Herramientas para el diseño y análisis de redes de transporte urbano de pasajeros

Tema 3: Técnicas y herramientas de la Investigación de Operaciones

Investigación de Operaciones (IO)

- Aplicación del método científico a la toma de decisiones.
- Optimización, simulación, probabilidad y estadística.
- Orientada a trabajar con modelos.

Metodología de la IO

1. Definir el problema de interés y reunir la información relevante.
2. Formular un modelo (generalmente matémático) para representar el problema.
3. Desarrollar un procedimiento (generalmente basado en computadora) para obtener soluciones al problema desde el modelo.
4. Probar el modelo y refinarlo según sea necesario.
5. Preparar la aplicación del modelo según los objetivos del estudio.
6. Implementación de la solución.

Modelos

- Abstracción y simplificación de una parte relevante de la realidad, cuyo estudio es de interés.
- Modelos matemáticos, ejemplos: $F = ma$, $E = mc^2$
- Otra clasificación:

Tipo de modelo	**Definición**	**Ejemplo en transporte urbano**
Descriptivo	Cómo se comporta el sistema actualmente	Estudiar la distribución de la demanda entre las diferentes líneas de un sistema de transporte público
Normativo	Cómo debería comportarse el sistema de forma ideal	Determinar la frecuencia de las líneas de transporte público para mejorar los tiempos de espera

Optimización

- Búsqueda de la mejor forma de realizar una tarea.
- Según un cierto criterio o medida de desempeño.
- Herramienta de conceptualización y análisis, más que un principio que lleva a una solución filosóficamente correcta.
- Optimización matemática.
- Marco metodológico para abordar problemas enunciados en lenguaje natural, por ejemplo:
  - Queremos mejorar el sistema.
  - El sistema debe ser más eficiente.
  - Debemos optimizar el sistema.

Optimización e IO

- Identificación de objetivos, variables de decisión, restricciones y parámetros.

- Identificar una o varias medidas de desempeño que permitan decidir si una configuración del sistema es mejor que otra.

- Formulación simbólica/matemática/computacional del modelo.

- Los modelos deben ser válidos (realistas) y tratables (computacionalmente, deben ser posibles de ser resueltos).

Optimización e IO (cont.)

- Diseñar e implementar un método computacional de resolución (algoritmo). Algunos modelos pueden resolverse sin la asistencia de computadora (por ejemplo, cálculo matemático).
- Resolver el modelo: Encontrar la (o una) solución óptima, o una buena solución que cumple con varias restricciones. O encontrar una solución aproximada pero buena (heurística).
- Reunir información necesaria para aplicar el modelo: los parámetros están sujetos a error, entonces es necesario realizar análisis de sensibilidad.
- Validación del modelo: Chequear que se comporta de forma consistente con el aspecto de la realidad que deseamos estudiar. Chequeos básicos: unidades de los parámetros, consistencia de las dimensiones y valores.

Programación matemática

- Componentes del modelo de optimización se formulan explícitamente mediante expresiones matemáticas, en términos de parámetros y variables del modelo.

- En este curso utilizamos formulaciones de programación lineal y lineal entera.

- Interesa la formulación explícita para:

  1. Estudiar las interrelaciones entre componentes del modelo.
  2. Acceder a métodos de resolución eficientes y que garanticen optimalidad (al menos para casos chicos), para asegurarnos que los análisis son realizados sobre soluciones óptimas.

Programación matemática (cont.)

Formulación general:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0 & \forall\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ & g_j(x) \leq 0 & \forall\ j = 1, 2, \ldots, p, \\ & x \in S. \end{aligned}$$

donde x es un vector de n dimensiones, f, h y g son funciones reales de x y S es un conjunto en el espacio n-dimensional.

Programación matemática (cont.)

- Programación lineal: f y h son funciones lineales de x, $p = 0$ y el conjunto S establece que x toma valores en los reales no negativos.

- En este curso también consideraremos problemas de programación lineal aquellos de maximización y que incluyen restricciones de desigualdad.

- Programación lineal entera: Además, algunos componentes del vector x están restringidos a tomar valores enteros.

- Un caso particular es el de las variables binarias, que pueden tomar solamente los valores 0 y 1 (modelado de decisiones).

Ejemplo: problema del viajante

- Traveling Salesman Problem (TSP).
- Dados un conjunto de n ciudades y una matriz de distancias c_{ij} entre ellas.
- El objetivo es encontrar una secuencia de visita de todas las ciudades, que termine en el mismo punto que comienza y que minimice la distancia total.
- Problema fácil de definir.
- Pero difícil de resolver: para una instancia de n ciudades hay $n!$ soluciones factibles, no se conoce algoritmo que encuentre la solución óptima en una cantidad de pasos polinomial respecto a n.

TSP: programación matemática

Formulación general (solución puede contener ciclos disjuntos).

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,j \in N, i \neq j} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 & \forall\, i \in N, \\
& \sum_{i \in N} x_{ij} = 1 & \forall\, j \in N, \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, i,j \in N, i \neq j.
\end{aligned}
$$

donde $N = \{1, 2, \ldots n\}$ es el conjunto de ciudades y x_{ij} es una variable binaria que indica si la secuencia i, j forma parte de la solución.

TSP: eliminación de ciclos

Formulación de Dantzig, Fulkerson y Johnson.

$$\sum_{i,j \in M} x_{ij} \leq |M| - 1 \quad \forall M \subset N, 2 \leq |M| \leq n - 2.$$

Formulación de Miller, Tucker y Zemlin.

$$\begin{aligned} u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n - 2 &\quad \forall i, j \in N, i \neq j, \\ 1 \leq u_i \leq n - 1 &\quad \forall i \in \{2, \ldots n\}. \end{aligned}$$

TSP: heurísticas

- Construcción: vecino más cercano, inserción de nodos.
- Mejora/búsqueda local: r-opt, intercambio de arcos.
- Metaheurísticas.

Bibliografía

- Hillier, F; Lieberman, G (2015) Introduction to Operations Research. McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-352345-3. ISBN 0-07-352345-3.

- Laporte, G (1992) The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. European Journal of Operational Research 59(2):231-247.

- Luenberger, DG; Ye, Y (2016) Linear and Nonlinear Programming. International Series in Operations Research & Management Science 228. Springer International Publishing. DOI 10.1007/978-3-319-18842-3.

- Sheffi, Y (1985) Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice Hall. Disponible en `http://web.mit.edu/sheffi/www/selectedMedia/sheffi_urban_trans_networks.pdf`

- Notas del docente del curso.