

## CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS

---

En este capítulo se presentan los principales conceptos relacionados con la tecnología empleada en el proyecto, de manera que los fundamentos puedan ser explicados y entendidos más fácilmente antes de comenzar a describir el desarrollo propio que se ha llevado a cabo.

Se introducen aquí los términos de **tecnología LIDAR (*Light Detection And Ranging*)** y **Modelos Digitales del Terreno (MDT)**, conceptos fundamentales para el presente proyecto. Se explica también el por qué de la necesidad de un **dispositivo de medidas inerciales y de posicionamiento** en un sistema que pretende generar MDTs. Para ello se incluyen también algunos conceptos de navegación inercial. También se describen los sistemas de coordenadas con los que el prototipo diseñado trabaja y a los cuales hace falta prestar atención a la hora de procesar los datos y representarlos. Por último, se introduce también el concepto del **filtro de Kalman** que viene implementado en uno de los componentes del sistema.

---

### 2.1. LIDAR

---

**LIDAR** es el acrónimo de las palabras inglesas ***Light Detection And Ranging***. Esta tecnología tiene su origen en la fusión de la tecnología láser junto con la tecnología **RADAR (*RAdio Detection And Ranging*)**, lo cual ha permitido mejorar en gran medida la precisión de los sistemas de detección, dando lugar a nuevas aplicaciones.

El fundamento de los dispositivos basados en la tecnología LIDAR es el cálculo del **tiempo de vuelo (*TOF - Time Of Flight*)** de los pulsos láser, de manera que, conociendo la velocidad del mismo, las características angulares con las que fue emitido, y la diferencia de tiempos entre el rayo emitido y el reflejado se puede determinar de manera sencilla la distancia a la que se encuentra el obstáculo/objeto con el que el

rayo impactó. Esto permite, con gran exactitud, **conocer las coordenadas** de la posición de objetos o superficies con respecto del sistema de coordenadas del propio dispositivo.

En la actualidad se pueden encontrar sistemas basados en LIDAR que, junto con otras tecnologías, se utilizan para generar imágenes tridimensionales de superficies (Figura 3), lo cual coincide prácticamente con el objetivo principal de este proyecto. Sin embargo, la tecnología LIDAR puede encontrarse en otras aplicaciones muy variadas (además de las relacionadas con la topografía), como pueden ser por ejemplo aplicaciones de reconocimiento de objetos y personas en ambientes inteligentes (*Ambient Assisted Living*) y ciertos videojuegos.

Un componente hardware básico de un sistema que se utiliza para generar modelos digitales del terreno se conoce comúnmente como **escáner de pulsos láser (ALS – Airborne Laser Scanner)**. Este tipo de dispositivos están basados en tecnología LIDAR. Los sistemas comerciales que generan estos MDTs suelen incorporar dispositivos de este tipo pero de mayor tamaño que el que se ha utilizado en este proyecto, como por ejemplo se describe en (8) o en (9). Es por ello que se suelen incorporar a aeronaves que permiten tripulación a bordo que controle el sistema. El reto de este proyecto es diseñar un sistema de pequeñas dimensiones, pero que haga lo mismo, y que pueda ser integrado en la aviónica de una aeronave de radiocontrol o un UAV pequeño.

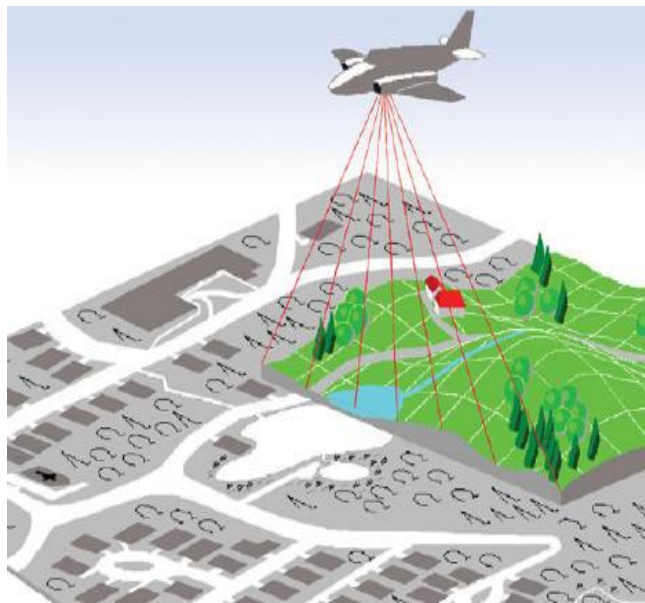


Figura 3. Ejemplo de una aplicación basada en la tecnología LIDAR para generar MDTs<sup>1</sup>

En el apartado dedicado al hardware en el presente documento se profundiza en la tecnología LIDAR, a la vez que se describe el escáner láser utilizado en el proyecto, así como sus características técnicas y su funcionamiento. El dispositivo ALS utilizado en el proyecto se conoce como **LD-MRS 400001**.

---

<sup>1</sup> Fuente: H&O Ingenieros S.A.

