Herramientas para el diseño y análisis de redes de transporte urbano de pasajeros

Tema 5: Modelo básico de optimización de redes de transporte urbano

Marco general para diseño de redes de transporte

- Compromiso entre inversión en infraestructura y costos de operación.

- Grafo subyacente dirigido $G = (N, A)$ con conjuntos de nodos N (elementos genéricos i, j) y arcos A (elemento genérico $a = (i, j)$).

- Conjunto K de mercancías (commodities). Para cada $k \in K$, sean O_k y $D_k \in N$ sus nodos origen y destino respectivamente, y R_k la cantidad de mercancía a transportar desde O_k hasta D_k.

- Variable $y_a \in \{0, 1\}$ representa la decisión de habilitar (construir, abrir) el arco $a \in A$.

- Variable $x_{ak} \geq 0$ representa el flujo de mercancía $k \in K$ sobre el arco $a \in A$.

Formulación general sin capacidades

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & & (1)\\
\text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} & \forall\, n \in N, k \in K, \quad & (2)\\
& x_{ak} \leq R_k y_a & \forall\, a \in A, k \in K, \quad & (3)\\
& x_{ak} \geq 0 & \forall\, a \in A, k \in K, \quad & (4)\\
& y_a \in \{0, 1\} & \forall\, a \in A. \quad & (5)
\end{aligned}
$$

- ϕ es una función de los vectores de variables $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- $A_n^+(A_n^-) \subseteq A$ son los arcos salientes (entrantes) del nodo $n \in N$.
- θ_{nk} es igual a R_k si $n = O_k$, igual a $-R_k$ si $n = D_k$ y 0 en otro caso.

Costos lineales

La función objetivo es:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} (c_a x_{ak} + f_a y_a) \tag{6}$$

- Costo variable c_a: es percibido por cada unidad de mercancía (de K) que atraviesa el arco $a \in A$.
- Costo fijo f_a: es percibido una única vez, por efecto de habilitar el arco $a \in A$.
- Ambos costos no necesariamente están expresados en las mismas unidades y mismo horizonte temporal.

Submodelo implícito de ruteo de mercancías

- Considerar el modelo (1)-(5) con la función objetivo (6).
- Para valores fijos de **y** se obtienen $|K|$ problemas independientes de camino de menor costo en el grafo G.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{a\in A} c_a x_{ak} + cte & \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{a\in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a\in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} & \forall\; n \in N, k \in K, \\
 & x_{ak} \leq 0 \;\text{ o }\; x_{ak} \leq R_k & \forall\; a \in A, k \in K, \\
 & x_{ak} \geq 0 & \forall\; a \in A, k \in K.
\end{array}
$$

Optimizar solo costos variables

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k\in K}\sum_{a\in A} c_a x_{ak} && \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{a\in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a\in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} && \forall\, n \in N, k \in K, \\
& \sum_{a\in A} f_a y_a \le B, && \\
& x_{ak} \le R_k y_a && \forall\, a \in A, k \in K, \\
& x_{ak} \ge 0 && \forall\, a \in A, k \in K, \\
& y_a \in \{0,1\} && \forall\, a \in A.
\end{aligned}
$$

Optimizar solo costos variables (cont.)

- Los costos fijos incurridos se deben limitar mediante una restricción de presupuesto con parámetro B.

- En la solución óptima puede haber arcos habilitados (hay presupuesto suficiente) que no son utilizados por ninguna mercancía (no forman parte de los caminos más cortos).

Optimizar solo costos fijos

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a \in A} f_a y_a \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} && \forall\; n \in N, k \in K, \\
& \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a x_{ak} \leq B, \\
& x_{ak} \leq R_k y_a && \forall\; a \in A, k \in K, \\
& x_{ak} \geq 0 && \forall\; a \in A, k \in K, \\
& y_a \in \{0, 1\} && \forall\; a \in A.
\end{aligned}
$$

Optimizar solo costos fijos (cont.)

- Los costos variables incurridos se pueden limitar mediante una restricción de presupuesto.

- El ruteo implícito de mercancías no es consistente con el problema de camino de costo mínimo.

- Puede ser útil expresar la restricción de presupuesto para cada $k \in K$, mediante un valor que imponga una desviación máxima con respecto al costo del camino de costo mínimo en G desde O_k hacia D_k,

$$\sum_{a \in A} c_a x_{ak} \leq \rho c_k^* R_k \qquad \forall\, k \in K,$$

  donde c_k^* es el costo del camino de menor costo desde O_k a D_k en G (con todos sus arcos habilitados) y $\rho \geq 1$ es un coeficiente de máximo desvío permitido.

