor exacto de ζ, la corriente será positiva en un entorno del instante inicial $t = 0$. Esto puede verse de varias maneras, por un lado, la corriente inicial es suma de la corriente que circula por la bobina $i_L(t)$ y la corriente que circula por la resistencia $i_R(t)$. La corriente inicial en la bobina será igual a su dato previo $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ debido a que la tensión sobre ella es seccionalmente continua (nula para tiempos negativos y V_o al momento de la conmutación). La corriente inicial por la resistencia será $i_R(0^+) = \frac{V_o}{R}$, resultando en una corriente inicial $i(0^+) = \frac{V_o}{R}$ (positiva). Por otro lado, en la expresión temporal obtenida también puede verse que la corriente inicial es la anterior, así como se puede ver con el teorema del valor inicial.

   Esto significa que la corriente por el diodo será positiva inicialmente (lo cual verifica su estado). Como el tiempo que la llave se mantendrá cerrada es T, ocurrirá que el diodo cambiará de estado antes que la apertura de la llave (ya que T es el período de las sinusoides que aparecen en la ley horaria de la corriente). Por lo tanto, existe un tiempo $t_0 < T$ en el que el diodo invierte su estado, pasando a OFF. Este tiempo verifica la ecuación:

$$0 = \frac{V_o}{R} e^{-\zeta\omega_n t_0} [cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_0) + \frac{\frac{1}{2\zeta} - \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_0)]$$

Entre t_0 y T es sencillo ver que el diodo efectivamente se encuentra en OFF, ya que $v_D(t) = v_C(t) - v(t)$. La tensión $v(t)$ tiende exponencialmente a cero del siguiente modo $v(t') = Y(t')v(t = t_0)e^{-\frac{t'}{L/R}}$. Por otro lado, como $C\dot{v_C}(t) = -i(t)$ el tiempo t_0 donde se anula la corriente es cuando se minimiza la tensión del condensador (esta es una tensión negativa). La tensión sobre la resistencia es negativa y tiende a cero, mientras que la del condensador se mantiene constante en la misma tensión inicial que la resistencia. Así, la tensión v_D será negativa.

Desde t_0 la tensión $v(t)$ se comporta como fue comentado en el párrafo anterior, mientras que la corriente será nula (esto será independiente a la conmutación de la llave).

3. Por el teorema de Tellegen, la suma de las potencias instantáneas consumidas por todos los elementos de un circuito será nula, entonces:

$$P_C(t) + P_D(t) + P_S(t) + P_R(t) + P_L(t) = 0$$

como ni la llave ni el diodo disipan potencia, se cumple que:

$$P_C(t) + P_R(t) + P_L(t) = 0$$

4. Con el resultado anterior:

$$W_C^{[0,T]} + W_R^{[0,T]} + W_L^{[0,T]} = 0 = \frac{1}{2}C[v_C(t_0)^2 - V_o^2] + W_R^{[0,T]} + \frac{1}{2}L[i_L(T)^2]$$

Entonces
$$W_R^{[0,T]} = \frac{1}{2}C[V_o^2 - v_C(t_0)^2] - \frac{1}{2}L[i_L(T)^2]$$

Luego de T, el trabajo aplicado a la resistencia no depende de la energía del condensador (ya que no realiza ningún aporte):

$$W_R^{[0,T]} = \frac{1}{2}L[i_L(T)^2]$$