## 2.2. Modelo Digital del Terreno

Un **Modelo Digital del Terreno o MDT** es una estructura numérica de datos que representa la **distribución espacial de una variable**, concretamente en este caso es la **cota o altura**. Existen otros tipos de modelos digitales de datos que representan distribuciones espaciales de otras variables, como pueden ser la temperatura, la presión u otras. En este proyecto se hace referencia a la altura como única variable de interés del MDT. En inglés, a estos modelos se les conoce por las siglas **DEM** (*Digital Elevation Model*), **DTM** (*Digital Terrain Model*) o **DSM** (*Digital Surface Model*).



Figura 4. Modelo Digital del Gran Cañón del Colorado (Arizona, EEUU)<sup>2</sup>

Tales modelos del terreno pueden construirse mediante distintas técnicas relacionadas con la fotogrametría, *focus variation*, radares *Doppler*, etc. De entre ellas, e incluida dentro de las técnicas de la fotogrametría (ciencia que estudia la manera de determinar las propiedades geométricas de los objetos a partir de todo tipo de imágenes), se encuentra la tecnología **LIDAR**.

Por lo general, un MDT puede representar **distintos niveles de detalles**. Existen aquellos que únicamente representan la superficie terrestre (Figura 4), sin prestar atención a nada más e intentando excluir del MDT la vegetación que pudiera existir, como los que se pueden encontrar en (10) o (11). Algunos incluyen en la representación también las estructuras y objetos que se encuentran en el terreno, como pueden ser árboles, casas, puentes y otras. Por último, otros MDT hacen hincapié en las estructuras e incluyen en su representación con gran nivel de detalle edificios, y todo tipo de construcciones presentes. En el caso de estudios centrados casi exclusivamente en la representación de la vegetación de la superficie se tienen por ejemplo (2) o (12).

<sup>2</sup> Fuente: NASA/JPL-Caltech y U.S. Geological Survey

En el proyecto presente el interés radica básicamente en crear un prototipo de sistema basado en la tecnología LIDAR que sea de pequeñas dimensiones, para generar **representaciones gráficas por ordenador de las superficies del terreno** incluyendo todos los elementos que se encuentren en el área escaneada (árboles, postes de suministro eléctrico, coches y cualquier tipo de estructura construida por el hombre). Por este motivo, el MDT que se obtiene como resultado de este proyecto es genérico y no orientado a ninguna aplicación específica (Figura 5). El único fin es el de demostrar que es posible generar MDTs con un sistema de pequeñas dimensiones y analizar las características de los resultados obtenidos y las limitaciones encontradas.

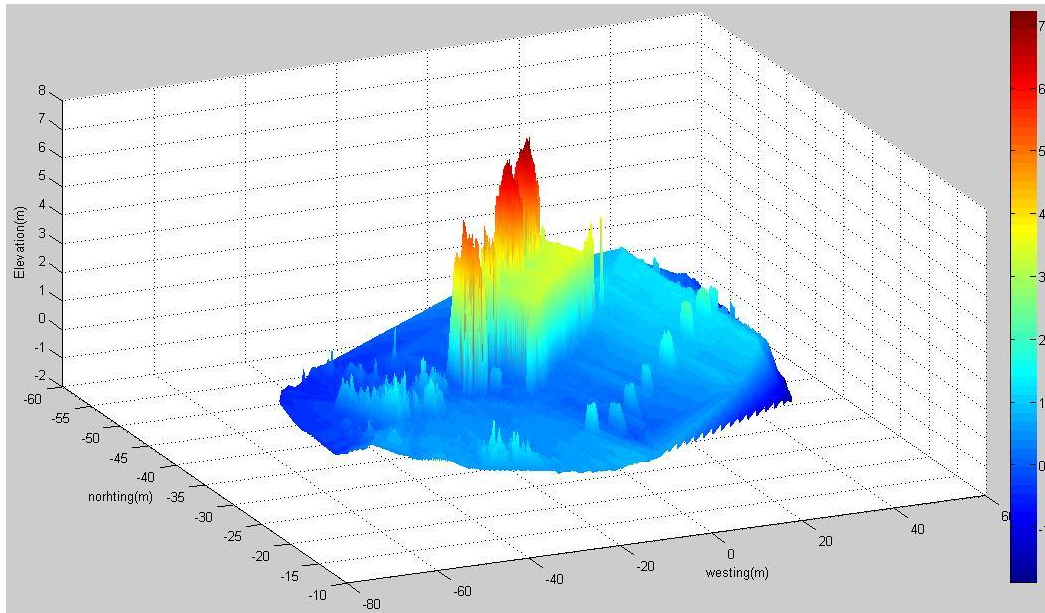


Figura 5. Ejemplo de un MDT generado en este proyecto

---

### 2.3. Navegación inercial

---

**Inercia** es la tendencia de los cuerpos a mantener constante su velocidad de rotación y de traslación a no ser que se vean afectados por momentos o fuerzas, respectivamente (primera ley de Newton).

Un **Sistema de referencia Inercial** es un sistema de coordenadas en el que las leyes de Newton del movimiento son válidas. Los sistemas de referencia inerciales ni rotan ni aceleran.

Una **Unidad de Medidas Inerciales (IMU - Inertial Measurement Unit)** es un dispositivo que mide los cambios en la rotación (mediante giróscopos) y la aceleración (mediante acelerómetros) que experimenta él mismo, o cualquier otro móvil al que esté ligado físicamente.

La **Navegación Inercial** utiliza giróscopos y acelerómetros para conocer en todo momento la estimación de la posición, velocidad, actitud y variación de actitud del vehículo en el que están integrados los sensores.

