Universidad de la República **Cálculo I Anual**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Práctico 14

Se aceptará la siguiente regla:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \tag{1}$$

1. Cálculos elementales

Guía de ejercicios: 1, 3, 5

1. Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^n$ *b)* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *c)* $\frac{1}{x}$ *d)* $f(x) = \frac{1}{x^n}$ *e)* $f(x) = \sqrt{x}$ *f)* $\cos(x)$

2. Determinar en que puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x + 5|$. En caso de existencia calcular $f'(a)$.

3. Sean $f : I \to \mathbb{R}$ función derivable e I un intervalo abierto.
   - *a)* Probar que si f es invertible, $f(p) = q$ y $f'(p) \neq 0$, entonces la función $h = f^{-1}$ es invertible y ademas $h'(q) = \frac{1}{f'(p)}$
   - *b)* Calcular $(e^x)'$
   - *c)* De un ejemplo de una función f invertible y derivable pero que su inversa no sea derivable.

4. Sea $h : I \to \mathbb{R}$ funcion cualquiera.
   - *a)* Probar que si en a existen las derivadas laterales, esto es,

     $$\lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}, \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

     entonces h es continua en a.
   - *b)* Probar que si las derivadas laterales son iguales entonces h es derivable en a

5. *a)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$.
      1) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0.
      2) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?

   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{h}$.
      1) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0.
      2) Suponiendo que g es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre K y $g'(x_0)$?

2. Cálculo de derivadas

Guía de ejercicios 1 al 6.

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$a)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3} \qquad b)\ \frac{ax+b}{cx+d} \qquad c)\ \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1} \qquad d)\ x\sqrt{1+x^2} \qquad e)\ \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad f)\ \left(\sqrt[5]{x+1}\right)^2$$

$$g)\ \sin^3(x) \qquad h)\ \sin\left(x^3\right) \qquad i)\ \sin(\cos(x)) \qquad j)\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad k)\ \sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \qquad l)\ \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$$

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$a)\ \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad b)\ \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \qquad c)\ \log(\log(\log(x))) \qquad d)\ \frac{1}{x-\frac{2}{x+\sin(x)}} \qquad e)\ \frac{\sin(x^2\sin^2(x))}{1+\sin(x)}$$

$$f)\ e^{\frac{x+\sqrt{x}}{\sin(x+\cos(x))}} \qquad g)\ \sin\left(\frac{e^{\sqrt{x}+\sin(x)}}{\cos(x)}\right) \qquad h)\ \log\left(\sin\left(\frac{e^{\sqrt{x}}+x}{e^x-\sqrt{x}}\right)\right) \qquad i)\ \frac{\sqrt{\sin(x^2)}}{e^{\sqrt{x}}-\sin(\cos(\sqrt{x}))}$$

$$j)\ \frac{\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\sin\left(\log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)\right)} \qquad k)\ \log\left(\sin\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)\right) \qquad l)\ \sin\left(\frac{x}{x-\log\left(\frac{x}{x-e^x}\right)}\right)$$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\ x-\sin(x)\cos(x) \qquad b)\ x\log(x)-x \qquad c)\ \tan(x)$$

4. **Polinomios**
   Sea $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio.
   a) Probar que
   $$P(x)=\left(\int_0^x P(t)\,dt\right)'+P(0)$$
   b) Probar que α es raíz multiple de P si solo si α es raíz de P y P'

5. Calclue $f'\circ f$ y $f\circ f'$ en cada caso

$$a)\ f(x)=\frac{1}{x} \qquad b)\ \sin(x) \qquad c)\ f(x)=x^2 \qquad d)\ f(x)=17 \qquad e)\ f(x)=17x$$

6. Halle f' en función de g' para los siguientes ejemplos

$$a)\ f(x)=g(x+g(a)) \qquad b)\ f(x)=g(xg(a)) \qquad c)\ f(x)=g(x+g(x))$$

$$d)\ f(x)=g(x)(x-a) \qquad e)\ f(x)=g(a)(x-a)$$

$$f)\ \frac{f(x)}{g^2(x)+1} \qquad g)\ \sqrt{f(x)^2+g(x)^2} \qquad h)\ (f(x))^{g(x)},\ \text{Sugerencia: Recordar que } a^b=e^{b\log(a)}$$

$$i)\ f(x+3)=g(x^3) \qquad j)\ f(x^3)=g(x+g(x))$$

7. **Derivaciones**

   Dado $p \in \mathbb{R}$ sea $D_p : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ una transformación lineal no nula tal que $D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g)$ (regla de Leibniz)

   a) Probar que $D_p(1) = 0$. Deducir que $D_p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $D_p(x^2) = 2xD_p(x)$. Probar por inducción que $D_p(x^n) = nx^{n-1}D_p(x)$

8. **Derivada de Schwarz**

   Si f es tres veces derivable y $f' \neq 0$, la derivada de Schwarz de f en x se define mediante

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f''(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

   a) Demuestre que

$$\mathcal{D}(f \circ g) = [\mathcal{D}(f) \circ g](g')^2 + \mathcal{D}g$$

   b) Demuestre que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathcal{D}f = 0$. Deducir que $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$.