Capacidades en los arcos

- Considerar el problema de camino de costo mínimo

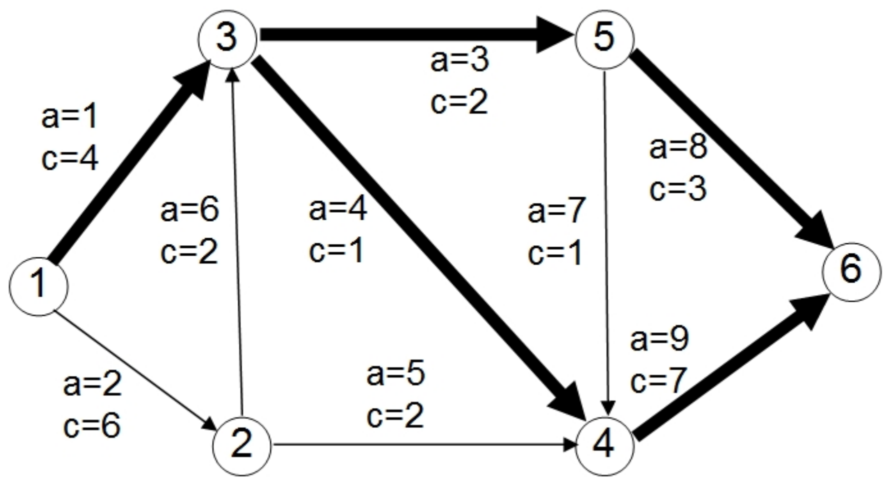
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_n^+} x_a - \sum_{a \in A_n^-} x_a = \theta_n && \forall\ n \in N, \\ & x_a \geq 0 && \forall\ a \in A, \end{aligned}$$

donde θ_n es igual a 1 si $n = O$, es igual a -1 si $n = D$ y 0 en otro caso.

- Imponemos capacidades en los arcos: $x_a \leq u_a\ \forall a \in A$, donde u_a es un parámetro del problema.

Capacidades en los arcos (cont.)

- Considerar el siguiente ejemplo, donde la solución óptima (sin capacidades en los arcos) es el camino 1-3-8, con valor óptimo 9,00.



- Si agregamos capacidades en los arcos de modo que: $u_3 = 0,75$ y $u_a = 1,00$ $\forall a \in A - \{3\}$.
- El flujo (de una unidad) se divide entre los caminos 1-3-8 (0,75 unidades) y 1-4-9 (0,25 unidades), con un valor óptimo 9,75.

Capacidades en los arcos (cont.)

- El resultado no es un camino único.
- La totalidad del flujo se distribuye en caminos de costo no decreciente.
- Todos tienen su capacidad saturada, excepto el último.
- El resultado es un equilibrio con función de costo constante y capacidades estrictas.

Formulación general del problema con capacidades

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) && && (7)\\
\text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_n^+} x_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} x_{ak} = \theta_{nk} && \forall\ n \in N, k \in K, && (8)\\
& \sum_{k \in K} x_{ak} \leq u_a y_a && \forall\ a \in A, && (9)\\
& x_{ak} \geq 0 && \forall\ a \in A, k \in K, && (10)\\
& y_a \in \{0, 1\} && \forall\ a \in A. && (11)
\end{aligned}
$$

- La totalidad del flujo (sumada sobre todas la mercancías de K) debe respetar la capacidad en cada arco, restricción (9).
- Para valores fijos de y_a el problema resultante equivale a encontrar $|K|$ caminos de costo mínimo no independientes (computacionalmente más difícil).

Costos variables no lineales

- Función creciente $c_a(x_a)$, que modela deseconomías de escala, por ejemplo:
  - BPR (Bureau of Public Roads): $c_a(x_a) = c_a[1 + \alpha(x_a/u_a)^\beta]$
  - Demora en colas: $c_a(x_a) = c_a/(u_a - x_a)$
- Agregando las siguientes restricciones al modelo sin capacidades:

$$
\begin{aligned}
c_{ak}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \omega_{ik} - \omega_{jk} &\geq 0 & \forall a = (i,j) \in A, \forall k \in K,\\
[c_{ak}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \omega_{ik} - \omega_{jk}]x_{ak} &= 0 & \forall a = (i,j) \in A, \forall k \in K,\\
\omega_{O_k k} &= 0 & \forall k \in K.
\end{aligned}
$$

- Se obtienen flujos en equilibrio de Wardrop: para cada $k \in K$, el costo de todos los caminos de O_k a D_k con flujo positivo es igual y no excede el largo de ningún otro camino entre el mismo par de nodos.

Bibliografía

- Correa, JR; Schulz, AS; Stier-Moses, NE (2004) Selfish routing in capacitated networks. Mathematics of Operations Research 29(4):961-976.

- Magnanti, TL; Wong, RT (1984) Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms. Transportation Science 18(1):1-55.

- Sheffi, Y (1985) Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice Hall. Disponible en `http://web.mit.edu/sheffi/www/selectedMedia/sheffi_urban_trans_networks.pdf`

- Zetina, CA; Contreras, I; Cordeau, J-F (2017) Exact Algorithms for the Multicommodity Uncapacitated Fixed-Charge Network Design Problem. Technical Report CIRRELT-2017-69.

- Notas del docente del curso.