Un **Sistema de Navegación Inercial (INS – Inertial Navigation System)** consiste en una unidad de medidas inerciales o IMU en la cual los sensores están ligados a una plataforma común, para mantener las mismas orientaciones relativas entre ellos, y en la que un pequeño computador procesa estas medidas o realiza cualquier otro tipo de cálculo necesario con ellas.

Existen diferentes esquemas de sistemas de navegación inercial. De entre ellos se puede hacer una división general que los clasificaría en dos grupos, ***gimbaled*** y ***strapdown***. Los sistemas ***gimbaled*** se caracterizan por aislar la plataforma con los sensores inerciales de los movimientos de rotación externos (los pertenecientes al vehículo aéreo por ejemplo). Las plataformas ***gimbaled*** están sujetas a un marco rígido que rota de tal manera que aísla el interior de la plataforma de rotaciones externas.

Los sistemas ***strapdown*** son aquellos en los que los ejes de los sensores están alineados con los ejes de la aeronave y al estar fijados al vehículo experimentan los mismos movimientos que hace el mismo. Estos sistemas necesitan mayor capacidad de cálculo, ya que es necesario restar el efecto de los movimientos del vehículo para poder tener una aproximación de un sistema de referencia inercial, sin embargo, su precio es considerablemente menor en comparación con un sistema ***gimbaled***.

En este proyecto se utiliza como sistema de navegación inercial el dispositivo ***Motion Tracker***, cuya función es la de proporcionar los valores estimados de la dinámica de la aeronave en cuanto a la posición, velocidad, actitud y variación de ésta última. Éste es un sistema de navegación inercial de tipo ***strapdown*** (Figura 6). A este dispositivo también se le conoce como **MTi-G**, y así será como se hará referencia al mismo durante el presente documento.



Figura 6. Colocación del dispositivo MTi-G en la aeronave

---

## 2.4. Sistemas de coordenadas

---

El objetivo principal del proyecto es generar un **modelo digital del terreno** o **MDT**. Éste se compone, al igual que un mapa, de un conjunto de puntos ordenados. Estos puntos tienen que estar localizados, es decir, tienen que tener una posición determinada con respecto a una referencia. Por lo tanto, es necesario un **sistema de coordenadas** para determinar la posición de los puntos que componen un MDT.

Una cuestión importante es qué sistema de coordenadas utilizar para representar un MDT porque, como se va a ver más adelante, los distintos componentes del prototipo que se ha diseñado tienen asociados distintos sistemas de coordenadas propios, y los valores de las variables que estos proporcionan vienen dados con respecto a sus propias referencias. A la hora de representar un MDT se necesita un sistema de referencia común a todos los puntos y resulta que la elección de un **sistema de coordenadas de representación único** no es algo trivial.

Existen varios sistemas de coordenadas fundamentales que van a comentarse a continuación. A no ser que se diga lo contrario, estos sistemas son ortogonales, dextrógiros y cartesianos. Únicamente difieren en el origen, la orientación relativa de sus ejes y el movimiento relativo entre sus planos. Dependiendo del movimiento que se quiera estudiar pueden interesar unos u otros.

---

### 2.4.1. Sistema de coordenadas inercial (I-frame)

---

Es el único sistema de coordenadas donde las leyes de Newton tienen validez, es decir, este sistema **idealmente no se mueve ni rota respecto a nada**. En la práctica resulta imposible encontrar un sistema realmente inercial que no se mueva, ya que todo en el universo está en movimiento, así que este sistema se utiliza como aproximación teórica y como herramienta para visualizar otros marcos de referencia más fácilmente. En la práctica consiste en un conjunto de ejes perpendiculares entre sí que no rotan ni aceleran respecto al espacio inercial.

---

### 2.4.2. Sistema de coordenadas ECI (i-frame)

---

Este sistema de coordenadas llamado **ECI (Earth Centered Inertial)** tiene su origen en el centro de masas de la Tierra y no rota con respecto al espacio inercial. **Los ejes** del sistema ECI están **fijos** y apuntando hacia direcciones determinadas con respecto a las estrellas: El eje Z coincide con el eje polar y el plano perpendicular al eje Z coincide con el Ecuador. Los ejes X e Y no rotan, apuntando X directamente al Equinoccio Vernal (Figura 7). Este sistema de coordenadas es importante porque en él las leyes de Newton son casi ciertas y permite visualizar más fácilmente otros marcos de referencia no inerciales.

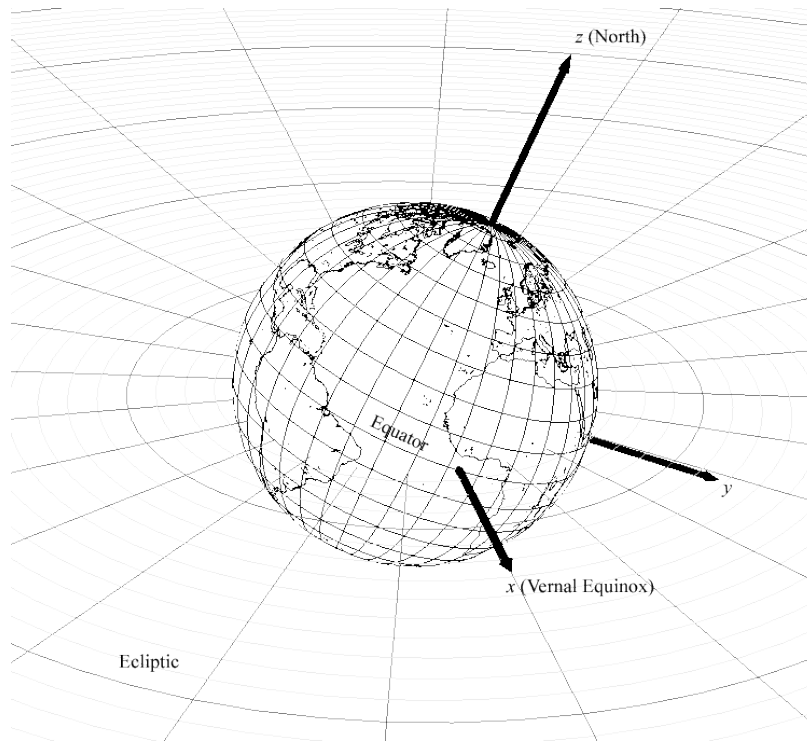


Figura 7. Sistema de coordenadas ECI<sup>3</sup>

Este sistema de coordenadas es muy utilizado para determinar las trayectorias de los satélites que orbitan alrededor de la Tierra, como por ejemplo los satélites del sistema GPS. Sin embargo no es el adecuado para determinar la posición de un punto en la superficie de la Tierra.

#### 2.4.3. Sistema de coordenadas ECEF (e-frame)

Se le conoce como sistema de coordenadas **Geocéntrico** o **ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*)**. Tiene su origen en el centro de masas de la Tierra y **sus ejes rotan con ella**. El eje Z apunta directamente al norte, a lo largo del eje polar. Los ejes X e Y están en el plano ecuatorial, con X dirigido hacia el meridiano de Greenwich (0° latitud, 0° longitud) y el eje Y apuntando 90° hacia el Este (Figura 8).

Es muy común usar este sistema de coordenadas para representar las posiciones y velocidades de los objetos terrestres, utilizando sus coordenadas ECEF o mediante la latitud, longitud y altitud.

<sup>3</sup> Fuente: Dr. T.S. Kelso, [www.celestrak.com](http://www.celestrak.com)



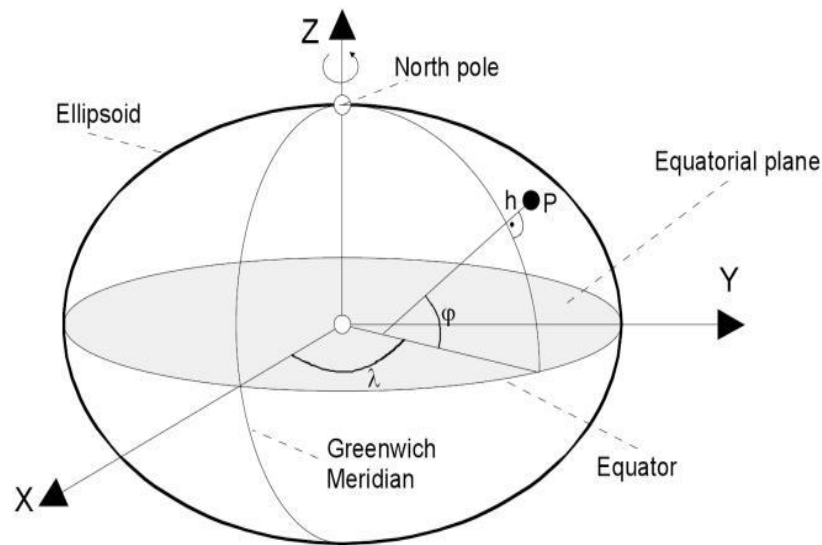


Figura 8. Sistema de coordenadas ECEF (13)

#### 2.4.4. Sistema de coordenadas de navegación (n-frame)

Es un **sistema local** con los **ejes X e Y contenidos en el plano tangente** de cada punto de la Tierra donde se define. Tiene su origen en la posición de la superficie terrestre que un móvil ocupa en cada momento (latitud, longitud). A este sistema de coordenadas también se le conoce como **Local Tangent Plane o LTP**.

Existen varias configuraciones de este sistema de coordenadas, dependiendo de hacia dónde apuntan sus ejes. De entre ellas, la configuración más común se da cuando el eje X apunta hacia el norte, el eje Y hacia el Este y el eje Z hacia abajo. A esta configuración se le conoce como **NED (North, East, Down)** ya que sus ejes apuntan a estas direcciones.

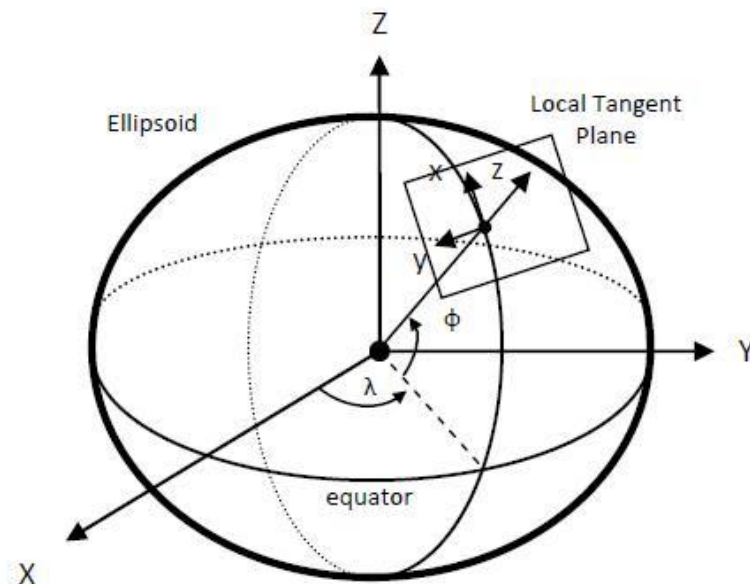


Figura 9. Sistema de coordenadas de navegación (13)



Otra posible configuración dispone sus ejes de manera que el eje X apunta al norte, el eje Y apunta al oeste y el eje Z apunta hacia arriba (dirección normal al plano tangente y hacia fuera del elipsoide terrestre), también conocido como **NWU (North, West, Up)**. Esta es la configuración que se ha utilizado en este proyecto y la que aparece dibujada en la Figura 9.

---

#### 2.4.5. Sistema de coordenadas *body* (b-frame)

---

Este sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de masas del vehículo y está siempre ligado a él. Se usa típicamente en plataformas del tipo *strapdown*, es decir, cuando los sensores tienen también como centro de masas el del vehículo y sus ejes se mueven con él (Figura 10). Por este motivo tiene la misma orientación de ejes que el sistema de coordenadas de los sensores del sistema de navegación inercial que incorpore, por ejemplo, una aeronave.

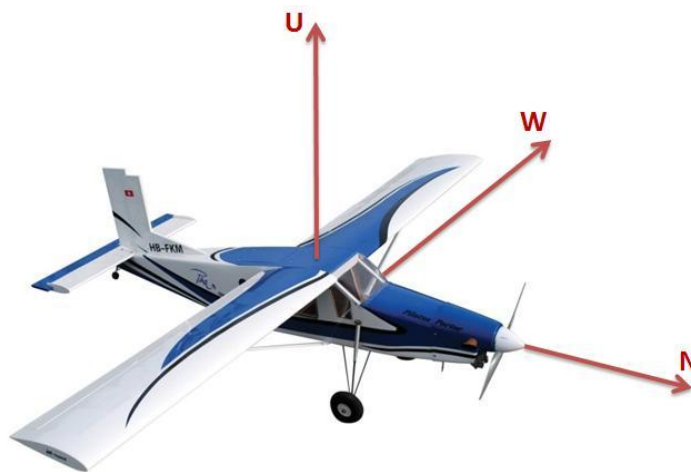


Figura 10. Sistema de coordenadas *body* (b-frame)

---

### 2.5. Transformación de los sistemas de coordenadas

---

Es necesario **elegir un sistema de coordenadas único y adecuado** para la representación de un MDT. Hasta ahora se han descrito varios sistemas de coordenadas con los que se ha trabajado en el proyecto, ya que los distintos dispositivos que componen el prototipo diseñado expresan los valores medidos en distintos sistemas de coordenadas. Algunos son propios del tipo *body* y otros de tipo ECEF o LTP para expresar determinados datos. Se hace pues necesario relacionar unos con otros, de manera que se puedan fusionar los datos adquiridos por un dispositivo que trabaja con un sistema de coordenadas con los de otro que utilice otro distinto. El fin último es que esos datos se puedan transformar a un sistema de coordenadas único y apropiado para representar el MDT.

Estas transformaciones serán básicamente de dos tipos, **traslaciones**, en el caso en el que ambos sistemas de referencia tengan sus ejes orientados en la misma dirección pero sus orígenes estén separados en

el espacio; y **rotaciones**, en el caso en el que sus orígenes coinciden en el espacio pero sus ejes apunten en direcciones distintas. En muchos casos será necesario aplicar tanto traslaciones como rotaciones. El espacio en el que se pretende construir el MDT tiene tres dimensiones, por lo tanto estas operaciones serán características de un espacio tridimensional.

### 2.5.1. Traslación en un espacio tridimensional

Una traslación en tres dimensiones se realiza sumando a las coordenadas de un punto las coordenadas del vector que describe la traslación. Por lo tanto un punto dado P como aparece en [1] al que se le aplica una traslación definida por el vector de traslación  $\vec{T}$ , como se ve en [2], se realiza de la forma que se describe en [4] dando como resultado el punto P'.

$$P = (x, y, z) \quad [1]$$

$$\vec{T} = (x_t, y_t, z_t) \quad [2]$$

$$\text{punto origen } (x, y, z); \text{ punto destino } (x + x_t, y + y_t, z + z_t) \quad [3]$$

$$P' = (x', y', z') = (x + x_t, y + y_t, z + z_t) \quad [4]$$

Donde el vector de traslación  $\vec{T}$  es el que describe la dirección, sentido y magnitud de la traslación.

Esta transformación geométrica también se puede expresar **matricialmente**, siendo así apropiada para su tratamiento en un programa informático. En este caso tenemos un punto dado P como el definido en [5] y una matriz T definida en [6], que será la que represente la transformación al operar sobre el punto P. La aplicación de la transformación de T sobre P se define en [7] dando como resultado el punto P'. Los punto P y P' son vectores columna.

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad [5]$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6]$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad [7]$$

---

### 2.5.2. Rotación en un espacio tridimensional. Ángulos de Euler

---

Un cuerpo tridimensional puede rotarse de diversas maneras. Para determinar correctamente una rotación necesitamos designar un eje de rotación alrededor del cual se realiza el giro. Los ejes más sencillos alrededor de los cuales se puede definir unívocamente una rotación son los ejes de coordenadas los cuales cumplen el requisito de ser ortogonales entre sí.

Los **Ángulos de Euler** son un conjunto de tres coordenadas angulares, definidos en un espacio tridimensional Euclídeo que, mediante una aplicación ordenada de los giros que definen, determinan la orientación de un sistema de coordenadas (por lo general móvil) con respecto a otro que se mantiene fijo. Los ángulos de Euler, **según estén definidos**, pueden corresponderse con tres ángulos muy utilizados en navegación aérea para determinar la actitud de las aeronaves, como son **Roll ( $\phi$ )**, **Pitch ( $\theta$ )** y **Yaw ( $\psi$ )**.

Hay que resaltar que los **ángulos de Euler no están unívocamente definidos**, existiendo ambigüedades y encontrándose varias maneras de definirlos, por lo que no tienen que coincidir con los ángulos antes mencionados (Roll, Pitch y Yaw). Hay que tener claro cómo se definen los ángulos con los que trabajan los dispositivos de navegación que componen un sistema de navegación inercial. En el caso particular de este proyecto, el dispositivo en el que hay que detenerse para entender la definición de ángulos es el **MTi-G**.

En el **MTi-G** y según viene especificado en (13), la definición de ángulos de Euler que se utiliza es equivalente a los ángulos **Roll ( $\phi$ )**, **Pitch ( $\theta$ )** y **Yaw ( $\psi$ )**. Estos ángulos se definen con respecto a los ejes coordenados del vehículo. Si se considera el plano del horizonte como el definido por las alas de un avión cuando éste realiza un vuelo horizontal, podemos definir los signos de estos ángulos de la siguiente manera: el ángulo **Roll ( $\phi$ )** es positivo cuando el ala derecha se mueve por debajo del plano del horizonte, el ángulo de **Pitch ( $\theta$ )** es positivo cuando el morro del avión cae por debajo de la línea del horizonte y el ángulo de **Yaw ( $\psi$ )** se define positivo cuando el morro está rotando desde el norte hacia el oeste.

De forma gráfica se muestran estos ángulos en la Figura 11. Ésta es la definición de ángulos que se utiliza en este proyecto, debido a los dispositivos de navegación utilizados y la configuración del montaje del sistema completo en la aeronave, la cual se verá más adelante.

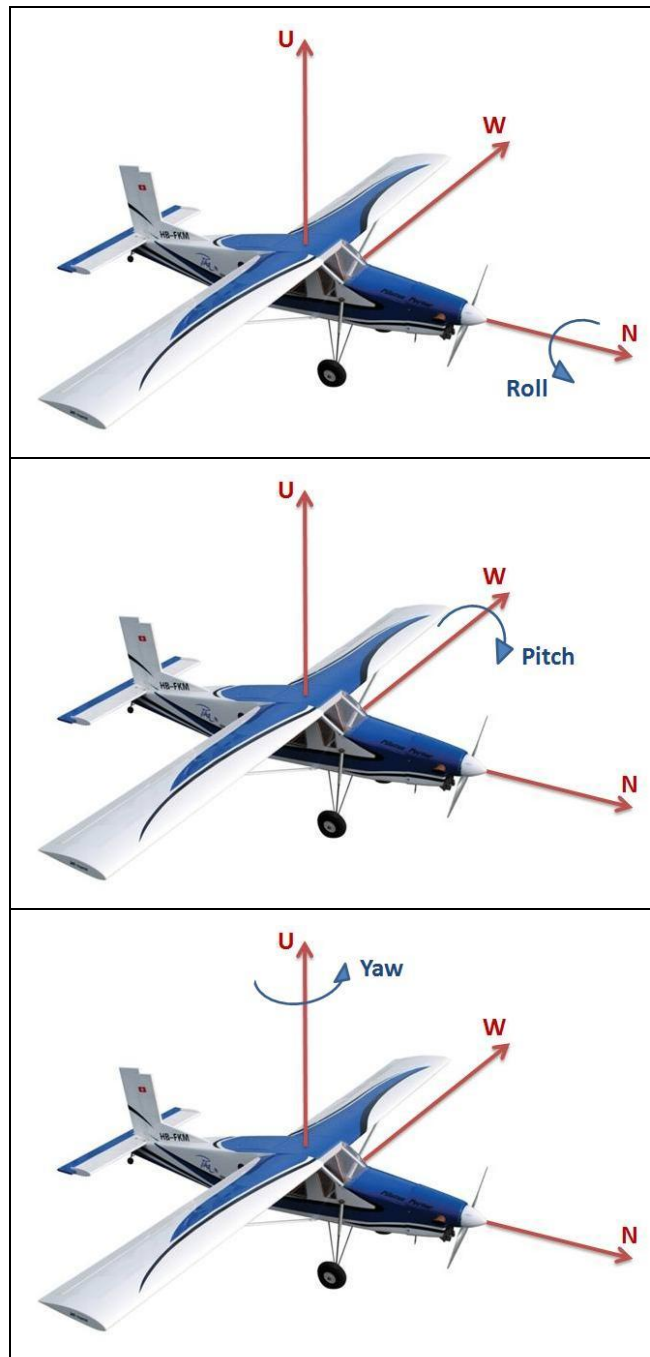


Figura 11. Ángulos Roll, Pitch y Yaw

Las transformaciones de estos ángulos se aplican matricialmente. A cada ángulo de Euler le corresponde una **matriz 3x3**, que determina el giro que se aplica con respecto al sistema de coordenadas que está fijo y actúa de referencia, tal y como se explica en (13) y (14).

El giro correspondiente al ángulo **Yaw** (también se le denota como  $\alpha$ ) es una rotación alrededor del eje de coordenadas vertical (eje z en un sistema genérico), siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, y queda definido por la matriz de rotación  $R_z(\alpha)$ , la cual se encuentra definida en [8].

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [8]$$

Nótese que las entradas superiores de la matriz  $R_z(\alpha)$  forman una matriz de rotación bidimensional aplicada a las coordenadas X e Y, mientras que la coordenada Z permanece constante. Ocurre lo mismo para las dos matrices correspondientes a los otros dos ángulos, con sus respectivos ejes fijos cada una.

El ángulo **Pitch** (también se le denota como  $\beta$ ) se corresponde con una rotación en sentido anti-horario alrededor del eje de coordenadas que apunta al oeste (eje Y en un sistema de coordenadas genérico). La matriz de rotación correspondiente a éste ángulo se conoce como  $R_y(\beta)$  y se encuentra definida en [9].

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad [9]$$

El ángulo **Roll** (también se le denota como  $\gamma$ ) se corresponde con una rotación en sentido anti-horario, alrededor del eje de coordenadas norte (eje X en un sistema de coordenadas genérico). La matriz de rotación de este ángulo, que se conoce como  $R_x(\gamma)$ , viene definida por [10].

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad [10]$$

Se pueden multiplicar las tres matrices de manera que obtengamos una sola matriz 3x3 que defina el conjunto de las tres rotaciones en una sola matriz, como la que aparece definida en [11].

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad [11]$$

---

## 2.6. GPS (*Global Positioning System*)

---

En este apartado se introduce brevemente el principio de funcionamiento del sistema de posicionamiento GPS. Esta tecnología viene incorporada en el dispositivo MTi-G que viene acompañado de una antena receptora de la señal GPS.

La tecnología GPS, tal y como su nombre en inglés indica, es un sistema de posicionamiento global (**Global Positioning System**), compuesto por 32 satélites. El principio funcional del GPS se basa en medir el tiempo empleado por la señal transmitida por los satélites en llegar al receptor del usuario, y este intervalo de

tiempo es multiplicado por la velocidad de la luz para obtener la distancia satélite receptor, como se explica en (15).

Una antena receptora GPS en la Tierra, para conocer su posición, primero **calcula la distancia que existe entre ella misma y un satélite que le sea “visible” de los 32 que hay en órbita**. Con esto el receptor en la Tierra sabe a qué distancia está de dicho satélite, por lo que podría estar situado en cualquiera de los puntos de una esfera centrada en el satélite y de radio la distancia medida entre ambos. Se necesitan entonces dos satélites más para conocer la posición exacta del receptor en la Tierra. De esta manera se tendrían las distancias correspondientes que existen entre el receptor y tres satélites del sistema GPS, o lo que es lo mismo tres esferas que se cortan. Dada su geometría, dos esferas se cortan en un círculo, entonces, tres esferas se cortan en dos puntos. Conociendo la distancia entre el receptor GPS en la Tierra y **tres satélites** se tendrían entonces dos posibles posiciones del receptor. Se necesitaría otra esfera para determinar cuál de los dos posibles puntos que se tienen es el que ocupa el receptor. Esa esfera es la propia superficie terrestre, puesto que la otra posición correspondería a una posición fuera de la superficie terrestre y no tiene sentido si se tiene en cuenta que se trabaja con la suposición de que el receptor está aproximadamente en la superficie de la Tierra.

Según lo anterior se tendría totalmente determinada la posición en cuestión, sin embargo, **se usa un cuarto satélite** para determinar cuál de los puntos es válido (dado que en vehículos espaciales el punto a descartar sería el que está en la superficie terrestre). Además si se tiene en cuenta que **el reloj de los satélites no está sincronizado con el del receptor**, se llega a la conclusión que las distancias medidas no serán exactas y la intersección puede no ocurrir en un punto, sino en un pequeño volumen. El cuarto satélite entra también en juego a la hora de servir al receptor como referencia de tiempos, de manera que pueda corregir su retraso/adelanto con respecto al reloj de los satélites y así determinar una posición más precisa.

El número de **satélites “visibles”** por el receptor estará siempre **relacionado con la precisión** que se puede alcanzar al determinar la posición, es decir, mientras más satélites estén visibles la precisión será mejor. Con el término “visible” se hace referencia a los satélites desde los cuales un receptor recibe la señal GPS de forma adecuada. Estos satélites “visibles” generalmente se corresponden con los que están colocados en órbitas espaciales desde la que alcanzan a emitir señal a la superficie terrestre en la que se encuentra el receptor.

Por lo general, con un receptor de señal **GPS común** lo normal es que se tenga un **error del orden de las unidades de metro**, aunque en ocasiones se pueda disponer de una precisión mayor.

Ante esto existe una alternativa, el **GPS diferencial o DGPS (Differential Global Positioning System)**. Éste se basa en la teoría de que los receptores GPS que están próximos unos a otros cometen un error en la

medida que está fuertemente relacionado, lo que implica que la posición de los receptores tiene una gran repercusión en la precisión. Usando entonces estaciones GPS fijas que conozcan su posición con más exactitud (y que haya sido calculada por medio de otras técnicas de posicionamiento más precisas), podrán conocer el error cometido por los receptores GPS en esa zona de cobertura, al realizar la comparación entre la posición calculada mediante la señal GPS y la que conocen mediante otras técnicas más precisas. De esta manera estas1 estaciones podrán informar a otros receptores de GPS del error que se comente en una determinada zona, para que así minimicen su error. Así los receptores GPS pueden llegar a precisiones mayores, del orden de algunos centímetros. Estas estaciones que sirven de soporte al sistema DGPS pueden ser **estaciones base terrestres o bien satélites geoestacionarios** como por ejemplo el sistema EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay Service*) utilizado en Europa.

---

## 2.7. Filtro de Kalman

---

El **filtro de Kalman**, según se define en (16), es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proporcionan un método computacional eficiente para estimar el estado de un proceso, de forma que minimiza el error cuadrático medio. El filtro tiene mucho potencial en varios aspectos: es capaz de hacer estimaciones de estados pasados, presente e incluso de futuros, y puede hacerlo incluso desconociendo la naturaleza precisa del sistema modelado.

El **filtro de Kalman**, tal y como se explica en (17), es una **ampliación** del algoritmo conocido como **LMS (Least Mean Square)** y por ello, y desde una perspectiva simplificada, se puede decir que se encarga de hacer una **estimación de una variable minimizando el error** cometido. Para ello recibe como entradas las medidas de diversos sensores, las cuales procesa para obtener el valor más cercano a la realidad de la variable de interés. Cada una de las medidas que ofrecen los sensores tiene una estadística propia y diferente, por lo tanto dependiendo de cuál sea más precisa en cada momento se le otorgará más peso a una u otra.

En el caso de los sistemas de navegación, en los cuales el filtro de Kalman se aplica con frecuencia, las **variables de interés son la posición y orientación de un móvil**. Por lo tanto el filtro de kalman recibe medidas de los sensores inerciales y del receptor GPS para estimar con el mínimo error posible la posición y orientación de la aeronave.

El filtro de Kalman, aplicado a los sistemas de navegación, divide su procedimiento en **dos fases**, la primera es la **fase predictiva**, en la cual hace una estimación de la posición a partir de la información que le proporcionan los sensores inerciales. Como se ha comentado esta estimación tendrá un error acumulado en el tiempo. Entonces entra en juego la **segunda etapa**, la de **corrección**, en la cual se usa el GPS (y en algunos casos, como veremos más adelante, otros sensores) para corregir el error de los sensores inerciales.



Para explicar mejor la utilidad de este algoritmo, se plantea la situación siguiente. Supóngase que se tiene un vehículo aéreo con una IMU instalada (con sus correspondientes sensores inerciales) y un receptor GPS, y que el usuario está interesado en conocer la posición del vehículo con la mayor exactitud posible. Se presentan **dos posibilidades para calcular la posición**, una de ellas es utilizar las medidas de los sensores inerciales y la otra el GPS.

En el caso de los **sensores inerciales**, éstos proporcionan información acerca de las aceleraciones sufridas por la IMU en un sistema de coordenadas tridimensional. Integrando estas aceleraciones se puede conocer la velocidad de la aeronave y, tras una doble integración se obtiene a la posición. Este método es conocido como *dead-reckoning*. Las medidas procedentes de los acelerómetros son **muy precisas** en un intervalo de tiempo pequeño, sin embargo, **su error es acumulativo** y aumenta con el tiempo, lo que impide obtener una medida de la posición exacta cuando ha transcurrido un cierto periodo de tiempo.

En cuanto al **GPS**, éste presenta **ventajas** con respecto a los sensores inerciales, ya que no sufre del problema de la **acumulación del error** (no necesita integrar para calcular la posición). Sin embargo, y aunque no presenta un carácter acumulativo, sí que tiene un **error constante y de magnitud mayor** que el de los sensores inerciales.

Se dispone entonces de dos opciones para calcular la posición de la aeronave, y cada uno de ellos tiene características diferenciadas, de manera que una opción se comporta mejor que la otra en un ámbito determinado y viceversa. Lo que interesa entonces es aprovechar lo mejor de cada una de estas posibilidades, y de eso es de lo que se ocupa el filtro de Kalman, de hacer la mejor estimación de la posición y orientación de la aeronave a partir de las medidas de los sensores inerciales y el receptor GPS, y teniendo en cuenta en qué situación es más fiable la información de uno o del otro.

En el capítulo referente a los componentes *hardware* del prototipo del sistema se proporciona más información acerca del filtro de Kalman implementado en el dispositivo MTi-G.